

X

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA D'ITALIA

RENDICONTI

DELLA

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

SERIE SETTIMA - VOLUME I

(in continuazione della Serie VI
della R. Accademia dei Lincei)



ROMA

REALE ACCADEMIA D'ITALIA

1940-XVIII

Matematica. — *L'applicazione del metodo di Picone, della trasformata di Laplace ad intervallo d'integrazione finito, alla teoria delle equazioni a derivate parziali d'ordine qualunque* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di D. MANGERON, presentata dall'Aggregato M. PICONE.

Il teorema di crescita sulla trasformata di LAPLACE ad intervallo d'integrazione finito, dato dal prof. PICONE ⁽³⁾, introduce, senza dubbio, nell'analisi e, soprattutto, nelle applicazioni alla teoria delle equazioni a derivate parziali di ordine qualunque, un potentissimo strumento d'indagine, come già assicurano pienamente i risultati enunciati dal prof. PICONE stesso nella Nota citata e nelle conferenze da Lui recentemente tenute a Cracovia, a Varsavia, ad Amburgo, a Giessen e a Milano ⁽⁴⁾.

Effettivamente, questo teorema permette d'investigare la capacità alla determinazione dei dati di CAUCHY in un problema d'integrazione delle equazioni a derivate parziali, indipendentemente dall'ipotesi sull'analiticità delle soluzioni e dei dati.

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

⁽²⁾ Pervenuta all'Accademia il 30 agosto 1939-XVII.

⁽³⁾ PICONE, *Nuove determinazioni per gl'integrali delle equazioni lineari a derivate parziali*. « Rend. dell'Accad. Naz. dei Lincei », vol. XXVIII, ser. 6^a, 2^o sem. (1938-XVII).

⁽⁴⁾ Cfr. le sue *Mémoires Nouvelles méthodes de recherches pour la détermination des intégrales des équations aux dérivées partielles* e *Nuovi metodi d'indagine nella teoria delle equazioni differenziali a derivate parziali* di prossima pubblicazione, rispettivamente, negli « Annales de la Société Polonaise de Mathématique » e nei « Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano ».

Ho voluto proseguire la via di ricerche iniziata dal prof. PICONE, considerando le equazioni lineari a derivate parziali d'ordine qualunque in due variabili indipendenti e ne ho conseguito una ricca messe di risultati, di cui i più rappresentativi ho l'onore di comunicare, con la presente Nota alla Reale Accademia d'Italia, riserbando per una Memoria di prossima pubblicazione le dimostrazioni e tutti gli sviluppi algoritmici ⁽¹⁾.

OSSERVAZIONI PRELIMINARI. — Sia

$$[1] \quad E(u) \equiv \sum a_{rs}(x) \frac{\partial^{r+s} u}{\partial x^r \partial t^s} = f(x, t), \quad \left(\begin{array}{l} 0 \leq r+s \leq n, \quad n \text{ intero positivo} \\ r, s \text{ interi, positivi o nulli} \end{array} \right),$$

l'equazione in due variabili reali x e t , d'ordine n , per x variabile nell'intervallo aperto I , di punti estremi x_1 e x_2 , finito o infinito, e per $t \geq 0$ (ipotesi, questa, fatta unicamente per fissare le idee), ove i coefficienti $a_{rs}(x)$ sono assegnate funzioni della sola x , continue in I .

Se $g(x)$ è una funzione positiva in I , designeremo con $J(g)$ l'insieme di punti del piano (x, t) per i quali x è in I e $0 \leq t \leq g(x)$. Una funzione $u(x, t)$ delle due variabili x e t sarà detta, con PICONE, regolare rispetto all'equazione [1] in un insieme $J(g)$ se è ivi finita e continua con tutte le sue derivate parziali che compaiono nell'equazione e con tutte quelle da cui queste possono, per derivazione, provenire. Considereremo esclusivamente problemi nei quali si ricercano soluzioni della [1], in un insieme $J(g)$, ivi regolari rispetto a questa, che diremo, semplicemente, soluzioni regolari della [1].

Assegneremo sempre alla $u(x, y)$ le condizioni iniziali seguenti

$$[2] \quad \sum_{h=0}^{n-s} \sum_{i=0}^{n-h-s} a_{i, h+s} \left[\frac{\partial^{i+h-1} u}{\partial x^i \partial t^{h-1}} \right]_{t=0} = \Psi_s(x),$$

le $\Psi_s(x)$ designando funzioni assegnate della sola x e l'indice s essendo destinato a percorrere i numeri $0, 1, \dots, \nu-1$, dove ν indica l'ordine massimo di derivazione rispetto alla variabile t che compare nell'equazione [1]. Si osservi che tali condizioni comprendono come caso particolare quelle di CAUCHY.

Il problema assegni, inoltre, alla soluzione u la condizione di appartenere ad una prescritta totalità Γ di funzioni. Detta Γ_0 la totalità delle

⁽¹⁾ Mi è sommamente gradito di esprimere anche in questa occasione al mio Illustre Maestro prof. MAURO PICONE il mio voto di profonda gratitudine per i consigli concessimi durante la preparazione del presente lavoro.

funzioni che contiene lo zero e tutte e soltanto le differenze di due qualsivogliano funzioni di Γ , il teorema di unicità per il problema considerato sarà dimostrato se si stabilirà che una soluzione regolare dell'equazione omogenea

$$[1_0] \quad E(u) \equiv \sum a_{rs}(x) \frac{\partial^{r+s} u}{\partial x^r \partial t^s} = 0, \quad \left(\begin{array}{l} 0 \leq r+s \leq n, \text{ } n \text{ intero positivo} \\ r, s \text{ interi, positivi o nulli} \end{array} \right),$$

verificante le condizioni iniziali omogenee

$$[2_0] \quad \sum_{h=1}^{n-s} \sum_{i=0}^{n-h-s} a_{i,h+s} \left[\frac{\partial^{i+h-1} u}{\partial x^i \partial t^{h-1}} \right]_{t=0} = 0$$

ed appartenente alla classe Γ_0 deve necessariamente essere lo zero.

2. IL TEOREMA GENERALE D'UNICITÀ DI PICONE ED UNA FORMOLA DI MAGGIORAZIONE. — Introdotta una funzione $T(x)$ della sola x , di segno costante in I , che supporremo positiva e regolare rispetto all'equazione [1], dalla [1] si trae, per x in I ,

$$[3] \quad \sum a_{rs}(x) \int_0^{T(x)} e^{\lambda[T(x)-t]} \frac{\partial^{r+s} u}{\partial x^r \partial t^s} dt = \int_0^{T(x)} e^{\lambda[T(x)-t]} f(x, t) dt.$$

Poniamo

$$[4] \quad \int_0^{T(x)} e^{\lambda[T(x)-t]} u(x, t) dt = u^*(x, \lambda).$$

Eseguendo alcune trasformazioni che non sono nè immediate nè troppo semplici, si trova che la trasformata $u^*(x, \lambda)$, verifica l'equazione differenziale ordinaria della sola x che diremo la *trasformata di Picone* dell'equazione data. Questa trasformata ha la seguente espressione:

$$[5] \quad a_{n,0} \frac{d^n u^*}{dx^n} + \sum_{k=1}^n \left[a_{n-k,0} + \sum_{r=1}^k \lambda^r (a_{n-k,r} - B_{n-k,r}) \right] \frac{d^{n-k} u^*}{dx^{n-k}} = \\ = \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{t=0}^{n-h-1} X_h^{(t)} \sum_{k=h+1}^{n-t} B_{t,k} \lambda^{k-h-1} + e^{\lambda T} \sum_{s=0}^{n-1} \lambda^s \Psi_s(x) + f^*(x, \lambda)$$

ove si è posto

$$f^*(x, \lambda) = \int_0^{T(x)} e^{\lambda[T(x)-t]} f(x, t) dt$$

e gli altri simboli hanno le seguenti definizioni:

$$B_{n-k,r} = \sum_{t=1}^k \binom{n-k+t}{t} \sum_{l=0}^{k-t} a_{n-k+t,l} C_{r-l-1,l-1},$$

essendo $C_{l,i}$ il coefficiente della $(l+1)$ -ma potenza di λ che compare nella funzione $P_i[\lambda T'(x)]$, definita per ricorrenza nel modo seguente

$$P_0 = \lambda T'(x) \quad , \quad P_i = (P_{i-1})' - \lambda T' \cdot P_{i-1} \quad , \quad (i = 1, 2, \dots)^{(1)}$$

l'apice indicando la derivazione rispetto alla variabile x , le funzioni $\Psi_s(x)$ sono definite dalle [2] e le $X_h^{(s)}$ dalle seguenti

$$X_h^{(s)} = \frac{d^s}{dx^s} X_h = \left[\frac{d^s}{dx^s} \frac{\partial^h u}{\partial t^h} \right]_{t=T(x)} \quad , \quad \left(\begin{array}{l} h = 0, 1, \dots, v-1 \\ s = 0, 1, \dots, n-h-1 \end{array} \right).$$

Indicheremo d'ora in poi il coefficiente della derivata i -ma della u^* nel primo membro della [5] con $A_i(x, \lambda)$ e metteremo

$$V(x, \lambda) = \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{t=0}^{n-h-1} X_h^{(t)} \sum_{k=h+1}^{n-t} B_{t,k} \lambda^{k-h-1},$$

$$\Phi(x, \lambda) = e^{\lambda T} \sum_{s=0}^{v-1} \lambda^s \Psi_s(x),$$

in modo che la trasformata di PICONE [5] si scrive come segue:

$$[6] \quad \sum_{i=0}^n A_i(x, \lambda) \frac{d^i u^*}{dx^i} = V(x, \lambda) + \Phi(x, \lambda) + f^*(x, \lambda),$$

ove, è bene osservarlo esplicitamente, il termine $V(x, \lambda)$ contiene, in generale, delle funzioni incognite X_0, X_1, \dots, X_{v-1} .

L'espressione che abbiamo ottenuta per la trasformata di PICONE dell'equazione generale [1], permette di enunciare il seguente *teorema generale d'unicità di Picone*:

I. Se è possibile determinare una funzione $T(x)$ regolare e positiva in I , tale che per ogni soluzione $u(x, t)$ della [1₀], regolare in $J(T)$, veri-

⁽¹⁾ Osserviamo, brevemente, che, da un altro punto di vista che qui omettiamo, le funzioni P_i appaiono di un certo interesse tanto a causa della struttura dei coefficienti dei diversi loro termini, quanto, considerandole come funzioni di $\lambda T'$, a causa delle loro proprietà formali. Si hanno così, ad es., speciali polinomi P_i , ottenuti ponendo $\lambda T' \equiv x$.

ficante le condizioni iniziali [2₀] ed appartenente alla totalità Γ_0 , si deduce, tenendo conto dell'equazione

$$[7] \quad \sum_{i=0}^n A_i(x, \lambda) \frac{d^i u^*}{dx^i} = V(x, \lambda)$$

alla quale la trasformata u^* della u deve soddisfare, che per tale trasformata sussiste, in I , una limitazione del tipo

$$[8] \quad |u^*(x, \lambda)| < K(x) \lambda^{p(x)},$$

almeno per valori di λ positivi abbastanza elevati, ove $K(x)$ e $p(x)$ sono funzioni reali e finite di x , nell'insieme $J(T)$ del piano (x, t) , luogo dei punti per cui x è in I , $0 \leq t \leq T(x)$, non può esistere più di una soluzione regolare della [1], verificante le [2] e appartenente alla totalità Γ .

Ora, ad una limitazione del tipo [8] del teorema di PICONE conduce, ad esempio, il seguente teorema di maggiorazione:

II. Per ogni soluzione regolare del sistema di equazioni formato dalle [7] e dalle

$$[9] \quad \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{d^i u^*}{dx^i} = \lim_{x \rightarrow x_2} \frac{d^i u^*}{dx^i} = 0, \quad \left(i = 0, 1, \dots, \frac{n-2}{2} \right), \quad n \text{ pari},$$

oppure dalle

$$[9'] \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{d^i u^*}{dx^i} = \lim_{x \rightarrow x_2} \frac{d^i u^*}{dx^i} = 0, & \left(i = 0, 1, \dots, \frac{n-3}{2} \right), \quad n \text{ dispari}, \\ \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{d^{\frac{n-1}{2}} u^*}{dx^{\frac{n-1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow x_2} \frac{d^{\frac{n-1}{2}} u^*}{dx^{\frac{n-1}{2}}}, \end{cases}$$

e per valori di λ positivi e abbastanza elevati, ha luogo, in I , la seguente formula di maggiorazione

$$[10] \quad \max |u^*| < K \lambda^{v-1}, \quad K = \text{cost.},$$

non appena siano verificate le seguenti disuguaglianze

$$[11] \quad a_{n,0} \geq 0, \quad (-1)^i (a_{2i, n-2i} - B_{2i, n-2i}) > 0,$$

$$\begin{pmatrix} i = 0, 1, \dots, \frac{n-2}{2} \text{ se } n \text{ è pari} \\ i = 0, 1, \dots, \frac{n-1}{2} \text{ se } n \text{ è dispari} \end{pmatrix}.$$

Se, inoltre, si suppone $T(x) \equiv \tau$, con τ costante positiva, la formula di maggiorazione [10] sussiste se si ha

$$[12] \quad a_{n,0} \geq 0, \quad (-1)^n a_{2i, n-2i} > 0.$$

l'indice i avendo il significato indicato nella [11].

3. UN PROBLEMA GENERALE D'INTEGRAZIONE ED UN TEOREMA DI UNICITÀ. — Vogliamo considerare per le equazioni [1], ad es., il seguente problema generale d'integrazione:

Problema A. Supposto che i coefficienti della [1] siano continui nell'intervallo finito e chiuso $I + FI$, è assegnata una funzione $T(x)$ ivi di classe $C^{(n)}$ ⁽¹⁾, positiva in I . Posto $T(x_i) = t_i$ ($i = 1, 2$), se $t_i > 0$ sono assegnate, nell'intervallo chiuso $(0, t_i)$, le funzioni continue $u_{i,k}(t)$. Detta Γ la totalità delle funzioni di classe $C^{(n-1)}$ in $J(T) + FJ(T)$, soddisfacenti le condizioni a) n pari, $\left(k = 0, 1, \dots, \frac{n-2}{2}\right)$ se $t_i > 0$, per $0 \leq t \leq t_i$,

$$[13] \quad \left[\frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right]_{x=x_i} = u_{k,i}(t),$$

oppure b) n dispari, $\left(k = 0, 1, \dots, \frac{n-3}{2}\right)$, se $t_i = 0$, per $0 \leq t \leq t_i$,

$$[13'] \quad \left[\frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right]_{x=x_i} = u_{k,i}(t), \quad \left[\frac{\frac{n-1}{2} u}{\frac{\partial x^{\frac{n-1}{2}}}{\partial x}} \right]_{x=x_1} = \left[\frac{\frac{n-1}{2} u}{\frac{\partial x^{\frac{n-1}{2}}}{\partial x}} \right]_{x=x_2}$$

si vuol costruire una soluzione della [1], regolare in $J(T)$, appartenente a Γ e verificante le condizioni iniziali [2].

Si ha, per questo problema, il seguente teorema generale d'unicità:

III. Il problema A d'integrazione non può possedere più di una soluzione se dalla $T(x)$ sono verificate in I le disuguaglianze [11].

E, ad es., se si pone $T(x) \equiv \tau$, con τ costante positiva, quest'altro:

IV. Se, in $I + FI$, sono soddisfatte le disuguaglianze [12], posto $T(x) \equiv \tau$, con τ costante positiva, nel rettangolo $J(T) + FJ(T)$ non può esistere più di una soluzione del problema A.

Approfondiremo adesso il teorema generale d'unicità, ottenuto per il problema A, prendendo in istudio le equazioni di tipo [1], del quart'ordine, dato l'interesse che esse presentano, soprattutto, nelle applicazioni alla

⁽¹⁾ Se E è un insieme dello spazio (x_1, x_2, \dots, x_r) , una funzione $f(x_1, x_2, \dots, x_r)$ dicesi di classe $C^{(n)}$ in E , se è ivi continua con tutte le sue derivate parziali fino a quelle incluse d'ordine n .

fisica-matematica. Supponiamo, per dare ai risultati una forma più elegante, che il primo membro della equazione delle caratteristiche abbia la forma seguente:

$$D \equiv [a(x)\xi^2 + b(x)\xi + c(x)][a_1(x)\xi^2 + b_1(x)\xi + c_1(x)],$$

$$a \geq 0, a_1 \geq 0, \xi = \frac{dt}{dx}.$$

4. EQUAZIONI TOTALMENTE ELLITTICHE ED EQUAZIONI ELLITTICO-IPERBOLICHE. — Consideriamo in un primo luogo il caso per cui si ha, in $I + FI$,

$$[14] \quad b^2 - 4ac < 0 \quad \text{e} \quad b_1^2 - 4a_1c_1 < 0,$$

l'equazione considerata è dunque totalmente ellittica. Si ha, ad es., il seguente teorema:

V. *Per la classe di equazioni di tipo ellittico per le quali (oltre, naturalmente le [14]) vale, in $I + FI$, la disuguaglianza $ac_1 + a_1c + bb_1 < 0$, e si è accertata l'esistenza di due certi numeri positivi di cui sotto, è possibile determinare una funzione $T(x)$ di cui parla il teorema I, tale che già le sole condizioni di CAUCHY, anche non analitiche, bastano per poter affermare l'unicità della soluzione (se tale esiste) nel dominio $J(T) + FJ(T)$ (che per altro non è unico).*

Alla costruzione di un semplice dominio $J(T)$ di cui parla il teorema V, si perviene nel modo seguente. Detti m_1 e m_2 due numeri positivi tali che essi siano gli estremi inferiori (o minimi) in $I + FI$ delle funzioni positive

$$\pm \frac{ab_1 + ba_1}{4aa_1} + \sqrt{\left(\frac{ab_1 + ba_1}{4aa_1}\right)^2 - \frac{ac_1 + a_1c + bb_1}{6aa_1}}$$

e, detto m il minore fra essi, definiamo, in $I + FI$, una funzione $T'(x)$, ivi di classe C''' , tale che $-m \leq T'(x) \leq m$ e tale inoltre che si abbia

$$\int_{x_1}^{x_2} T'(x) dx = 0 \quad \text{e} \quad \int_{x_1}^x T'(x) dx \text{ risulti sempre positivo in } I \text{ (aperto). La}$$

funzione $T(x) = \int_{x_1}^x T'(x) dx$ determina un dominio di validità dell'enun-

ciato. In particolare, si può scegliere per T' una funzione lineare assumente in x_1 e x_2 rispettivamente i valori $-m$ e m ; $T(x) = t$ rappresenterà quindi un arco di parabola contenente FI e $J(T)$ sarà un segmento parabolico alla cui costruzione alludevamo ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Mi sia permesso di osservare l'interesse d'un tale risultato, per il quale si indicano certi domini d'unicità delle soluzioni per le equazioni ellittiche, senza preoccuparci dell'analiticità dei dati.

Consideriamo ora il caso per cui si ha, in $I + FI$,

$$[15] \quad b^2 - 4ac \geq 0, \quad b - 4a_1c_1 < 0,$$

il caso cioè delle equazioni di tipo ellittico-iperbolico ⁽¹⁾. Si ha, ad es., il seguente teorema:

VI. *Per la classe di equazioni di tipo ellittico-iperbolico per le quali valgono, in $I + FI$, (oltre, ovviamente, le [15]) le disuguaglianze $c > 0$, $ac_1 + a_1c + bb_1 < 0$ e si è accertata ivi l'esistenza di certi estremi inferiori (o minimi) positivi indicati sopra, sussistono le conclusioni del teorema precedente.*

Si può precisare, inoltre, per questo caso, una certa limitazione per tali domini $J(T)$. Supponiamo, per fissare le idee, che la minore delle radici dell'equazione $D = 0$ sia positiva in I . I domini $J(T)$ appaiono limitate dalla caratteristica, spettante a quella radice, passante per il punto $(x_1, 0)$ e dalla sua simmetrica rispetto alla verticale passante per $(x_2, 0)$.

5. EQUAZIONI TOTALMENTE IPERBOLICHE ED EQUAZIONI PARABOLICHE. — Si abbia adesso, in $I + FI$,

$$[16] \quad b^2 - 4ac \geq 0, \quad b_1^2 - 4a_1c_1 \geq 0$$

e supponiamo, inoltre, quando in ambedue le [16] valga il segno d'uguaglianza, che i coefficienti a, b, c e a_1, b_1, c_1 non siano proporzionali, con che l'equazione considerata risulterà iperbolica. Se, per fissare le idee, supponiamo $c > 0$, $c_1 > 0$, $b_1 > 0$, $b > 0$ si ha, ad es., il seguente teorema:

VII. *Per la classe di equazioni di tipo iperbolico per le quali vale, in $I + FI$, (oltre, ovviamente, le [16]) la disuguaglianza $ac_1 + a_1c + bb_1 < 0$, ed esiste un numero positivo m tale che ivi risulti*

$$0 < m < \left| \frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4a_1c_1}}{a_1} - \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{a} \right| \leq \sqrt{\left(\frac{ab_1 + ba_1}{aa_1} \right)^2 - \frac{2(ac_1 + a_1c + bb_1)}{3aa_1}},$$

⁽¹⁾ Un'equazione di questo tipo è stata considerata da HADAMARD in una comunicazione da lui tenuta al Congresso internazionale dei matematici a Zurigo nel 1932. (V. *Sur les équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur*. « Mathematiker-Kongress Zürich », vol. II, pp. 78-80). Nonostante il fatto che l'equazione di tipo « composito » $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0$, considerata da HADAMARD, non soddisfi alle condizioni del teorema VI, utilizzando recenti vedute date dal prof. PRICONE si può stabilire i risultati interessanti questa equazione per i dati di CAUCHY, come mi propongo di mostrare in un lavoro di prossima pubblicazione.

è sempre possibile determinare un dominio $J(T)$ per cui vale il teorema d'unicità per il problema A ed il cui massimo è dato da quello la cui frontiera è formata dall'intervallo I per $t = 0$ e dagli archi delle caratteristiche

$$\alpha(x) = t_1 + \int_{x_1}^x \frac{-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4a_1c_1}}{2a_1} dx \quad \text{e} \quad \beta(x) = t_2 + \int_x^{x_2} \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} dx,$$

con $t_1 \geq 0, t_2 \geq 0$, passanti per (x_0, t_0) , dov'è $x_1 < x_0 < x_2, t_0 > 0$.

Supponiamo adesso che l'equazione data sia parabolica ed a coefficienti costanti. $T' = \text{cost} = c$ sarà allora l'inclinazione dell'unica caratteristica multipla e si ha, ad es., il seguente teorema:

VIII. Se, conservando le solite condizioni per le soluzioni ricercate, l'equazione considerata risulta, in $I + FI$, parabolica ed a coefficienti costanti, la soluzione del problema A è unica nel dominio determinato, ad es., da $t = c(x - x_1), c > 0, x = x_2, t = 0$.

6. EQUAZIONI IPERPARABOLICHE. — Ci domandiamo adesso, sempre in relazione al teorema d'unicità delle soluzioni, se vi sono casi nei quali sia possibile dispensarci dalle formule di maggiorazione. Ciò avverrà sicuramente se nel secondo membro della trasformata di PICONE spariranno tutte le funzioni incognite X_s . Ora, questo ha luogo se l'equazione del quart'ordine ha la forma seguente:

$$\begin{aligned} [17] \quad & a_{40} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \alpha(x) \frac{\partial}{\partial t} \right)^{(4)} u + a_{30} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \alpha(x) \frac{\partial}{\partial t} \right)^{(3)} u + \\ & + a_{20} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \alpha(x) \frac{\partial}{\partial t} \right)^{(2)} u + a_{10} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \alpha(x) \frac{\partial}{\partial t} \right) u + a_{00} u + \\ & + 6a_{40}\alpha' \left(\frac{\partial}{\partial x} + \alpha \frac{\partial}{\partial t} \right)^{(2)} \frac{\partial u}{\partial t} + 3a_{40}\alpha'^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (4a_{40}\alpha'' + a_{30}\alpha') \left(\frac{\partial}{\partial x} + \alpha \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u}{\partial t} + \\ & + (a_{40}\alpha''' + a_{30}\alpha'' + a_{20}\alpha') \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t), \end{aligned}$$

ove i simboli introdotti hanno il significato oramai classico.

Diremo le equazioni di tipo [17] *equazioni iperparaboliche* ⁽¹⁾.

Si ha per queste equazioni, ad es., il seguente teorema:

IX. Se $a_{40}(x) > 0$ e la funzione $\alpha(x)$ è tale che $T(x) = t_1 + \int_{x_1}^x \alpha(\xi) d\xi > 0, t_1 > 0$, nell'intervallo aperto I , l'unicità della soluzione, per il problema A , per le equazioni iperparaboliche, è assicurata non appena che l'unità non si trovi tra gli autovalori del parametro μ per le equazioni

$$\begin{cases} a_{40} u^{*IV} + a_{30} u^{*III} + a_{20} u^{*II} + a_{10} u^{*I} + a_{00} u^* = 0, \\ u^*(x_1) = u^*(x_2) = u^{*'}(x_1) = u^{*'}(x_2) = 0. \end{cases}$$

⁽¹⁾ Si osservi la forma delle equazioni iperparaboliche per $\alpha = \text{cost}$, nel qual caso anche la generalizzazione del teor. IX per l'equazione [1] è immediata.

Meccanica. — *Sopra il teorema del minimo lavoro per corpi non perfettamente elastici.* Nota ⁽¹⁾ di P. LOCATELLI, presentata dall'Accademico C. SOMIGLIANA.

La scienza delle costruzioni va chiedendo in questi ultimi anni nuovi aiuti alla teoria dell'elasticità. Hanno notato i costruttori che tipi di strutture notevoli per dimensioni e per sforzi non trovano in una visione strettamente elastica spiegazione soddisfacente del loro comportamento; hanno visto come in molti casi la natura intervenga con correttivi provvidenziali a smorzare, nelle costruzioni sanamente concepite, esasperazioni e singolarità di sforzi che si verificherebbero invece se si realizzasse il regime elastico supposto dalla teoria.

Sono fondamentali in materia gli scritti del DANUSSO e del COLONNETTI ⁽²⁾.

Posta così la necessità di uscire dall'ipotesi di un comportamento rigorosamente elastico della materia, ossia dall'ipotesi di una relazione lineare omogenea fra sforzi e deformazioni, si affaccia il problema di costruire una nuova teoria dell'elasticità che parta da un più complesso legame sforzi-deformazioni, che si occupi cioè di continui non elastici nel senso classico della parola. Compito ben arduo alla risoluzione del quale mirano i lavori di molti studiosi ⁽³⁾.

Orbene, può venir fatto di essere indotti ad estendere anche ai casi non elastici taluni dei risultati della teoria dell'elasticità e penso quindi sia opera non del tutto inutile il chiedersi quali dei capisaldi cui è d'abitudine attaccarsi regga ancora quando sia demolito il castello della semplice linearità fra sforzi e deformazioni.

⁽¹⁾ Pervenuta all'Accademia il 30 giugno 1939-XVII.

⁽²⁾ A. DANUSSO, « Rendiconti Seminario Matematico di Milano », 1934, vol. VIII. *Le autotensioni*; G. COLONNETTI, « Pontificia Accademia Scientiarum », 1938. *Commentationes*, Anno II, vol. II, *La statica dei corpi elastoplastici*.

⁽³⁾ Fra le estensioni dell'ordinaria teoria dell'elasticità ricordiamo le seguenti nelle quali è fondamentale il contributo italiano; la teoria delle distorsioni iniziata dal WEINGARTEN (1901) che ebbe in Italia grande sviluppo per opera soprattutto di VOLTERRA (1905), SOMIGLIANA (1908, 14, 15) COLONNETTI (1915-18); la teoria dell'ereditarietà elastica, opera di VOLTERRA (1909); l'estensione di SOMIGLIANA (1910) in cui l'energia elastica dipende anche dalle componenti di rotazione; la teoria delle deformazioni finite di ALMANI (1911).

Fra questi capisaldi tiene un posto d'onore il teorema di MENABREA ⁽¹⁾, con le ben note precisazioni dovute a COLONNETTI ⁽²⁾.

Sussisterà ancora un teorema di MENABREA, sia pure spogliato del significato di minimo di una energia potenziale e ridotto a quello di minimo di un lavoro di deformazione (sempre con le ricordate precisazioni e restrizioni di COLONNETTI) quando gli sforzi e le deformazioni non siano fra loro legati in modo lineare omogeneo? Perchè ciò sia a quali condizioni devono sottostare la natura elastica del corpo e la deformazione?

A queste domande vuol rispondere lo studio che segue, nel quale, a costo di ripetere cose ben note, ho separato al possibile i risultati intermedi, perchè risultasse chiaro ad ogni punto di quali ipotesi e dati essi risultati siano frutto.

Stabilirò, in primo luogo, un'espressiva formula variazionale valida per un continuo qualsivoglia, formula che nell'ordinario caso elastico esprime il teorema di MENABREA, ma che non può interpretarsi come principio del minimo lavoro nel caso generale. Stabilirò, in secondo luogo, le condizioni perchè una opportuna formula variazionale possa interpretarsi come principio di minimo lavoro per un sistema imperfettamente elastico. Specificherò poi queste condizioni in qualche caso particolare e darò infine due semplici esempi.

Il carattere generale dell'argomento mi ha indotto a valermi dell'algoritmo tensoriale perchè questo consente una comoda rappresentazione degli stati fisici dei corpi continui, valevole qualunque sia il numero di dimensioni della rappresentazione geometrica dei corpi, e, ciò che più importa, valevole qualunque sia la specie di coordinate prescelte. Vantaggio assai grande in quanto consente, caso per caso, l'adozione di quel sistema che più naturalmente sposa il problema affrontato ⁽³⁾.

1. *Preliminare analitico.* — Stabiliamo dapprima un semplice lemma puramente analitico che ci sarà utile in seguito.

Sia v un generico vettore di componenti controvarianti v^h e T_{ik} le componenti covarianti di un tensore doppio simmetrico, variabili

⁽¹⁾ MENABREA, Regia Accademia delle Scienze di Torino, 1857. Si veda anche DONATI, « Memorie dell'Accademia di Bologna » (1889, 1894) SIACCI, « Rend. R. Acc. dei Lincei », 1894. CERRUTI, « Rend. R. Acc. dei Lincei », 1875.

⁽²⁾ COLONNETTI, *Principii di Statica dei solidi elastici*, Pisa, 1916.

⁽³⁾ Conformemente all'uso, indicherò con indici in alto le componenti controvarianti, con indici in basso le covarianti; una lineetta verticale fra gli indici sostituirà il segno di derivazione: sarà questa la ordinaria derivazione se opereremo in un riferimento cartesiano, oppure la derivazione fatta con le opportune regole tensoriali, se il riferimento sarà più generale. Abolirò infine il segno di sommatoria tutte le volte che esso starà ad indicare una semplice saturazione.

entrambi, definiti e regolari in un volume V limitato da una superficie S .

Il tensore T_{ik} ubbidisca alle seguenti equazioni:

$$[1] \quad \text{entro } V: T_{ik}{}^{,k} = 0 \quad \text{sopra } S: T_{ik} n^k = 0$$

essendo n^k i coseni direttori della normale alla superficie rivolta verso l'interno di V . Il tensore T_{ik} abbia cioè divergenza nulla entro V e sul suo contorno S .

Si noti che ci sono ∞^3 tensori soluzione delle (1).

Grazie alla prima delle [1].

$$v^{h,k} T_{ik} = (v^h T_{ik})^k$$

e quindi per la formula di Green

$$\int_V v^{h,k} T_{ik} dV = - \int_S v^h T_{ik} n^k ds$$

e per la seconda delle [1]

$$\int_V v^{h,k} T_{ik} dV = 0$$

della quale è caso particolare la:

$$[2] \quad \int_V v^{i,k} T_{ik} dV = 0.$$

La [2] è frutto dunque di pure e semplici considerazioni analitiche.

2. *Una significativa formula integrale relativa alla statica di un continuo qualsivoglia.* — Interpretiamo v come un vettore spostamento infinitesimo dei punti di un continuo qualsivoglia e T_{ik} come un tensore di sforzo di detto continuo; tensore che, per soddisfare alle [1], deve essere il tensore di sforzo di un continuo in equilibrio, privo di forze di volume e di contorno; la [2] dice che è nullo il lavoro complessivo del tensore T_{ik} per lo spostamento v . Se in particolare il tensore T_{ik} rappresenta la variazione δp_{ik} degli sforzi connessi allo spostamento s , quando si passi da una distribuzione equilibrata di sforzi ad un'altra pure equilibrata dalle stesse forze esterne che equilibrano la prima (con che le [1] sono soddisfatte) la [2] si scriverà:

$$\int_V s^{i,k} \delta p_{ik} dV = 0$$

ed anche per la simmetria di δp_{ik}

$$[3] \quad \int_V \frac{1}{2} (s^{i,k} + s^{k,i}) \delta p_{ik} dV = 0.$$

La [3] è una espressiva relazione che vale per qualsiasi continuo. Essa però non esprime affatto il teorema di MENABREA, perchè in generale il suo primo membro *non* può interpretarsi nè come variazione di una energia elastica, nè come variazione del lavoro di deformazione.

Ho sottolineato che ad essa si giunge per via puramente analitica; essa non può quindi contenere in sè gli elementi di un teorema di minima energia o di minimo lavoro. Vale la pena di rilevare che essa può anche essere letta come una equazione di lavori virtuali, nella quale il sistema equilibrato delle δp_{ik} è stato fatto lavorare per lo spostamento s .

3. *Continui perfettamente elastici.* — Si vede subito come nel caso elastico la [3] conduca al teorema di MENABREA. Si ha infatti allora, chiamando Φ l'energia elastica che:

$$\Phi = \int_V \varphi(p_{ik}) dV$$

$$\delta \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial p_{ik}} \delta p_{ik} = -\frac{1}{2} (s^{i,k} + s^{k,i}) \delta p_{ik}$$

quindi:

$$\delta \Phi = -\frac{1}{2} \int_V (s^{i,k} + s^{k,i}) \delta p_{ik} dV$$

e per la [3]:

$$[4] \quad \delta \Phi = 0.$$

La [4] esprime precisamente il teorema di MENABREA.

4. *Continui imperfettamente elastici.* — Uscendo ora dal caso elastico, entriamo in un più vasto campo nel quale il tensore di deformazione $s^{i,k}$ sia somma di due parti:

$$\frac{1}{2} (s^{i,k} + s^{k,i}) = \xi^{ik} + \xi^{ik}$$

la prima ξ^{ik} sia legata agli sforzi come nella teoria dell'elasticità classica:

$$\xi^{ik} = C^{ikrs} p_{rs}$$

dove C^{ikrs} è il tensore elastico dipendente solo dalla natura del corpo; la seconda sia legata agli sforzi in modo tale che, se questi non superano

un limite p_{rs}^0 essa sia nulla, e sia invece diversa da zero quanto tale limite è superato; si abbia cioè:

$$[5] \quad \begin{cases} \frac{1}{2} (g^{i|k} + g^{k|i}) = \xi^{ik} + \bar{\xi}^{ik} \\ \xi^{ik} = C^{ikrs} p_{rs} \quad \bar{\xi}^{ik} = 0 \quad \text{per } p_{rs} \leq p_{rs}^0 \quad \bar{\xi}^{ik} \neq 0 \quad \text{per } p_{rs} > p_{rs}^0. \end{cases}$$

Si calcoli ora il lavoro \mathcal{Q} nel passaggio dallo stato neutro allo stato di spostamento s

$$\mathcal{Q} = \iint_V p_{ik} d g^{i|k} dV = \iint_V \left[p_{ik} d \xi^{ik} + \int p_{ik} d \bar{\xi}^{ik} \right] dV$$

Ora $p_{ik} d \xi^{ik}$ è il differenziale esatto di una funzione rappresentante l'energia elastica per unità di volume

$$p_{ik} d \xi^{ik} = - d\varphi$$

ma la stessa cosa non si può in generale dire di $p_{ik} d \bar{\xi}^{ik}$.

In generale

$$\int p_{ik} d \bar{\xi}^{ik}$$

dipenderà dal cammino percorso nel passare dallo stato neutro allo stato di spostamento s .

Si avrà dunque:

$$[6] \quad \mathcal{Q} = - \int_V \varphi dV + \iint_V p_{ik} d \bar{\xi}^{ik} dV.$$

Se si dà un incremento agli sforzi p_{ik} ossia se si passa dagli sforzi p_{ik} ai $p_{ik} + \delta p_{ik}$ avremo una variazione di lavoro

$$[7] \quad \delta \mathcal{Q} = - \int_V \delta \varphi dV + \int_V p_{ik} d \bar{\xi}^{ik} dV.$$

Ora è:

$$\delta \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial p_{ik}} \delta p_{ik} = - \xi^{ik} \delta p_{ik}$$

mentre:

$$\begin{aligned} \delta \int p_{ik} d \bar{\xi}^{ik} &= \delta \int_{p_0}^p p_{ik} \frac{\partial \bar{\xi}^{ik}}{\partial p_{rs}} dp_{rs} = \int_{p_0}^p \frac{\partial \bar{\xi}^{ik}}{\partial p_{rs}} dp_{rs} \delta p_{ik} + \int_{p_0}^p p_{ik} \frac{\partial^2 \bar{\xi}^{ik}}{\partial p_{rs} \partial p_{hl}} dp_{rs} \delta p_{hl} + \\ &+ p_{ik} \frac{\partial \bar{\xi}^{ik}}{\partial p_{rs}} \delta p_{rs} = \xi^{ik} \delta p_{ik} + p_{ik} \frac{\partial \bar{\xi}^{ik}}{\partial p_{rs}} \delta p_{rs} + \int_{p_0}^p p_{ik} \frac{\partial^2 \bar{\xi}^{ik}}{\partial p_{rs} \partial p_{hl}} dp_{rs} \delta p_{hl}. \end{aligned}$$

La [7] diventa allora quando si tenga presente la [5]:

$$\delta \mathcal{Q} = \int_V \frac{1}{2} (s^{i,k} + s^{k,i}) \delta p_{ik} dV + \int_V \left\{ p_{ik} \frac{\partial \xi^{ik}}{\partial p_{rs}} + \int_{p_0}^p p_{ik} \frac{\partial^2 \bar{\xi}^{ik}}{\partial p_{rs} \partial p_{hl}} dp_{hl} \right\} \delta p_{rs} dV.$$

Se la variazione dei p_{ik} è fatta conformemente alle [1], si ha per il lemma [3]:

$$[8] \quad \delta \mathcal{Q} = \int_V \left\{ p_{ik} \frac{\partial \xi^{ik}}{\partial p_{rs}} + \int_{p_0}^p p_{ik} \frac{\partial^2 \bar{\xi}^{ik}}{\partial p_{rs} \partial p_{hl}} dp_{hl} \right\} \delta p_{rs} dV.$$

In generale quindi la variazione dell'integrale che esprime il lavoro di deformazione, passando da sforzi equilibrati a sforzi pure equilibrati e tali da equilibrare sul contorno le stesse forze, *non è nulla*: non sussiste cioè per un generico sistema imperfettamente elastico un teorema che generalizzi nel modo più spontaneo il teorema di MENABREA; perchè questo sia, occorre che il 2° membro della [8] si annulli. Si vedrà più avanti quale veste può assumere questa condizione.

5. *Casi particolari per i quali sussiste un teorema di minimo lavoro.* — Sulla scorta delle [8], si può vedere qualche caso per il quale sussiste ancora un teorema di minimo lavoro che generalizzi in modo spontaneo (riferendolo però ad una funzione « lavoro di deformazione » e non ad una energia potenziale elastica) il teorema di Menabrea.

I) Si vede intanto che se $\bar{\xi}^{ik} = 0$ ossia se si è in un caso perfettamente elastico, $\delta \mathcal{Q} = 0$, e per essere allora anche:

$$\delta \mathcal{Q} = - \delta \Phi$$

si ha in pieno il teorema di MENABREA.

II) Se la deformazione $\bar{\xi}^{ik}$ non dipende da p_{rs} la [8] fornisce ancora $\delta \mathcal{Q} = 0$.

È questo il caso dei sistemi elasto plastici di COLONNETTI; per essi dunque, come il COLONNETTI afferma ⁽¹⁾, vale il teorema di MENABREA generalizzato, nel quale si spogli l'integrale \mathcal{Q} del significato di energia elastica.

III) Se il legame fra ξ^{ik} e p_{rs} è *lineare e non omogeneo*, sussiste ancora il teorema di MENABREA generalizzato, purchè sia soddisfatta una opportuna condizione.

Sia infatti

$$\xi^{ik} = \alpha^{ik} + \bar{O}^{ikrs} p_{rs}$$

⁽¹⁾ COLONNETTI, loc. cit.

e sia soddisfatta la

$$\bar{C}^{ikrs} p_{ik} = v^r s + w^s r$$

dove v e w sono vettori arbitrari.

Dalla [8] scende

$$\delta \Omega = \int_V \bar{C}^{ikrs} p_{ik} \delta p_{rs} dV = \int_V (v^r s + w^s r) \delta p_{rs} dV$$

e per la [2]

$$\delta \Omega = 0.$$

IV) In generale in base alla [8] si può dire che sussiste il teorema di MENABREA generalizzato quando il termine che nella [8] figura tra le { } sia la derivata spaziale di un vettore, quando cioè sia

$$p_{ik} \frac{\partial \bar{\xi}^{ik}}{\partial p_{rs}} + \int_{p_0}^p p_{ik} \frac{\partial^2 \bar{\xi}^{ik}}{\partial p_{hl} \partial p_{rs}} dp_{hl} = v^r s$$

ossia

$$\left(p_{ik} \frac{\partial \xi^{ik}}{\partial p_{rs}} + \int_{p_0}^p p_{ik} \frac{\partial^2 \xi^{ik}}{\partial p_{hl} \partial p_{rs}} dp_{hl} \right)^t = \left(p_{ik} \frac{\partial \xi^{ik}}{\partial p_{rt}} + \int_{p_0}^p p_{ik} \frac{\partial^2 \xi^{ik}}{\partial p_{hl} \partial p_{rt}} dp_{hl} \right)^s.$$

A queste espressioni si può dare sapore ulteriormente generale involgendo in esse non un solo vettore arbitrario, ma due scrivendo:

$$p_{ik} \frac{\partial \bar{\xi}^{ik}}{\partial p_{rs}} + \int_{p_0}^p p_{ik} \frac{\partial^2 \bar{\xi}^{ik}}{\partial p_{hl} \partial p_{rs}} dp_{hl} = v^r s + w^s r.$$

6. *Esempi.* — Le precedenti considerazioni possono essere verificate numericamente in modo molto semplice su qualche esempio schematico.

I) Si consideri un'asta rigida orizzontale appesa a tre molle verticali A , B , A , d'uguale lunghezza l e gravata da un carico P . Il sistema sia staticamente e geometricamente simmetrico rispetto all'asse verticale della molla B . Rispondano le molle alle seguenti caratteristiche:

$$\varepsilon_a = a + k_a F_a \quad \varepsilon_b = b + k_b F_b$$

nelle quali l'indice a si riferisce alle due molle uguali A , l'indice b alla molla mediana B ; ε sia l'allungamento della molla sotto l'azione della forza F ; a , b , due costanti caratterizzanti un allungamento unitario della molla indipendente dalla forza F e che si verifica dopo l'applicazione della F stessa. Si tratta di un sistema alla Colonnetti.

L'equilibrio del sistema è retto dalle:

$$2 F_a + F_b = P \quad a + k_a F_a = b + k_b F_b.$$

Calcoliamo ora il lavoro di deformazione; esso vale:

$$\mathcal{Q} = \left[2 F_a \left(a + \frac{1}{2} k_a F_a \right) + F_b \left(b + \frac{1}{2} k_b F_b \right) \right] l$$

e per una variazione delle F

$$\delta \mathcal{Q} = \left[2 \left(a + \frac{1}{2} k_a F_a \right) + k_a F_a \right] l \delta F_a + \left[b + \frac{1}{2} k_b F_b + \frac{1}{2} k_b F_b \right] l \delta F_b.$$

Se la variazione delle F è equilibrata, ossia:

$$2 \delta F_a = - \delta F_b$$

Si ha:

$$\delta \mathcal{Q} = 0$$

conformemente a quanto è stato detto a proposito del caso II) del n. 5.

II) Riprendiamo lo stesso sistema, ma poniamo ora:

$$\varepsilon_a = k_a F_a + h_a F_a^i \quad \varepsilon_b = k_b F_b + h_b F_b^i.$$

Lo schema corrisponde ad un particolare sistema non perfettamente elastico per colpa dei termini cubici, che correggono il termine lineare dell'ordinaria elasticità.

Avremo:

$$[9] \quad 2 F_a + F_b = P \quad k_a F_a + h_a F_a^i = h_b F_b + h_b F_b^3.$$

Il lavoro di deformazione vale:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= \left[2 \int_0^{F_a} F_a d\varepsilon_a + \int_0^{F_b} F_b d\varepsilon_b \right] l = \left[2 \int_0^{F_a} F_a (k_a + 3 h_a F_a^2) dF_a + \right. \\ &+ \left. \int_0^{F_b} F_b (k_b + 3 h_b F_b^2) dF_b \right] l = 2 \left[\frac{1}{2} k_a F_a^2 + \frac{3}{4} k_a F_a^4 \right] l + \left[\frac{1}{2} k_b F_b^2 + \frac{3}{4} k_b F_b^4 \right] l. \end{aligned}$$

Ne segue:

$$\delta \mathcal{Q} = 2 [k_a F_a + 3 h_a F_a^3] l \delta F_a + [k_b F_b + 3 h_b F_b^3] l \delta F_b.$$

Se la variazione di forze è equilibrata:

$$2 \delta F_a = - \delta F_b$$

per cui:

$$\delta Q = 2 [k_a F'_a + 3 \bar{h}_a F''_a - k_b F'_b - 3 \bar{h}_b F''_b] \delta F_a$$

e tenendo conto della [9]:

$$\delta Q = 4 [\bar{h}_a F''_a - \bar{h}_b F''_b] \delta F_a.$$

Il termine tra [] è in generale non nullo; perchè sia tale dovrebbe essere per la [9]

$$k_a F'_a = k_b F'_b$$

ossia:

$$[10] \quad \bar{h}_a k_b^3 = \bar{h}_b k_a^3$$

in altre parole le caratteristiche delle molle dovrebbero rispettare una condizione restrittiva.

Questo semplice esempio mostra dunque come, per un sistema non perfettamente elastico non sussista sempre il teorema di minimo lavoro che generalizzi nel modo più spontaneo il teorema di MENABREA dei sistemi elastici. La condizione generale perchè il primo teorema sussista è espressa, ripetiamolo, dall'annullarsi del secondo membro della [8] e questa condizione nell'esempio ora considerato si riduce semplicemente alla relazione [10] fra le caratteristiche elastiche del sistema.

Meccanica. — *Su alcune relazioni fra le proprietà geometriche di una V_n e la dinamica delle particelle.* Nota ⁽¹⁾ di P. CALDIROLA, presentata dall'Aggregato U. CISOTTI.

1. È noto che nella meccanica relativistica le equazioni di un punto materiale in un campo gravitazionale si ottengono sia mediante la generalizzazione della teoria di HAMILTON-JACOBI, sia semplicemente esprimendo che la traiettoria del punto è una geodetica della varietà V_4 (spazio-tempo). Le equazioni di HAMILTON e quelle equivalenti di JACOBI si possono pertanto considerare come equazioni delle geodetiche di una V_4 . Non è quindi privo di interesse l'approfondire dal punto di vista geometrico il legame fra le equazioni delle geodetiche sotto la forma normale e la teoria relativistica di HAMILTON-JACOBI. Nelle nostre considerazioni ci riferiremo a una V_n qualsiasi, caratterizzata quindi dalla forma fondamentale:

$$[1] \quad ds^2 = a_{ik} dx_i dx_k.$$

Daremo poi l'interpretazione meccanica dei risultati a cui perverremo e ne faremo qualche applicazione alla descrizione del moto di una particella dotata di carica elettrica e di momento di spin.

Osserviamo anzitutto che le equazioni delle geodetiche:

$$[2] \quad x_i + \left\{ \begin{matrix} k & l \\ i \end{matrix} \right\} \dot{x}_k \dot{x}_l = 0$$

si possono scrivere, introducendo i momenti λ_i della congruenza di linee geodetiche, sotto la forma:

$$[3] \quad \lambda_{il} \lambda^l = 0.$$

Per di più varrà la solita relazione di normalizzazione dei coseni direttori:

$$[4] \quad \lambda^i \lambda_i = 1$$

onde:

$$[5] \quad \lambda^i \lambda_{ik} = 0.$$

(¹) Pervenuta all'Accademia il 10 luglio 1939-XVII.

Inoltre i parametri di una geodetica godono la proprietà dell'inversione delle derivate ⁽¹⁾:

$$[6] \quad \lambda_{ik} = \lambda_{ki}$$

per cui:

$$[7] \quad \lambda_i = (\text{grad } f)_{\lambda_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Si noti che la [5] e la [7] si possono assumere come equazioni delle geodetiche: infatti valendo la [7] sarà soddisfatta la [6] per cui la [5], che si deduce dalla [4], è identica alla [3]. Per la [7], l'equazione delle geodetiche si può dunque scrivere:

$$[8] \quad a^{ik} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_k} - 1 = 0.$$

Introducendo, invece di f la funzione:

$$f_0 = -\frac{1}{2} s + f,$$

questa prende la forma:

$$[8'] \quad \frac{1}{2} a^{ik} \frac{\partial f_0}{\partial x_i} \frac{\partial f_0}{\partial x_k} + \frac{\partial f_0}{\partial s} = 0$$

e ad essa si può far corrispondere il sistema:

$$[9] \quad \frac{dx_i}{ds} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_i}, \quad \frac{d\lambda_i}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$$

essendo:

$$[10] \quad H = \frac{1}{2} a^{ik} \lambda_i \lambda_k = \frac{1}{2}.$$

L'equazione [8'] non essendo omogenea, la si può rendere tale con l'introduzione di una nuova variabile x_0 e di una nuova funzione χ definita dalla:

$$\chi(x_1, \dots, x_n, x_0) = f(x_1, \dots, x_n) - x_0.$$

La [8] si può allora scrivere nel modo seguente:

$$[8''] \quad a^{ik} \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \frac{\partial \chi}{\partial x_k} - \left(\frac{\partial \chi}{\partial x_0} \right)^2 = 0.$$

⁽¹⁾ T. LEVI-CIVITA, *Calc. Diff. Ass.*, Cap. X, 1.

Per interpretare geometricamente quanto abbiamo fatto, premettiamo alcune considerazioni relative alle geodetiche di lunghezza nulla (linee per cui: $ds^2 = 0$). Per tali linee si ha (1):

$$H = \frac{1}{2} a^{ik} \lambda_i \lambda_k = \frac{1}{2} \lambda^i \lambda_i = 0$$

e la [8] si riduce a:

$$a^{ik} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0.$$

La [8''] appare pertanto come l'equazione delle geodetiche nulle di una V_{n+1} del tipo:

$$ds^2 = \sum_{i,k}^n a_{ik} dx_i dx_k - dx_0^2.$$

Possiamo quindi concludere: « data una geodetica qualsiasi di una varietà V_n è sempre possibile trovare una particolare V_{n+1} tale che la geodetica considerata è la proiezione su V_n di una geodetica nulla di V_{n+1} ».

2. Cercheremo ora di dare l'interpretazione meccanica dei risultati precedenti. Ci porremo anzitutto in una V_4 (spazio-tempo). La [10]; introducendo il tetravettore della velocità $u_k = \lambda_k$ diviene la funzione Hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2} g^{ik} u_i u_k = \frac{1}{2} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

per cui le [9] si riducono alle ordinarie equazioni di HAMILTON e le [8], [8'], [8''] a note forme generalizzate della equazione di JACOBI. Si noti che le componenti della velocità \vec{v} nello spazio geometrico (x_1, x_2, x_3) sono legate alle componenti u^i della tetravelocità nello spazio-tempo dalle relazioni:

$$v^i = \frac{u^i}{u^4}.$$

Da esse si ricavano immediatamente le componenti dell'impulso: $p_i = -\mu_0 c u_i$.

La [8''] è ora l'equazione delle geodetiche nulle della V_5 caratterizzata da:

$$ds^2 = g_{ik} dx_i dx_k - dx_5^2.$$

Per dare una interpretazione meccanica a questa equazione, cominciamo dallo studiare la propagazione di un raggio luminoso nel vuoto.

(1) T. LEVI-CIVITA, *Meccan. Relat.*, 1928, pag. 214.

Questo descrive una geodetica (retta) della V_3 (spazio). Per il teorema dimostrato detta geodetica può considerarsi come la proiezione su la V_3 di una geodetica di lunghezza nulla di una particolare V_4 :

$$ds^2 = \sum_1^3 dx_i^2 - dx_0^2.$$

Questo fatto costituisce la nota proprietà dei raggi luminosi della teoria di EINSTEIN. Le geodetiche non nulle di questa varietà descriveranno il moto di una particella dotata di una ulteriore grandezza fisica che non i fotoni: esse descrivono infatti il moto dei corpuscoli dotati di una massa materiale μ_0 . A sua volta una geodetica non nulla della V_4 caratterizzata dal:

$$ds^2 = \sum_1^3 dx_i^2 - dx_0^2,$$

può considerarsi come la proiezione di una geodetica nulla della V_5 :

$$ds^2 = \sum_1^3 dx_i^2 - dx_0^2 - dx_5^2.$$

Il moto di una particella materiale può quindi essere rappresentato da una geodetica nulla di tale V_5 . Questa proprietà è stata notata da FISCHER ⁽¹⁾ come conseguenza della teoria unitaria di Kaluza-Klein, secondo cui materia e campo elettromagnetico determinano i coefficienti γ_{ik} di una V_5 :

$$ds^2 = \gamma_{ik} dx_i dx_k \quad (i, k = 1, \dots, 5),$$

le cui geodetiche sono le traiettorie di un corpuscolo elettrizzato in un campo elettromagnetico e gravitazionale. Circa il significato fisico della quinta coordinata, FLINT e WILSON ⁽²⁾ suppongono che il momento p_5 coniugato a x_5 sia proporzionale alla carica del corpuscolo. Nel caso di una varietà pseudo-euclidea:

$$ds^2 = \sum_1^4 dx_i^2 + k_e dx_e^2$$

si deduce immediatamente:

$$\frac{E^2}{c^4} - \frac{p^2}{c^2} = M^2 = \mu_0^2 - \frac{p_e^2}{k_e c^2} \quad , \quad (p^2 = p_{x_1}^2 + p_{x_2}^2 + p_{x_3}^2)$$

che si interpreta dicendo che la massa della particella è la somma della massa materiale e di quella elettrica. Una particella materiale carica elet-

⁽¹⁾ W. FISCHER, « Proc. Roy. Soc. ». A 123, 1929, pag. 489.

⁽²⁾ W. WILSON, J. CATTERMOLLE, « Philos. Magaz. », 180, 1939, pag. 86.

tricamente descrive dunque nel suo moto una geodetica di una V_3 , che pel solito teorema potremo considerare come proiezione di una geodetica nulla di una V_6 . Ci si domanda ora se le geodetiche di V_6 hanno o no un significato fisico. Proca e Goudsmit ⁽¹⁾ limitandosi alla considerazione di una V_6 pseudo-euclidea:

$$ds^2 = \sum_1^4 dx_i^2 + k_e dx_e^2 + k_s dx_s^2,$$

supponendo che il momento p_s coniugato a x_s sia proporzionale al momento di spin:

$$\sqrt{s(s+1)} S,$$

ritengono che essa descriva le proprietà dinamiche di una particella materiale carica e dotata di spin. Per essa si ha:

$$\frac{E^2}{c^4} - \frac{p^2}{c^2} = M^2 = \mu_0^2 - s(s+1) \frac{S^2}{k_s c^2} - \frac{p_e^2}{k_e c^2},$$

che afferma essere la massa totale di una particella la somma di una massa materiale, di una elettrica e di una di spin. In base a questa interpretazione, attribuendo all'elettrone una massa puramente elettrica e di spin e assumendo come massa materiale della particella elementare una massa intermedia fra quella del protone e quella del neutrone, essi deducono la massa del mesotrone di YUKAWA ottenendo il valore molto plausibile di 100 volte la massa dell'elettrone. Per di più questa teoria introduce in modo invariante la lunghezza minima critica della meccanica quantistica.

Si noti che il procedimento seguito, che consiste nel descrivere le proprietà di una particella in successive V_n si può estendere indefinitamente, supponendo la particella dotata di un numero sempre crescente di « gradi di libertà ». Le varie V_n considerate si possono interpretare come sezioni di uno spazio a N dimensioni analogo a quello delle fasi in cui si ritiene descrivibile il moto della particella dotata di N gradi di libertà. L'equazione della traiettoria di tale particella nel vuoto sarà allora:

$$\sum_1^N \left(\frac{\partial S_0}{\partial x_i} \right)^2 - 1 = 0$$

a cui, nella meccanica quantistica, corrisponde l'equazione ondulatoria:

$$\sum_1^N \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} + \frac{4\pi^2 \mu_0^2 c^2}{h^2} \psi = 0.$$

⁽¹⁾ A. PROCA, S. GOUDSMIT, « C. R. Ac. France », 12, 1939, pag. 884.

Astronomia. — Orbita del Pianeta 1938 OB ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾
di M. CIMINO, presentata dall'Aggregato G. ARMELLINI.

1. *Osservazioni.* Il Pianeta 1938 O B fu scoperto fotograficamente ad Heidelberg la sera del 28 luglio 1938, e fu osservato, sempre fotograficamente e nello stesso luogo, fino al 10 dicembre dello stesso anno. Nella Tabella I riporto i dati riguardanti tutte le osservazioni eseguite, quali mi furono cortesemente comunicati dal prof. G. STRACKE dell'*Astronomisches Rechen-Institut* di Berlino.

TABELLA I.

N.	Data	T. U.	$\alpha_{1938.0}$	$\delta_{1938.0}$	Osservatorio
1 ⁽¹⁾	Luglio 28 . .	0 ^h 13 ^m . 5	22 ^h 17 ^m 47 ^s . 11	— 4° 20' 24''.7	Heidelberg
2	Agosto 4 . .	0 19 . 6	22 13 20. 69	4 14 3 . 7	»
3	» 19 . .	22 44 . 2	22 0 47. 98	4 20 12 . 5	»
4	Settembre 1	23 35 . 2	21 49 58. 77	4 40 50 . 8	»
5	» 17	21 24 . 0	21 39 35. 02	5 4 33 . 9	»
6	» 22	20 8 . 4	21 37 4 . 53	5 19 38 . 0	»
7	» 22	20 54 . 4	21 37 3 . 70	5 19 41 . 2	»
8	Novembre 11	17 31 . 8	21 47 26 . 01	4 55 32 . 8	»
9	» 11	18 17 . 3	21 47 27 . 49	4 55 26 . 1	»
10	Dicembre 10	17 24 . 6	22 15 44 . 40	2 49 25 . 1	»
1	» 10	18 14 . 1	22 15 46 . 75	2 49 13 . 1	»

(1) Misura estremamente difficile perchè sull'orlo della lastra.

Misure eseguite da K. Reinmuth.

Un sommario esame di queste posizioni mostra subito che il Pianeta, movendosi sulla sfera celeste in un primo tempo di moto retrogrado e in un secondo tempo di moto diretto, vi descrive una traiettoria a forma di « cappio », le cui posizioni estreme non sono molto distanti tra loro ($1^{\circ} 30''$ circa). Come si vedrà meglio in seguito, questa configurazione delle osser-

(¹) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo, a cura del R. Osservatorio Astronomico di Roma su Monte Mario.

(²) Pervenuta all'Accademia il 19 giugno 1939-XVII.

vazioni poco si presterà per il calcolo di una buona orbita con tre osservazioni. Si noterà pure che le osservazioni 6 e 7, 8 e 9, 10 e 11 formano tre coppie di osservazioni molto vicine, talchè sarà sempre lecito sostituire ad esse tre luoghi medi, che per brevità di scrittura indicherò con 6 + 7, 8 + 9, 10 + 11. Il calcolo mostrerà che l'osservazione 1 è poco precisa (come era prevedibile), mentre la 5 deve ritenersi del tutto errata. Per il resto, essendo le osservazioni distribuite su un intervallo di oltre quattro mesi, ne risulta la possibilità di calcolare un'orbita suscettibile di essere numerata ⁽¹⁾.

2. — *Orbita preliminare.* Il calcolo di un'orbita *preliminare provvisoria* è sempre molto utile, sia per il successivo calcolo di una seconda orbita, sia per saggiare la precisione delle osservazioni, le quali, per essere nel caso presente piuttosto distanziate tra loro, non potevano esserlo altrimenti in modo soddisfacente. Per tale calcolo ho scelto come posizioni base le 2, 4 e 6 + 7, che hanno condotto rapidamente allo scopo essendo gli intervalli di tempo tra le tre posizioni non troppo grandi; il metodo adottato fu quello di VEITHEN-MERTON ⁽²⁾, con calcolo a 6 decimali. Dopo le necessarie riduzioni sui dati, e tenendo conto del tempo di aberrazione (in modo approssimato) fin dalla prima approssimazione, il calcolo rimaneva praticamente fermo già alla seconda; una terza approssimazione fu fatta solo per sicurezza. Riporto le tre distanze geocentriche Δ e quelle eliocentriche r ottenute, e sulle quali fu basato il calcolo degli elementi ellittici che seguono:

$$[1] \quad \begin{cases} \Delta_2 = 1.717\,506 & ; & \Delta_4 = 1.680\,302 & ; & \Delta_{6+7} = 1.787\,227 \\ r_2 = 2.678\,291 & ; & r_4 = 2.672\,131 & ; & r_{6+7} = 2.670\,215 \end{cases}$$

Elementi ellittici provvisori.

Epoca ed osculazione: 1938 settembre 2.0 T. U.

$$\begin{array}{lll} M_0 = 354^\circ.5434 & \omega = 40^\circ.8451 & \\ \varphi = 6^\circ.7842 & \Omega = 298^\circ.5827 & \left. \begin{array}{l} \text{Eclittica} \\ 1938.0 \end{array} \right\} \\ \mu = 673''.498 & i = 8^\circ.9740 & \end{array}$$

$$0 - e : \cos \delta_2 \, d\alpha_2 = -0''.1 \quad ; \quad d\delta_2 = -0''.2.$$

⁽¹⁾ È noto che il *Copernicus-Institut* di Berlino «numera» le orbite dei nuovi piccoli pianeti solo se le osservazioni nella stessa opposizione oltre che essere distribuite su un intervallo di tempo non troppo piccolo, sono tutte (eccetto quelle palesemente erronee) rappresentate sull'orbita a meno di $\pm 5''$.

⁽²⁾ Per questo metodo, derivato sostanzialmente da quello classico di GAUSS ed appositamente studiato per il calcolo a macchina, cfr. ad es. G. STRACKE, *Bahnbestimmung der Planeten und Kometen*, Berlin, 1929, pag. 75.

3. — *Discussione dell'orbita preliminare.* Ecco pertanto la rappresentazione delle osservazioni sull'orbita preliminare (posizioni osservate *meno* quelle calcolate):

TABELLA II.

N.	$\cos \delta \cdot d\alpha$	$d\delta$	N.	$\cos \delta \cdot d\alpha$	$d\delta$
1	— 4'' .9	+ 8'' .0	6	— 0'' .2	— 0'' .1
2	— 0 .1	— 0 .1	7	— 0 .3	— 0 .2
3	— 1 .2	+ 2 .0	8	+ 46 .7	+ 0 .3
4	— 0 .3	— 0 .2	9	+ 48 .0	+ 1 .7
5	+ 3' 14'' .7	+ 6' 42'' .5	10	+ 1' 26 .3	+ 9 .1
			11	+ 1 26 .0	+ 9 .2

L'esame di questa tabella mostra che le osservazioni base del calcolo (2, 4 e 6 + 7) sono tutte rappresentate nei limiti dell'errore di un calcolo a 6 decimali. La rappresentazione dell'osservazione 3 (intermedia tra la 1^a e la 2^a posizione) prova pure che l'approssimazione tenuta nel calcolo fu più che sufficiente, mentre *le osservazioni 1 e 5 sono l'una poco esatta e l'altra grossolanamente errata*, come sarà del resto confermato nel seguito. Rimangono le osservazioni 8, 9, 10 e 11, che, trovandosi ad oltre uno e due mesi di distanza fuori dall'intervallo compreso tra le posizioni estreme, presentano scarti considerevoli dalle posizioni calcolate. Tali divari non vanno però attribuiti ad insufficiente approssimazione nel calcolo eseguito; come ora sarà dimostrato, essi dipendono invece dall'errore relativo che si commette nella determinazione delle distanze geocentriche, la cui grandezza a sua volta è legata alla reciproca posizione delle tre osservazioni scelte come base. Queste, venendo a trovarsi nel caso presente quasi su uno stesso cerchio massimo, non consentono una determinazione sufficientemente precisa delle distanze geocentriche.

Seguendo il von OPPOLZER ⁽¹⁾ (con qualche facile modifica in quelle dimostrazioni, derivanti dal fatto che ci si riferisce a coordinate equatoriali anziché eclitticali), l'errore relativo col quale restano determinate le distanze geocentriche è sostanzialmente dello stesso ordine di grandezza di quello col quale resta determinato il determinante delle equazioni fondamentali di GAUSS. Indicando con D' questo determinante ⁽²⁾ e con

⁽¹⁾ Cfr. T. von OPPOLZER, *Traité de la détermination des Orbites des Comètes et des Planètes*, Paris, 1868, pp. 375-378.

⁽²⁾ Seguo l'uso di accentuare con un apice le varie grandezze (coordinate, elementi ellittici, ecc. ecc.) quando il piano di riferimento scelto sia l'equatore anziché l'eclittica. Il D' introdotto è il $-K$ usato dal von OPPOLZER nel loc. cit.

u_1 ed u_3 le distanze angolari delle posizioni estreme contate sul cerchio massimo passante per esse a partire dal nodo ascendente di tale cerchio sull'equatore, e con p_2 la perpendicolare sferica abbassata dalla posizione intermedia su detto gran cerchio, si ha:

$$D' = -\operatorname{sen}(u_3 - u_1) \cdot \operatorname{sen} p_2$$

e quindi, differenziando e dividendo per D' stesso:

$$\frac{dD'}{D'} = \frac{d(u_3 - u_1)}{\operatorname{sen}(u_3 - u_1)} \cdot \cos(u_3 - u_1) + \frac{dp_2}{\operatorname{sen} p_2} \cdot \cos p_2$$

la quale mostra come l'errore relativo di D' (e quindi delle Δ) sia legato alla reciproca posizione delle tre osservazioni base. Ora, nel caso delle prime orbite $u_3 - u_1$ e p_2 sono quantità sempre piccole, mentre nelle osservazioni dei piccoli pianeti si può ammettere un errore massimo nelle posizioni osservate dell'ordine di $\pm 5''$; ammettendo allora un tale errore come possibile anche nelle quantità $u_3 - u_1$ e p_2 , e ponendo $\cos(u_3 - u_1) = \cos p_2 = 1$, si avrà:

$$[2] \quad \frac{dD'}{D'} \simeq \frac{\operatorname{sen} 5''}{\operatorname{sen}(u_3 - u_1)} + \frac{\operatorname{sen} 5''}{\operatorname{sen} p_2}.$$

In generale però $\operatorname{sen} p_2$ è quantità di ordine di infinitesimo superiore a quello di $\operatorname{sen}(u_3 - u_1)$ rispetto agli archi geocentrici descritti dal pianeta; si ha allora:

$$[2'] \quad \frac{dD'}{D'} \simeq \frac{\operatorname{sen} 5''}{\operatorname{sen} p_2}.$$

Ma può accadere che in casi particolari, - e tra questi vi è quello in cui il pianeta descrive un «cappio» -, sia invece $\operatorname{sen}(u_3 - u_1)$ di un ordine di infinitesimo superiore a quello di $\operatorname{sen} p_2$; in tale caso l'errore relativo di D' sarà valutato dalla:

$$[2''] \quad \frac{dD'}{D'} \simeq \frac{\operatorname{sen} 5''}{\operatorname{sen}(u_3 - u_1)}.$$

Ora, tornando all'orbita preliminare calcolata, si ha:

$$\operatorname{sen}(u_3 - u_1) = -0.158 \quad ; \quad \operatorname{sen} p_2 = +0.004.$$

La piccolezza di p_2 conferma che le tre osservazioni sono situate quasi su uno stesso cerchio massimo, e l'errore relativo di D' sarà, applicando la (2'):

$$\left| \frac{dD'}{D'} \right| \simeq 0.005.$$

Questo è anche l'errore relativo che si prevede nella determinazione delle Δ . Di ciò si ha la conferma poichè dall'orbita che sarà in seguito calcolata le distanze geocentriche per le osservazioni estreme 2 e 6 + 7 risultano:

$$\Delta_2 = 1.714\,573 \quad ; \quad \Delta_{6+7} = 1.784\,287$$

con divario dalle [1] contenuto nei limiti dell'errore previsto. D'altra parte determinando degli elementi ellittici con queste ultime distanze, *tutte le osservazioni* (escluse le errate) *sono ben rappresentate* su tale orbita; ne consegue che i divari della Tabella II dipendono dagli errori relativi delle Δ e quindi, in definitiva, dalla sfavorevole posizione reciproca delle tre osservazioni base.

4. — *Miglioramento dell'orbita preliminare.* A questo punto due vie si presentavano al calcolatore per ottenere un'orbita atta a ben rappresentare tutte le osservazioni; la prima, e la più naturale, era quella di determinare una seconda orbita prendendo per base le osservazioni 2, 6 + 7, 10 + 11, mentre le rimanenti osservazioni, cadendo tutte fra le estreme, avrebbero fornito un ottimo mezzo per saggiare la precisione raggiunta dal calcolo. Questo era poi facilitato dalla conoscenza di un'orbita provvisoria. L'altra via era quella di migliorare l'orbita già ottenuta con uno dei vari metodi atti allo scopo, per esempio con quello della variazione delle distanze geocentriche. Ed è questa la via che ho seguito, sia perchè in pratica non più lunga della prima, sia principalmente perchè la prima risultò, nel presente caso, poco proficua a causa della vicinanza delle due posizioni estreme, avendo il pianeta con la sua traiettoria sulla sfera celeste descritto un « cappio ». Valutando infatti l'errore relativo nella determinazione delle distanze geocentriche si ha:

$$\text{sen}(u_3 - u_1) = +0.026 \quad ; \quad \text{sen } p_2 = +0.149$$

e quindi, applicando questa volta la [2'']:

$$\left| \frac{dI'}{I'} \right| \simeq 0.001$$

errore relativo ancora grande per un'orbita da numerare ⁽¹⁾.

(1) A titolo di prova ho voluto eseguire il calcolo della nuova orbita, sempre col metodo di VEITHEN-MERTON; alla terza approssimazione (per maggiore sicurezza ho in seguito effettuato altre due approssimazioni con un decimale di più nel calcolo; il risultato fu praticamente lo stesso) ottenni per le distanze geocentriche alle tre date di osservazione stabilite:

$$[3] \quad \Delta_2 = 1.711\,63\,9 \quad ; \quad \Delta_{6+7} = 1.784\,238 \quad ; \quad \Delta_{10+11} = 2.729\,638$$

mentre le stesse sull'orbita che rappresenta bene tutte le osservazioni sono date dalle [5] che figurano più avanti. L'errore relativo nelle Δ è pertanto di poco supe-

D'altra parte la scelta di tre, o anche di quattro, osservazioni diverse da quelle fin'ora considerate sarebbe stata poco pratica per il calcolo dell'orbita, anche perchè sarebbe mancato un numero sufficiente di osservazioni comprese tra le estreme atte a saggiare la precisione dell'orbita così ottenuta. Scelto invece come assai pratico e non lungo il metodo della variazione delle distanze geocentriche ⁽¹⁾, ho assunto le 2 e 6 + 7 come posizioni base e le 8 + 9 e 10 + 11 come posizioni di miglioramento. Si ottennero così per le Δ_2 e Δ_{6+7} date dalle [1] le seguenti correzioni rispettivamente:

$$x = -0.002\,892 \quad ; \quad y = -0.002\,898$$

e quindi i seguenti:

Elementi ellittici migliorati.

Epoca ed osculazione: 1938 ottobre 9.0 T.U.

$$\left. \begin{array}{ll} M_0 = 1^{\circ}.53195 & \omega = 40^{\circ}.8198 \\ \varphi = 6^{\circ}.8153 & \Omega = 298^{\circ}.5399 \\ \mu = 673''.9405 & i = 8^{\circ}.9582 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Ellittica} \\ 1938.0 \end{array}$$

con la seguente rappresentazione per le osservazioni ($\alpha - c$):

TABELLA III.

N.	$\cos \delta \cdot d\alpha$	$d\delta$	N.	$\cos \delta \cdot d\alpha$	$d\delta$
1	- 4''.4	+ 9''.7	6	+ 0''.7	+ 0''.5
2	+ 0 .1	+ 0 .3	7	+ 0 .5	+ 0 .2
3	+ 1 .0	+ 1 .0	8	+ 0 .8	- 5 .0
4	+ 3 .6	- 0 .9	9	+ 2 .3	- 3 .8
5	+ 3' 17''.2	+ 6' 42''.9	10	+ 3 .2	- 6 .3
			11	+ 3 .1	- 6 .1

riore al previsto. Ho infine voluto provare a dare alla posizione 10 + 11 una piccola variazione ($-3''$ in α , $+6''$ in δ) ed ho ottenuto:

$$[4] \quad \Delta_2 = 1.714\,6 \quad ; \quad \Delta_{6+7} = 1.784\,4 \quad ; \quad \Delta_{10+11} = 2.725\,2$$

ciò che conferma come le osservazioni siano in posizione tale (cappio) che una piccola variazione nella posizione di una di esse può alterare notevolmente le Δ . La rappresentazione delle osservazioni sull'orbita dedotta dalle [3] era perfetta ($\pm 0''.1$) per tutte le posizioni base, mentre era pessima per le intermedie ($30''$ per $d\alpha$ per la 9); con la detta piccola variazione alla 10 + 11 tutto andava al suo posto, come mostra un confronto tra le [4] e le [5].

⁽¹⁾ Cfr. ad. es., G. STRACKE, loc. cit., p. 296.

Questa tabella conferma che l'osservazione *I* è poco esatta, mentre la *5* è del tutto erronea; di esse non si terrà più conto alcuno. Tutte le altre osservazioni sono ben rappresentate meno le *10* ed *11* i cui scarti $O - G$ in δ superano, sebbene di poco, il limite di $\pm 5''$ consentito per la numerazione dell'orbita.

5. — *Ulteriore miglioramento dell'orbita.* Non valeva però la pena di tentare un ulteriore miglioramento dell'orbita seguendo lo stesso metodo, anche per la relativa esiguità delle osservazioni utili a disposizione. In realtà è stato sufficiente portare lievi modifiche *empiriche* al moto medio e alle 6 quantità $P_x, P_y, P_r, Q'_x, Q'_y, Q'_r$ ⁽¹⁾ (tenendo conto delle tre relazioni alle quali esse debbono soddisfare) per avere i seguenti:

Elementi ellittici del Pianeta 1938 OB.

Epoca ed osculazione: 1938 ottobre 9.0 T.U.

$$M^0 = 1^0.5319.5$$

$$\varphi = 6^0.8153$$

$$\mu = 673''.9596$$

$$\left. \begin{array}{l} \omega = 40^0.8312 \\ \Omega = 298^0.5287 \\ i = 8^0.9553 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Eclittica} \\ 1938.0 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \omega = 40^0.8229 \\ \Omega = 298^0.7045 \\ i = 8^0.9562 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Eclittica} \\ 1950.0 \end{array}$$

Do anche le seguenti:

Costanti per il calcolo delle effemeridi:

$$e = 0.118669 \qquad a = 3.026323$$

$$e^0 = 6^0799233 \qquad a \cos \varphi = 3.004939$$

$$\mu^0 = 0^0.1872110$$

⁽¹⁾ Queste quantità (gli apici *non* indicano derivate) si incontrano nel calcolo orbitale e servono per il calcolo delle effemeridi; si ha, indicando con X', Y', Z' le coordinate equatoriali solari e con E l'anomalia eccentrica del pianeta (cfr. ad es. G. STRACKE, loc. cit., pp. 204-205):

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \cos \delta \cos \alpha = a P'_x (\cos E - e) + a \cos \varphi Q'_x \sin E + X' \\ \Delta \cos \delta \sin \alpha = a P'_y (\cos E - e) + a \cos \varphi Q'_y \sin E + Y' \\ \Delta \sin \delta = a P'_z (\cos E - e) + a \cos \varphi Q'_z \sin E + Z' \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{lcl}
 P'_x = + 0.928\ 811 & & P'_x = + 0.929\ 849 \\
 P'_y = - 0.367\ 378 & & P'_y = - 0.364\ 887 \\
 P'_z = - 0.048\ 402 & & P'_z = - 0.047\ 317 \\
 Q'_x = + 0.344\ 393 & 1938.0 & Q'_x = + 0.341\ 667 \\
 Q'_y = + 0.807\ 633 & & Q'_y = + 0.808\ 552 \\
 Q'_z = + 0.478\ 667 & & Q'_z = + 0.479\ 069
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} P'_x \\ P'_y \\ P'_z \\ Q'_x \\ Q'_y \\ Q'_z \end{array}} \right\} 1950.0$$

Ed ecco la rappresentazione delle osservazioni su questa orbita ($o - c$):

TABELLA IV.

N.	$\cos \delta \cdot d\alpha$	$d\delta$	N.	$\cos \delta \cdot d\alpha$	$d\delta$
2	- 0''.2	- 1''.1	8	- 2''.5	- 1''.5
3	- 0.1	+ 0.5	9	- 1.5	- 0.3
4	+ 2.2	- 0.3	10	- 1.1	- 2.2
6	- 1.4	+ 2.2	11	- 1.2	- 1.9
7	- 1.7	+ 2.2			

Per le distanze geocentriche per le 2, 6 + 7 e 10 + 11 si ottenne:

$$[5] \quad \Delta_2 = 1.714\ 573 \quad ; \quad \Delta_{6+7} = 1.784\ 287 \quad ; \quad \Delta_{10+11} = 2.725\ 052$$

Poichè gli scarti $o - c$ di tutte le osservazioni utili non superano i $\pm 2''5$ per un intervallo di oltre 4 mesi, l'orbita calcolata può essere numerata ⁽¹⁾.

Nel chiudere questa Nota sento gradito il dovere di porgere i miei più vivi ringraziamenti al prof. G. ARMELLINI, Direttore del R. Osservatorio Astronomico di Roma, e al prof. M. PICONE, Direttore dell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo, per i consigli e gli aiuti largamente concessi per l'esecuzione di questo lavoro. Al prof. G. STRACKE dell'Astronomisches Rechen-Institut di Berlino rivolgo poi un particolare ringraziamento per avermi cortesemente fornito i dati necessari e molti utili suggerimenti.

⁽¹⁾ Il prof. G. STRACKE, al quale ho comunicato i risultati ottenuti, mi ha confermato che il Pianeta 1938 OB sarà numerato.

Astronomia. — *Determinazione della latitudine del R. Osservatorio Astronomico di Roma su Monte Mario* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di M. CIMINO, presentata dall'Aggregato G. ARMELLINI.

1. *Costanti strumentali.* — La determinazione di latitudine che presento in questa Nota è la prima che sia stata eseguita dopo il trasferimento del R. Osservatorio di Roma dalla antica sede sul Campidoglio a quella di Monte Mario. Una determinazione di latitudine esisteva già e fu eseguita dal DI LEGGE ⁽³⁾ col metodo di STRUVE, ma essa si riferiva alla Torre del Primo Meridiano d'Italia che trovasi a circa m. 200 a nord del posto (giardino dell'Osservatorio) ove ora è stabilmente situato l'invertibile meridiano « Bamberg » di cui mi sono servito per la nuova determinazione. Questo strumento dei passaggi è a cannocchiale spezzato, di mm. 88 di apertura libera e di m. 0,95 circa di distanza focale; io ho sempre usato un ingrandimento di circa cento volte. Lo strumento è provvisto di due livelli zenitali di grande sensibilità, il cui « passo » è stato determinato con cura più volte; recentemente il prof. GIALANELLA ⁽⁴⁾ ha trovato come *media complessiva di una divisione* il valore che ho adottato nel presente lavoro:

[1]

$$d = 1''.202 \pm 0''.004.$$

Del valore angolare del passo della vite micrometrica ho eseguito invece una nuova determinazione. La distanza dei fili orari del micrometro, distribuiti in tre fascetti di cinque fili ognuno, è stata dedotta osservando, — alternativamente con cerchio verticale ad est e ad ovest, — i passaggi di 70 stelle per la maggior parte di debole declinazione, mentre venivano compiute 150 escursioni complete del filo mobile, che veniva fatto sovrapporre successivamente su tutti i fili fissi con l'avvertenza di muovere il tamburro in senso destrorso e sinistrorso alternativamente. Tutte

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel R. Osservatorio Astronomico di Roma su Monte Mario e nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

⁽²⁾ Pervenuta all'Accademia il 23 settembre 1939–XVII.

⁽³⁾ A. DI LEGGE, *Determinazione della Latitudine di Monte Mario ecc.* « Pubblicazioni della R. Commissione geodetica italiana », Bologna, 1909.

⁽⁴⁾ Cfr. L. GIALANELLA, *Nuova determinazione della latitudine del R. Osservatorio del Campidoglio ecc.* « Contributi scientifici del R. Osservatorio di Roma », (nuova serie), n. 45 (1934).

queste operazioni furono distribuite un po' per ogni sera durante tutto il periodo delle osservazioni, onde è lecito ritenere che il valore angolare medio complessivo del passo della vite così determinato rappresenti un valore medio sia rispetto all'epoca delle singole osservazioni, sia rispetto alle temperature e sia infine rispetto alle varie zone del micrometro ⁽¹⁾. Nella Tabella I riporto i risultati medi finali, avvertendo che con $a_1, \dots, a_5, b_1, \dots, b_5, c_1, \dots, c_5$ ho indicato ordinatamente i fili dei tre fascetti a partire dal più vicino ai denti della « seghetta » indicatrice delle rivoluzioni della vite.

TABELLA I.

Inter- vallo	Distanze filari in unità di divisione	Distanze filari in secondi	Valore della divi- sione del tamburo	Inter- vallo	Distanze filari in unità di divisione	Distanze filari in secondi	Valore della divi- sione del tamburo
$a_1 a_2$	98 ^D .860	3 ^s .771	0''.5722	$b_3 b_4$	107 ^D .470	4 ^s .035	0''.5632
$a_2 a_3$	104 .072	3.920	5650	$b_4 c_1$	316 .608	11. 973	5672
$a_3 a_4$	99 .313	3.731	5635	$c_1 c_2$	103 .353	3. 923	5694
$a_4 a_5$	107 .906	4.085	5679	$c_2 c_3$	102 .570	3. 846	5624
$a_5 b_1$	211 .685	7.992	5663	$c_3 c_4$	104 .849	3. 980	5694
$b_1 b_2$	103 .037	3.921	5708	$c_4 c_5$	121 .477	4. 589	5667
$b_2 b_3$	102 .998	3.901	5681				

Si ha pertanto come *media complessiva della divisione del tamburo* (cioè $\frac{1}{100}$ del *passo della vite*), a temperatura media di 21 gradi centigradi:

$$[2] \quad D = 0''.56708$$

(¹) Lo spoglio dei dati ottenuti, — dopo le necessarie riduzioni e qualche scarto condotto con assai prudente criterio —, ha messo in luce un lieve aumento del valore angolare del passo della vite con la temperatura, ottenendosi per circa 15 gradi centigr. il valore 56'' 68 e per 27 gradi il valore 56'' 72. Nella citata Nota il GIALANELLA aveva ottenuto, per una temperatura media di 16 gradi circa, il valore 56'' 69 in buon accordo con quello da me trovato. Non mi è sembrato però di poter dedurre con *buona sicurezza* una curva di variazione del detto passo con la temperatura, e mi sono quindi contentato di utilizzare il valore medio generale dato dalla (2). Quanto all'errore progressivo, l'ultima colonna della Tabella I mostra come siano necessarie ulteriori indagini prima di poter concludere qualche cosa di non troppo arbitrario.

con scarto quadratico medio (della media):

$$[2'] \quad e_m = 0''.00083.$$

2. *Coppie talcottiane e riduzione delle osservazioni.* La posizione media per il 1939.0 delle stelle delle coppie di cui mi sono valso per applicare il metodo di HORREBOW-TALCOTT, è data nella Tabella II, la seconda colonna indicando il numero dell'ultimo *General Catalogue* ecc. di B. Boss ⁽¹⁾:

TABELLA II.

Coppia	N.	Mag.	$\alpha_{1939.0}$	$\delta_{1939.0}$	Coppia	N.	Mag.	$\alpha_{1939.0}$	$\delta_{1939.0}$
I	11 091	5.8	8h 6m 46s.9	+ 25° 41' 38."23	X	17 874	4.3	13h 9m 1s.7	+ 28° 11' 12".63
	11 338	5.9	15 31.3	57 56 6. 97		18 353	5.5	31 46.7	55 39 37. 88
II	12 417	5.6	55 48.2	32 39 24. 53	XI	18 359	5.0	32 4.5	37 29 39. 49
	12 534	6.7	9 1 1.8	51 4 5. 89		19 273	4.3	14 14 3.9	46 22 3. 62
III	13 442	5.4	42 13.4	57 24 33. 40	XII	18 620	5.7	13 43 38.2	41 28 38. 40
	13 590	4.1	49 17.9	26 17 42. 44		18 778	6.7	50 48.3	42 29 3. 87
IV	13 827	5.7	10 0 33.9	54 11 15. 77	XIII	19 019	3.6	14 2 44.2	64 40 0. 80
	14 086	5.4	12 46.8	29 36 54. 42		19 251	5.8	13 12.0	19 11 42. 02
V	14 507	5.0	29 57.9	76 1 41. 09	XIV	19 666	6.2	32 25.2	57 20 7. 73
	15 235	4.7	11 1 52.3	7 39 58. 08		19 831	4.9	40 44.5	26 47 10. 45
VI	15 751	5.3	25 47.4	39 40 22. 22	XV	20 005	6.9	49 20.4	20 32 24. 18
	15 962	5.5	35 5.9	43 57 49. 58		20 381	6.8	15 6 40.4	63 20 58. 02
VII	16 736	3.4	12 12 24.9	57 22 16. 97	XVI	20 483	6.4	11 16.1	38 29 31. 39
	16 873	4.8	19 26.5	26 11 3. 99		20 720	6.2	22 1.6	45 29 8. 40
VIII	17 342	Var.	42 16.1	45 46 24. 22	XVII	20 883	5.0	29 35.9	41 6 19. 49
	17 430	5.9	47 16.9	37 50 54. 64		21 340	4.6	50 33.9	42 37 16. 59
IX	17 953	5.7	13 12 47.5	41 10 36. 47	XVIII	21 777	5.9	16 8 42.9	16 49 19. 99
	18 283	6.2	28 37.1	+ 42 25 9. 54		21 852	6.3	12 10.9	+ 67 17 54. 87

Dallo stesso Catalogo, al fine di avere un riferimento *uniforme* per tutte le stelle utilizzate, ho tratto le loro posizioni assieme ai termini necessari per la riduzione alle posizioni medie per il 1939.0. La riduzione

⁽¹⁾ BENJAMIN BOSS, *General Catalogue of 33.342 stars for the epoch 1950*, Washington, 1937.

al luogo apparente è stata effettuata per ogni singola stella della coppia per i tempi di osservazione e tenendo conto dei termini a corto periodo; mi sono valso allo scopo delle tabelle dell'*American Ephemeris 1939*. Nessuna correzione per la riduzione al Polo medio è stata apportata, mancandomi, all'epoca della presentazione di questa Nota, i dati necessari. Tutti i calcoli furono eseguiti a macchina due volte con un decimale di arrotondamento di più di quelli che ho riportato.

3. *Determinazione della latitudine.* — Per ogni stella furono eseguite tre puntate ai fili mediani di ogni fascetto del reticolo; le osservazioni furono poi ridotte al filo centrale tenendo conto della curvatura del parallelo seguito dalla stella ⁽¹⁾. Le 112 osservazioni utili — (6 furono scartate perchè ovviamente erronee per sviste nelle letture del tamburo) — ripartite su 18 coppie, sono riportate nella Tabella III. Ivi, oltre che la data, il numero della coppia e la posizione del cerchio verticale (e dell'oculare) durante l'osservazione della prima stella di ogni coppia, figurano la semi-somma $\frac{1}{2}(D_1 + D_2)$ delle declinazioni apparenti delle due stelle, la semi-differenza ΔM delle letture al micrometro, le correzioni C_L, C_R, C_P rispettivamente per le livelle, per la rifrazione e per la curvatura del parallelo, ed infine la latitudine osservata φ .

Nella Tabella IV sono dati per ogni coppia il numero delle osservazioni, i valori medi della latitudine ed i rispettivi errori probabili (delle medie). Come *media generale* di tutte le osservazioni risulta infine il valore:

$$[3] \quad \varphi = 41^\circ \ 55' \ 18''.77 \quad (\text{Epoca } 1939.36)$$

con l'errore probabile (della media):

$$[3'] \quad e_p = \pm 0''.017.$$

⁽¹⁾ La distanza *media* tra i fili mediani di ogni fascetto risultò di $23^s 70$; per le correzioni per la curvatura del parallelo e per la rifrazione mi sono valso delle tavole di: TH. ALBRECHT, *Formeln und Hilfstafeln*, Leipzig, 1908, pagg. 67–70.

TABELLA III.

Data	Coppia	Cerchio	$\frac{1}{2}(D_1 + D_2)$	ΔM	C_L	C_R	C_P	φ
1939								
Marzo 30	I	W	41° 48' 47" .36	+ 6' 31" .59	+ 0" .01	+ 0" .06	+ 0" .22	41° 55' 19" .24
Aprile 5	»	E	87	30 .52	— 0 .12	»	»	18 .55
» 6	»	W	91	69	+ 0 .22	»	»	19 .10
» 11	»	E	48 .12	57	— 0 .12	»	»	18 .85
» 12	»	E	20	23	— 0 .25	»	»	18 .46
Marzo 29	II	E	41 51 38 .15	+ 3 40 .16	+ 0 .33	+ 0 .03	+ 0 .19	18 .86
» 30	»	W	29	52	— 0 .10	»	»	18 .93
Aprile 5	»	W	39 .07	09	— 0 .36	»	»	19 .02
» 7	»	E	23	39 .24	— 0 .14	»	»	18 .55
» 11	»	W	56	38 .93	+ 0 .16	»	»	18 .87
» 20	»	E	40 .45	07	+ 0 .18	»	»	18 .92
» 21	»	W	50	41	— 0 .22	»	»	18 .91
Marzo 22	III	E	41 50 58 .06	+ 4 21 .59	— 0 .93	+ 0 .04	+ 0 .21	18 .97
» 29	»	W	59 .00	19 .76	+ 0 .05	»	»	19 .06
» 30	»	W	16	70	— 0 .30	»	»	18 .81
Aprile 5	»	W	51 0 .12	18 .58	— 0 .22	»	»	18 .73
» 11	»	W	80	17 .51	+ 0 .43	»	»	18 .99
» 12	»	W	94	18 .06	— 0 .97	»	»	18 .28
» 23	»	E	2 .24	16 .04	+ 0 .04	»	»	18 .57
» 25	»	E	39	15 .76	+ 0 .10	»	»	18 .50
Marzo 22	IV	W	41 53 54 .42	+ 1 24 .07	+ 0 .11	+ 0 .01	+ 0 .20	18 .81
» 30	»	E	55 .63	22 .60	+ 0 .22	»	»	18 .66
Aprile 6	»	E	56 .83	21 .66	— 0 .16	»	»	18 .54
» 7	»	E	96	57	+ 0 .20	»	»	18 .94
» 11	»	E	57 .47	20 .92	+ 0 .04	»	»	18 .64

Segue: TABELLA III.

Data	Coppia	Cerchio	$\frac{1}{2}(D_1 + D_2)$	ΔM	C_L	C_R	C_P	φ
1939								
Aprile 12	IV	E	41°53'57".63	+1'20".65	+0".15	+0".01	+0".20	41°55'18".64
» 21	»	W	58.96	19.58	—0.02	»	»	18.73
» 23	»	W	59.14	49	—0.02	»	»	18.82
» 25	»	W	32	35	+0.03	»	»	18.91
Aprile 21	V	W	41 50 42.26	+4 35.74	+0.03	+0.05	+0.43	18.51
» 23	»	E	42	87	—0.04	»	»	18.73
» 25	»	E	58	12	+0.03	»	»	18.21
Maggio 11	»	E	44.06	34.20	—0.06	»	»	18.68
Aprile 28	VI	W	41 48 59.37	+6 19.13	—0.01	+0.05	+0.19	18.73
Maggio 11	»	W	49 1.51	17.24	—0.17	»	»	18.82
» 13	»	E	1.85	16.01	+0.49	»	»	18.59
Maggio 13	VII	W	41 46 36.18	+8 42.62	—0.09	+0.08	+0.21	19.00
» 16	»	E	76	36	—0.67	»	»	18.74
» 17	»	W	94	41.92	—0.11	»	»	19.04
» 25	»	E	37.99	40.40	±0.00	»	»	18.68
» 27	»	E	38.32	04	—0.17	»	»	18.48
Giugno 3	»	W	39.16	39.45	+0.17	»	»	19.07
» 6	»	E	43	03	+0.20	»	»	18.95
Maggio 16	VIII	W	41 48 35.99	+6 43.05	—0.10	+0.06	+0.19	19.19
» 26	»	E	37.70	41.13	—0.48	»	»	18.60
» 27	»	W	90	40.70	+0.08	»	»	18.93
Giugno 3	»	E	38.99	04	+0.02	»	»	19.30
» 6	»	W	39.35	39.61	—0.11	»	»	19.10
Maggio 16	IX	E	41 47 49.62	+7 29.10	—0.30	+0.06	+0.19	18.67
» 17	»	W	85	28.37	+0.08	»	+0.09	18.45

Segue: TABELLA III.

Data	Coppia	Cerchio	$\frac{1}{2} (D_1 + D_2)$	ΔM	C_L	C_R	C_P	φ
1939								
Maggio 26	IX	W	41°47'51".61	+7'27".44	-0".27	+0".06	+0".19	41°55'19".03
» 27	»	E	84	26.64	+0.07	»	»	18.80
Giugno 3	»	W	53.17	25.54	-0.33	»	»	18.63
Giugno 8	X	E	41 55 26.05	-0 7.08	-0 0.08	± 0.00	+ 0.20	19.09
» 10	»	W	39	51	+ 0.11	»	»	19.19
» 16	»	E	27.31	8.37	+ 0.03	»	»	19.17
Maggio 26	XI	E	41 55 50.39	-0 31.59	-0 0.13	-0.01	+ 0.19	18.85
Giugno 3	»	E	52.17	33.84	-0 0.09	»	»	18.42
» 6	»	W	71	34.18	-0 0.09	»	»	18.62
» 9	»	E	53.29	75	+ 0.09	»	»	18.81
Giugno 10	XII	E	41 56 23.04	-1 4.50	-0 0.02	-0.01	+ 0.19	18.70
» 16	»	W	24.12	5.79	+ 0.05	»	»	18.56
» 17	»	E	25	68	+ 0.27	»	»	19.02
» 20	»	W	59	82	+ 0.01	»	»	18.96
» 21	»	E	72	86	-0 0.28	»	»	18.76
» 22	»	W	86	6.58	+ 0.14	»	»	18.60
Giugno 8	XIII	E	41 55 52.71	-0 34.12	+ 0.05	-0.01	+ 0.26	18.89
» 10	»	W	53.12	46	+ 0.10	»	»	19.01
» 17	»	W	54.33	35.48	-0 0.08	»	»	19.02
» 20	»	E	68	55	-0 0.14	»	»	19.24
» 21	»	W	80	36.22	+ 0.08	»	»	18.91
» 22	»	E	94	08	-0 0.05	»	»	19.06
» 24	»	W	55.28	.36	+ 0.15	»	»	19.32
» 27	»	E	73	37.39	-0 0.18	»	»	18.41
Giugno 9	XIV	W	42 34.1.43	-8 22.64	-0 0.06	-0.07	+ 0.21	18.87

Segue: TABELLA III.

Data	Coppia	Cerchio	$\frac{1}{2} (D_1 + D_2)$	ΔM	C_L	C_R	C_P	φ
1939								
Giugno 10	XIV	E	42° 3' 41'' .66	—8' 22'' .91	—0'' .12	—0'' .07	+ 0'' .21	41° 55' 18'' .77
» 16	»	W	42 .95	24 .43	+ 0 .03	»	»	18 .69
» 17	»	E	43 .14	51	—0 .17	»	»	18 .60
» 20	»	W	59	25 .09	—0 .20	»	»	18 .44
» 21	»	E	75	39	+ 0 .05	»	»	18 .55
» 22	»	W	92	56	+ 0 .03	»	»	18 .53
» 24	»	E	44 .31	92	—0 .08	»	»	18 .45
» 27	»	W	88	26 .30	+ 0 .05	»	»	18 .77
» 28	»	E	45 .04	46	—0 .04	»	»	18 .68
» 29	»	W	18	27 .24	+ 0 .65	»	»	18 .73
» 30	»	E	31	29 .11	+ 2 .05	»	»	18 .39
Giugno 10	XV	W	41 56 43 .62	—1 25 .37	+ 0 .39	—0 .02	+ 0 .24	18 .86
» 21	»	W	45 .84	27 .47	+ 0 .17	»	»	18 .76
» 22	»	E	46 .03	26	+ 0 .11	»	»	19 .10
» 24	»	W	46	28 .45	+ 0 .01	»	»	18 .24
» 28	»	W	47 .25	29 .05	+ 0 .14	»	»	18 .56
» 29	»	E	41	28 .75	+ 0 .13	»	»	19 .01
Giugno 17	XVI	E	41 59 25. 09	—4 6 .95	+ 0 .03	—0. 03	+ 0 .19	18 .33
» 20	»	W	66	7 .49	—0 .05	»	»	18 .28
» 21	»	E	85	35	—0 .08	»	»	18 .58
» 22	»	E	26 .07	56	—0 .16	»	»	18 .51
» 28	»	E	27 .47	9 .59	+ 0 .14	»	»	18 .18
» 29	»	E	66	62	—0 .01	»	»	18 .19
» 30	»	E	84	58	—0 .10	»	»	18 .32
Luglio 1	»	E	28 .01	80	+ 0 .02	»	»	18 .39
Giugno 21	XVII	W	41 51 54. 65	+3 24 .41	—0 .20	+ 0 .03	+ 0 .19	19 .08

Segue: TABELLA III.

Data	Coppia	Cerchio	$\frac{1}{2} (D_1 + D_2)$	ΔM	C_L	C_R	C_P	φ
1939								
Giugno 22	XVII	W	41°51'54".88	-3'23".82	-0".15	+0".03	+0".19	41°55'18".77
» 24	»	W	55.39	32	+0.02	»	»	18.95
» 27	»	W	56.16	22.50	+0.04	»	»	18.92
» 28	»	W	40	40	-0.03	»	»	18.99
» 29	»	W	61	21.73	+0.28	»	»	18.84
» 30	»	W	81	22.40	-0.30	»	»	19.13
Luglio 1	»	W	57.01	21.63	+0.26	»	»	19.12
Giugno 27	XVIII	E	42 3 45.31	-8 27.33	+0.59	-0.08	+0.28	18.77
» 28	»	W	55	26.89	-0.17	»	»	18.69
» 29	»	W	76	27.19	-0.21	»	»	18.56
Luglio 1	»	E	46.16	23	-0.27	»	»	18.86

TABELLA IV.

Coppia	N.	φ_m	e_p	Coppia	N.	φ_m	e_p	Coppia	N.	φ_m	e_p
I	5	41°55'18".84	$\pm 0".10$	VII	7	41°55'18".85	$\pm 0".05$	XIII	8	41°55'18".98	$\pm 0".07$
II	7	18.87	04	VIII	5	19.02	08	XIV	12	18.62	03
III	8	18.74	07	IX	5	18.72	07	XV	6	18.76	09
IV	9	18.74	03	X	3	19.15	02	XVI	8	18.35	03
V	4	18.53	08	XI	4	18.67	07	XVII	8	18.97	03
VI	3	18.71	05	XII	6	18.77	05	XVIII	4	18.72	04

Esaminando gli scarti che i valori di φ della Tabella III presentano dalla media generale, possiamo rilevare come 53 di essi siano positivi, 55 negativi e 4 nulli. L'errore probabile di una osservazione risulta uguale a $0''.18$, e si hanno 52 scarti minori in modulo a questo valore invece dei 56 assegnati dalla teoria del calcolo delle probabilità. L'errore medio sempre di una osservazione è $\mu = 0''.26$; nella Tabella V si ha un confronto tra il numero degli scarti il cui modulo risulta contenuto negli intervalli $\left(0 \mid -\frac{\mu}{2}\right)$, $\left(\frac{\mu}{2} \mid -\mu\right)$, \dots , $(2\mu \mid -\infty)$ e il numero corrispondente che assegnerebbe la teoria. Le differenze tra le due colonne sono di un ordine di grandezza accettabile.

TABELLA V.

Intervallo	Intervallo	N. degli scarti osservati I	N. degli scarti teorici II	II - I
0 a $\frac{\mu}{2}$	$0''.00$ a $0''.13$	37	42.9	+ 5.9
$\frac{\mu}{2}$ a μ	0.13 » 0.26	38	33.6	— 4.4
μ a $3\frac{\mu}{2}$	0.26 » 0.39	22	20.5	— 1.5
$3\frac{\mu}{2}$ a 2μ	0.39 » 0.53	11	9.9	— 1.1
2μ a ∞	0.53 » ∞	4	5.2	+ 1.2

Chiamando infine con θ il valore medio dei valori assoluti degli scarti, si ha: $\frac{\mu}{\theta} = \frac{0.263}{0.216} = 1.22$, mentre la teoria⁽¹⁾ dà per questo rapporto il valore $\sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1.25$. Questi controlli, se pur non immuni da critiche, sembrano provare che gli errori di osservazione e quelli derivanti dalle declinazioni delle 36 stelle utilizzate si comportano secondo la legge che regola gli errori accidentali.

(¹) Cfr. per es. G. CASTELNUOVO, *Calcolo delle Probabilità*, Zanichelli, Bologna, vol. I, n. 48.

Astronomia (Astronomia Dantesca). — *Posizione di Venere nel 25 marzo del 1300. Determinazione dell'ora in cui son sorti Venere ed il Sole il 25 marzo del 1300 nella Montagna del Purgatorio.* Nota ⁽¹⁾ di ADRIANA BADESSI, presentata dall'Aggregato G. ARMELLINI.

Dai diversi accenni che Dante fa nella *Divina Commedia* circa la posizione in cielo dei vari pianeti è sorta l'idea di risalire da ciò alla data del viaggio dantesco. Uno dei punti che può prendersi come base di tale ricerca, è offerto dalla settima terzina del primo canto del *Purgatorio*, in cui il Poeta accenna con relativa precisione alla posizione di Venere con i versi:

« Lo bel pianeta che ad amar conforta
 faceva tutto ridere l'Oriente
 velando i pesci ch'erano in sua scorta »
 (*Purg.*, I, 19-21).

Vari commentatori, dal secolo XIV ai nostri giorni hanno cercato di dare una interpretazione scientificamente esatta alle parole di Dante, ma le conclusioni a cui si perviene sono tra loro discordanti.

JACOPO DALLA LANA, bolognese, che fu il primo ad estendere il commento alle tre cantiche della *Divina Commedia* (probabilmente nello stesso decennio della morte del Poeta) afferma in un suo commento che nel marzo del 1300 Venere con i suoi « radii velava ovvero chiudeva lo segno di Pisces . . . ».

L'OTTIMO, *anonimo fiorentino* (forse il notaro Andrea Lancia) è pienamente concorde con il Dalla Lana.

BENVENUTO RAMBALDI DA IMOLA, lettore di Dante a Bologna (secolo XIV) è ancora d'accordo coi precedenti.

I fin qui concordanti risultati non sono più gli stessi secondo gli accademici della Crusca che in un capitolo di premessa all'edizione del 1595 della *Divina Commedia* affermano non solo che nella Pasqua del 1300 « Venere era ne' gra' 29 m 29 d'Ariete . . . » ma continuano ancora asserendo che « lo bel pianeta che ad amar conforta . . . » non è Venere, ma

(¹) Pervenuta all'Accademia il 24 luglio 1939 XVII.

il Sole: opinione che lo Scartazzini, nel suo ben noto commento, chiama *inattendibile*.

Dopo i citati commentatori che erano però dei letterati, nessun altro si è occupato del detto argomento sino verso la metà del secolo XIX, quando il compianto Filippo Angelitti professore di Astronomia alla R. Università di Palermo ne riprese lo studio, dando però, diversamente dagli altri, una interpretazione scientifica dell'argomento.

Contrariamente a quanto affermavano gli accademici della Crusca, egli, concordemente agli altri commentatori, ritiene che « lo bel pianeta che ad amar conforta », sia Venere; la quale, aggiunge « nel tempo del viaggio dantesco sarebbe stata mattutina, anzi volendo dare il significato preciso della frase che i Pesci erano in sua scorta, si potrebbe concludere che quella mattina Venere era nel segno dei Pesci ».

L'Angelitti per poter dare un giusto commento alle parole del Poeta onde risalire poi alla data del viaggio dantesco studia accuratamente la posizione dei pianeti in cielo nell'anno 1300 e 1301, come si ritrova in una sua memoria letta all'Accademia Pontaniana nelle tornate dell'11 aprile e del 6 giugno 1897. Dai suoi studi l'Angelitti trae conclusioni forse inaspettate. Egli dice infatti che nel marzo del 1300 Venere non si trovava nel segno dei Pesci, vi si trovava bensì nel 1301, per cui ritiene giusto riferire al 1301 il viaggio di Dante.

Un'altra conferma delle conclusioni dell'Angelitti è data dal RIZZACASA che, nel « La data della visione dantesca, cap. III del libro di prosina pubblicazione *L'Astronomia di Dante* (1906) » è concorde con l'Angelitti circa la data della visione.

Le citate deduzioni dell'Angelitti che, pur basandosi sul fondamento matematico contrastano pienamente con il parere dei letterati, i quali attribuiscono all'anno 1300 la data del viaggio Dantesco, mi hanno indotto ad una ulteriore revisione dei risultati astronomici.

Dando prima un breve accenno alla teoria seguita nella mia tesi di laurea riferirò poi le conclusioni che da essa possono dedursi.

Per la trattazione del problema relativo alla posizione di Venere il 25 marzo 1300, mi sono servita della teoria di Keplero, determinando dapprima la posizione del pianeta nella sua orbita nell'istante considerato, indi la posizione in cielo. Per la trattazione della seconda parte ho preso un sistema di riferimento avente come origine il Sole e come piano fondamentale il piano dell'orbita terrestre all'epoca 1300. Si hanno così gli assi eclitticali eliocentrici di cui l'asse x è diretto verso il punto vernale γ del 1300, l'asse Y ortogonale ad X nel piano fondamentale e l'asse Z normale al piano fondamentale. Ciò posto, la posizione del pianeta è determinata qualora siano noti:

il piano dell'orbita (due parametri: longitudine nodo Ω , inclinazione (i)),

l'ellisse descritta dal pianeta ed avente per fuoco il Sole [tre parametri: *grandezza*, data dal semiasse maggiore (a), *forma*, data dall'eccentricità (e), *orientazione* dell'ellisse (ω)],

l'istante in cui il pianeta è passato al perielio (un parametro τ).

Noti i sei menzionati parametri, si possono trovare le coordinate eliocentriche X, Y, Z del pianeta nell'istante voluto. Determinate poi le coordinate eliocentriche della Terra nello stesso istante t , si ottengono le coordinate geocentriche di Venere, dopo di che, con semplici considerazioni si hanno le coordinate eclitticali del pianeta riferite alla sfera celeste, trasformate poi, per comodità di osservazione, in coordinate equatoriali.

Il tempo relativamente al quale si vuol fare l'osservazione, si introduce nei calcoli mediante gli elementi dell'orbita di Venere (longitudine media (L), longitudine perielio (ω), longitudine nodo (Ω) eccentricità (e) inclinazione (i), semiasse maggiore (a)) dati per il gennaio del 1900, presi da « *Connissance des temps* » (LE VERRIER).

$L \Omega \omega$ sono tropici, vale a dire contati sull'eclittica dell'epoca t a partire dall'equinozio medio della stessa epoca (1300).

Il tempo t espresso in secoli giuliani di 36525 giorni si è ricavato dal giorno giuliano stabilito secondo le note convenzioni astronomiche. Secondo queste il periodo giuliano immaginato da G. SCALIGERO si compone di 7.980 anni e cioè di un numero di anni che si ottiene moltiplicando il ciclo solare 28, per il numero d'oro 19 e per l'indizione romana 15.

Come origine del periodo giuliano è stato scelto l'anno in cui sia il ciclo solare, sia il numero d'oro, sia l'indizione romana erano uguale ad uno, ciò avvenne nel 4713 av. Cr. Presa tale epoca come origine, il tempo si misura non in anni, ma in giorni. Si trova in tal modo che dal 25 marzo 1300 al 1° gennaio 1900 (a cui sono riferiti gli elementi di LE VERRIER) sono trascorsi 219.053 giorni.

I calcoli svolti con logaritmi a cinque decimali, tenuto conto delle perturbazioni, hanno dato per le coordinate equatoriali di Venere, riferite all'equinozio del 1300, i seguenti valori:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 2^{\text{h}} 48^{\text{m}} \\ \delta = 17^{\circ} 0' \end{array} \right.$$

Per trasportarle all'equinozio del 1900 basta tener conto del fenomeno di precessione (essendo la nutazione e l'aberrazione trascurabili per osservazioni fatte ad occhio nudo) e si ha allora:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 3^{\text{h}} 21^{\text{m}} \\ \delta = 19^{\circ} 25' \end{array} \right.$$

Dai valori trovati si deduce che Venere il 25 marzo 1300 si trovava qualche grado a sud della stella φ Tauri, al limite della costellazione del Toro colla costellazione di Ariete, nel segno di Ariete.

Si conclude quindi che i risultati ottenuti, portano ad una ulteriore conferma alla tesi sostenuta dall'ANGELITTI.

Per completare la trattazione dell'argomento, onde poter aggiungere alla posizione di Venere in cielo anche la sua posizione nei riguardi del Sole, ho determinato l'istante in cui sono sorti Venere ed il Sole il 25 marzo 1300 per un osservatore situato sulla montagna del Purgatorio, supposta all'*antipodo* di Gerusalemme come immagina Dante.

Per tale calcolo è necessario determinare le coordinate $\alpha\delta$ del Sole relative al 25 marzo 1300, ed a ciò si perviene considerando il triangolo sferico $S\gamma N$ in cui γS è per definizione la longitudine del Sole (L), NS è, sempre per definizione la declinazione (δ), γN , l'ascensione retta (α).

Ciò posto, noti: L , $S\hat{\gamma}N$, $S\hat{N}\gamma$, si ottengono le coordinate cercate, indi, nota la latitudine del luogo ($\varphi - 31^\circ 30'$) si ottengono facilmente l'angolo orario del Sole e quello di Venere, da cui si determinano gli istanti in cui sono sorti Venere ed il Sole.

I calcoli svolti hanno dato per Venere $9^h 53^m$, per il Sole $6^h 12^m$, essendo i tempi espressi in tempo solare vero del luogo.

Concludendo: il 25 marzo del 1300 il Sole è sorto alle ore 6 e 12^m e Venere alle $9^h 53^m$ (tempo vero) da cui può anche dedursi che Venere era serotina e quindi invisibile di mattina, mentre Dante nei versi citati (*Purg.*, I, v. 19-21) ce la fa apparire mattutina.

Chimica. — *Sulla costituzione delle solfoammidi e delle solfoanilidi* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di A. BARONI, presentata dall'Aggregato G. BARGELLINI.

Per uno studio sulla preparazione e sulle proprietà delle anidridi solfoniche semplici e miste, che formerà oggetto di una successiva comunicazione, ho avuto occasione di preparare parecchie solfoammidi e solfoanilidi. Mi è sembrato non privo di interesse l'effettuare il loro studio dal punto di vista costitutivo per stabilire quali siano le forme effettivamente esistenti allo stato fuso ed allo stato di soluzione.

Il problema della costituzione delle solfoammidi e delle solfoanilidi è stato affrontato fino ad ora solo per via indiretta senza l'ausilio di quei mezzi chimico fisici che per numerosi altri composti hanno permesso di ottenere dei dati abbastanza probativi sulle fasi esistenti alle varie condizioni. Esso può, sotto molti punti di vista, essere collegato a quello delle ammidi che tante ricerche ha originato in questi ultimi anni. Gli studi di numerosi sperimentatori ⁽³⁾ sulla variazione del punto di ebollizione, sulla rifrattometria, sul momento dipolare, sugli spettri di assorbimento e sul comportamento crioscopico, permettono di affermare oggi che le ammidi acide sono tipici composti tautomeri che allo stato di soluzione possono formare miscele della forma ammidica e della forma imidoidrinica.

Poichè la formazione delle ammidi per azione del calore sui sali ammoniacali degli acidi carbossilici è generalmente rappresentata con la equazione:

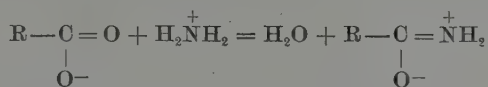


⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

⁽²⁾ Pervenuta all'Accademia il 21 settembre 1939-XVII.

⁽³⁾ O. SCHMIDT, « Berichte », 36, 2467, 1903; HANTSCH, « Liebigs Annalen », 287, 362, 1895 e « Berichte », 64, 661; CLAISEN, « Liebigs Annalen », 287, 362, 1895; ZAHN, « Physikal. Ztschr. », 33, 525, 1932; DEVOTO, « Gazz. Chim. Ital. », 63, 495, 1933; KUMLER e PORTER, « Journ. Amer. Chem. Soc. », 56, 2549, 1934; DADIER e KOHLRAUSCH, « Berichte », 63, 257, 1930; RAMART LUCAS, « Bull. Soc. Chim. », 5, 1, 158, 525, 1934 e 3, 723, 1936; AMAGAT, « Compt. Rend. », 198, 2172, 1934; K. v. AUWERS, « Berichte », 70, 964, 1937; H. O. CHAPLIN e L. HUNTER, « Journ. Chem. Soc. », London, 114, 1937.

se si ammette nel sale ammonico la presenza di ioni acidi e di ioni ammoniaci, si può scrivere:



Secondo questa formulazione le ammidi formate conserverebbero i caratteri di elettrovalenza di un sale ammonico, cioè le ammidi costituirebbero ioni anfoteri in modo analogo a quanto si verifica per gli amminoacidi, le betaine, i γ pironi e i γ piridoni per i quali la costituzione elettrovalente risulta dai lavori di F. ARNDT ed A. KALISCHEK ⁽¹⁾. Estendendo i risultati ottenuti da questi Autori anche agli α piridoni ed a sostanze analoghe che possono essere considerate come dei lattami interni, se ne deduce che la struttura elettrovalente può essere applicata a tutte le ammidi.

Risultati di un certo interesse dal punto di vista costitutivo io ho potuto ottenere per le solfoammidi applicando ad esse lo studio della tensione superficiale e del paracoro che già mi ha permesso di ricavare alcuni dati interessanti ed aventi una certa attendibilità per altri composti solforati ⁽²⁾. Ho determinato anzitutto il paracoro di prodotti fusi preparati con la massima cura per averli allo stato perfettamente puro. Mentre ciò non presenta difficoltà nel caso delle solfoammidi data la notevole differenza di solubilità in acqua delle solfoammidi e dei sali ammoniaci, laboriose e ripetute cristallizzazioni hanno richiesto molte solfoanilidi. I dati ottenuti nella determinazione del paracoro eseguita a 200° per tutti i prodotti, sono riferiti nella tabella I. Nell'ultima colonna di questa tabella è riportato il valore del paracoro calcolato ammettendo per questi composti rispettivamente le formule:



L'accordo, come si può rilevare, fra i paracori calcolati e trovati è buono salvo le differenze dovute agli inevitabili errori sperimentali. Questo accordo induce a ritenere che allo stato fuso le solfoammidi e le solfoanilidi presentino una struttura normale. Questo risultato risulta in accordo con gli spettri di assorbimento nell'infrarosso studiati da M. FREYMAN e collaboratori e con gli spettri Raman studiati dallo stesso

⁽¹⁾ « Berichte », 63, 587, 1930.

⁽²⁾ « Rend. Acc. Lincei », XIV, 6^a, 28, 1931.

autore ⁽¹⁾. Le solfoammidi e le solfoanilidi devono quindi essere considerate allo stato fuso come corrispondenti alla forma ammidica, a differenza delle ammidi che secondo K. v. AUWERS ⁽²⁾ formerebbero allo stato liquido miscele della forma ammidica e della forma imidoidrinica.

Per stabilire se anche allo stato di soluzione le solfoammidi e le solfoanilidi presentino un comportamento analogo o diverso da quello presentato allo stato fuso, ho determinato anche il paracoro delle loro soluzioni in acqua, alcool, cloroformio. Se si ritiene in questo caso che le soluzioni sufficientemente concentrate presentino proprietà intermedie fra quelle del solvente e del soluto ⁽³⁾ e che per esse valga una legge lineare di variazione proporzionale alla concentrazione, si può calcolare il loro paracoro per mezzo della relazione:

$$P_m = \frac{M_m \cdot \gamma^{1/4}}{D - d}$$

nella quale:

$$M_m = M_s(1 - x) + M_x X$$

essendo M_x il peso molecolare della sostanza disciolta, M_s il peso molecolare del solvente ed X la percentuale molecolare della sostanza disciolta. Ora se indichiamo con P_x il paracoro della sostanza disciolta e con P quello del solvente, potremo scrivere:

$$P_m = P(1 - x) + P_x X$$

dalla quale potremo ricavare il valore P_x del paracoro del prodotto in esame. Sebbene però questa relazione si verifichi in alcuni casi con buona approssimazione, non è adattabile a tutti i casi. Così per esempio, io non ho avuto risultati accettabili nel caso delle soluzioni acquose delle solfoammidi, mentre risultati più plausibili ho avuto per le loro soluzioni e per quelle delle solfoanilidi nei solventi sopra riportati. Anche in questi però i valori che si ricavano per il paracoro non sono in accordo con quelli corrispondenti alla forma normale esistente allo stato fuso, ma risultano per molti casi intermedi fra questi e quelli dovuti alla forma isoammidica. È probabile quindi che in soluzione esistano entrambe le forme con preponderanza della forma iso o semipolare nei solventi a bassa costante dielettrica e polare nei solventi a costante dielettrica elevata. La differenza relativamente piccola fra i paracori corrispondenti alle due forme e

⁽¹⁾ « J. physique Radium », 7, 30, 1935 e 7, 506, 1936.

⁽²⁾ Loc. cit.

⁽³⁾ G. SEMERANO, « Atti Accademia Veneto Trentino Istriana », XXIII, 17, 1932.

soprattutto la scarsa esattezza delle misure effettuate in soluzione che rende i valori ottenuti attendibili solo con una esattezza che in molti casi non è maggiore del 5 %, non permette dalle misure per le solfoammidi e le solfoanilidi in soluzione nei vari solventi di ricavare con una esattezza sufficiente i rapporti esistenti fra le due forme.

TABELLA I.

Composto	P trovato	P calcolato
$C_6H_5SO_2NH_2$	320,2	321,7
$C_6H_5SO_2NHC_6H_5$	492,8	494,6
$C_6H_5SO_2NHC_6H_4CH_3$	530,2	533,6
$C_6H_5SO_2NHC_6H_3(CH_3)_2$	570,1	572,6
$C_6H_5SO_2NHC_6H_4NO_2$	561,3	560,8
$C_6H_5SO_2NHC_6H_4Br$	544,2	545,5
$C_6H_5SO_2NHC_6H_4Cl$	520,6	522,2
$CH_3C_6H_4SO_2NH_2$	363,5	366,7
$CH_3C_6H_4SO_2NHC_6H_5$	538,2	540,0
$(CH_3)_2C_6H_3SO_2NH_2$	403,3	406,1
$(CH_3)_2C_6H_3SO_2NHC_6H_5$	575,5	578,9
$(CH_3)_3C_6H_2SO_2NH_2$	442,6	445,0
$(CH_3)_3C_6H_2SO_2NHC_6H_5$	615,3	618,0
$O_2NC_6H_4SO_2NH_2$	385,0	388,3
$O_2NC_6H_4SO_2NHC_6H_5$	557,9	560,2
$(O_2N)_2C_6H_3SO_2NH_2$	317,2	320,0
$(O_2N)_2C_6H_3SO_2NHC_6H_5$	619,5	621,4
$BrC_6H_4SO_2NH_2$	376,7	379,0
$BrC_6H_4SO_2NHC_6H_5$	549,2	551,9
$CH_3CONHC_6H_4SO_2NH_2$	441,6	444,7
$CH_3CONHC_6H_4SO_2NHC_6H_5$	613,9	617,6

Chimica. — *Studio sulle ossichinoline.* — IV. *Derivati mercurati della 8-ossichinolina* ⁽¹⁾. Nota preliminare ⁽²⁾ di F. PIRONE, presentata dall'Aggregato G. BARGELLINI.

La 8-ossichinolina fornisce numerosi derivati utilizzabili in terapia nei quali viene sfruttata in modo particolare la notevole azione antisettica e disinfettante da questo composto posseduta ⁽³⁾. Ritenni perciò non privo di interesse l'esecuzione di esperienze tendenti ad ottenerne derivati mercurici, ed in modo speciale dei composti semicompleksi, come quelli che pare abbiano maggiore attività terapeutica.

I tentativi per ottenere derivati mercurati della 8 ossichinolina hanno inizio con un brevetto ⁽⁴⁾ pubblicato nel 1916 nel quale si parla genericamente di « combinazioni mercurate chinoliniche ottenute riscaldando a lungo derivati della chinolina aventi uno o più gruppi acidi salificabili mescolati a sali di mercurio. Il riscaldamento viene protratto sino a che il composto diventa solubile negli alcali... ».

« In essi il mercurio è legato in modo relativamente fisso, senza però essere incapace di reazione quanto lo è il dibenzoato mercurico, che è terapeuticamente inefficace ».

In seguito SEN ⁽⁵⁾ descrisse un tentativo di mercuriazione eseguito facendo reagire 8-ossichinolina, in soluzione di idrato sodico, con una

(-) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Farmaceutica della R. Università di Pisa.

(2) Pervenuta all'Accademia il 5 ottobre 1939-XVII.

(3) DE OLIVEIRA E PÉNÉS, « Soc. Biol. », 87, 413 (1922); « Bull. Pharm. », 30, 58 (1923); LORTAT, JACOB e BIDAULT. « Pr. med. », 49 (1927); HUBNER e SINGER, « Klin. Woch. », 5, 1709 (1926); « J. Pharm. Chim. », 6, 260 (1927); ALTROFF, « Soc. Biol. », 113, 569 (1933); « Un. Pharm. », 75, 12 (1934); MOREL, ROCHAIX, DENARD, PERROT, DESSAIGNES, « Soc. Biol. », 118, 257 (1935); GAYRAND, « Th. Med. Montpellier » (1935); « Un. Pharm. », 77, 118 (1936); GAUCHER, « Bull. Acad. Med. », 109, 109 (1933); MONASTER e BRAUND, « J. Am. Chem. Soc. », 57, 1697 (1935); HEIL, « Apot. Zeit. », 7, 5 (1938); CLAUS, « D. R. P. », 72942 Arch. Pharm. », 231, 704 (1893); SCARLE, « J. Am. Pharm. Assoc. », 19, 411 (1930); BRUÈRE, « Un. Pharm. », 69, 4 (1928); SCHELENZ, « Pharm. Zentr. », 66, 832 (1925); SAVY e THIUS, « Un. Pharm. », 71, 326 (1930); MAX WOELM, « Chem. Zentr. », I, 2249 (1939); VON OETTINGEN, *Therapeutic agents of quinoline group*. New York (1933).

(4) « Chem. Zentr. », I, 194 (1916).

(5) R. N. SEN e G. K. MUKHERJEE, « J. Indian Chem. Soc. », 11, 541 (1934).

soluzione di acetato mercurico. L'A. ottenne così una polvere rossa che si decompone sopra 280° e che suppose fosse la 5-acetosi-mercuri-8-ossichinolina.

Nel 1935 NEOGI ⁽¹⁾ estese alla 8-ossichinolina un suo metodo di mercuriazione dei fenoli ⁽²⁾ e facendola reagire con cloruro mercurico e bicarbonato sodico, in presenza di glicerina, ottenne una monoclomercuriossichinolina, come polvere giallo-rossa, fondente a 205° , con decomposizione.

Le esperienze da me condotte nel tentativo di fissare le condizioni di ottenimento dei vari mercurio-derivati della 8-ossichinolina, facendo reagire questo composto con l'acetato mercurico, possono riunirsi in due gruppi:

- 1) esperienze eseguite in soluzione acetica;
- 2) esperienze eseguite in soluzione neutra.

In ognuno dei due casi operai sia su soluzioni di quantità equimolecolari dei due composti che in presenza di un eccesso di acetato mercurico (sino a 6 molecole).

Facendo reagire, in soluzione acetica, l'8-ossichinolina con acetato mercurico, ottenni sempre, qualunque fosse il rapporto molecolare delle due sostanze, una massa rossa vischiosa infiltrabile, che precipitava in rosso arancione dopo lungo riposo.

Il prodotto ottenuto allo stato secco è colorato in rosso arancio, non fonde sino a 360° , e dà all'analisi valori corrispondenti alla formula $C_{14}H_9O_3NHg$. Il prodotto è pochissimo solubile in acqua e in idrato sodico; è solubile alquanto in acido acetico e da questa soluzione precipita in forma gelatinosa per addizione di cloruro sodico e idrati alcalini.

La soluzione acetica non dà precipitato con idrogeno solforato. La sospensione cloridrica, dopo lunga ebollizione dà precipitato nero con idrogeno solforato.

Addizionando alla soluzione acetica vischiosa, ottenuta nella reazione tra 8-ossichinolina e acetato mercurico, dell'acido cloridrico si deponeva una polvere giallo-cromo, insolubile nei più comuni solventi e solubile dopo ebollizione in acido solforico e cloridrico. La polvere fonde a 205° (se posta sul blocco intorno a 190° ; in caso diverso si decompone senza fondere) e all'analisi dà valori concordanti per la formula $C_9H_6ONHgCl$. La soluzione colloidale vischiosa ottenuta nella reazione fra acetato mercurico e 8-ossichinolina, addizionata di idrato ammonico dava un precipitato rosso-sangue, che allo stato secco si presentava come polvere rosso-bruna, infusibile, e che all'analisi dava valori che coincidevano con quelli della formula $C_9H_6ONHgOH$.

(¹) P. NEOGI e G. K. MUKHERJEE, « J. Indian. Chem. Soc. », 12, 211 (1935).

(²) P. NEOGI e G. K. MUKHERJEE, « J. Indian Chem. Soc. », 5, 221 (1928).

Ponendo a reagire sia a t. o. che su b. m. bollente l'8-ossichinolina con acetato mercurico, in soluzione acquosa, ottenevo una massa vischiosa rosso-sangue, infiltrabile, che, per aggiunta di una soluzione di cloruro sodico, lasciava deporre una massa rosso sangue. Operando su quantità equimolecolari dei due composti il prodotto ottenuto dalla reazione risultò una monoacetomercuroossichinolina identico a quello ottenuto per reazione fra acetato mercurico ed 8-ossichinolina in soluzione acetica. Operando con eccesso di acetato mercurico (sino a 6 molecole) ottenni invece una polvere rosso bruna, che dava all'analisi valori prossimi a quelli di una diacetomercurioossichinolina: $C_{13}H_{41}O_5Hg_2$.

Il prodotto dimereurato è poco solubile in acqua con colorazione arancione. La soluzione acquosa dà:

con soluzione eterea di cloruro ferrico, colorazione verde erba e precipitato verde;

con solfuro ammonico precipitato gelatinoso giallo a freddo, mentre per lunga ebollizione dà precipitato nero di Hg S;

con acido cloridrico diluito precipitato fioccoso giallo, insolubile a caldo;

con acido solforico diluito precipitato gelatinoso giallo, solubile a caldo;

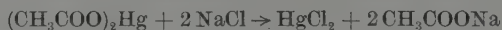
con idrato sodico e con carbonato sodico precipitato giallo arancione, solubile in eccesso di alcali;

con ioduro potassico precipitato giallo pesante.

Per seguire la velocità di reazione fra acetato mercurico ed 8-ossichinolina:



poteva effettuarsi la titolazione dell'acido acetico liberatosi, dopo aver addizionato al liquido di reazione del cloruro sodico per cui avendosi:



diveniva possibile titolare l'acido acetico, in presenza di un eccesso di acetato mercurico. (D'altro canto l'addizione del cloruro sodico precipitando la diacetomercurioossichinolina rendeva possibile il dosaggio che pel colore della soluzione non avrebbe potuto aver luogo). La velocità della reazione fu eseguita operando a t. o. su soluzione acquosa di acetato mercurico alla quale si aggiungeva una soluzione alcoolica di 8-ossichinolina, in quantità tale che la soluzione fosse $\frac{1}{7}$ molare o $\frac{1}{362}$ molare.

Quando la concentrazione molare dell'acetato mercurico era doppia di quella della 8-ossichinolina, la reazione aveva termine rispettivamente entro 9 e 24 ore, mentre se la quantità di acetato mercurico era in rapporti molecolari come 6 : 1 rispetto alla 8-ossichinolina la reazione era praticamente terminata entro 45 minuti. Dopo 7 giorni di contatto di una solu-

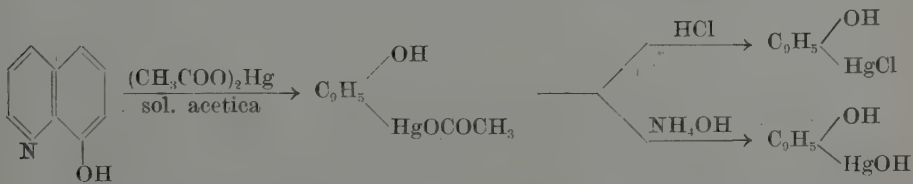
zione contenente $\frac{1}{362}$ di molecola per litro della 8-ossichinolina, e nei rapporti tra acetato mercurico ed 8-ossichinolina ora detti, si notava che l'acido acetico presente corrispondeva a molecole 2,25. Apparve possibile quindi l'introduzione di un terzo gruppo acetomercurico, ma con una velocità di reazione molto piccola. L'esposizione alla luce della soluzione reagente non ha variato i risultati.

Mi parve probabile che neutralizzando con graduali aggiunte di alcali la quantità di acido acetico formatosi, fosse possibile ottenere che altro acetato mercurico reagisse con l'8-ossichinolina.

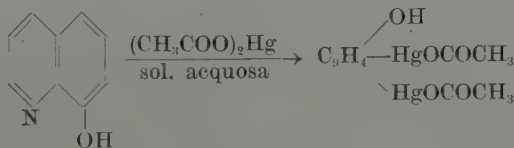
Ripetendo la reazione fra acetato mercurico (6 mole) ed 8-ossichinolina (1 mole) ed in modo che questa avesse una concentrazione $\frac{M}{362}$ per litro, ho eseguito di ora in ora il dosaggio dell'acidità presente su parte aliquota, ed ho quindi neutralizzato tutta la soluzione con idrato sodico N. Dopo 10 ore la quantità di alcali consumato corrispondeva a 4 molecole di idrato sodico per una di 8-ossichinolina. Dopo 24 ore la reazione non aveva ulteriormente proceduto. Isolato il prodotto, precipitandolo con cloruro sodico, si aveva una polvere rosso mattone che dava all'analisi $Hg\%$ 64,10, 63,45, mentre per $C_9H_5ONa(HgOCOCH_3)_2$ si calcola $Hg\%$ 63,89.

È probabile quindi che si tratti del triacetomercuriossalchinolato sodico.

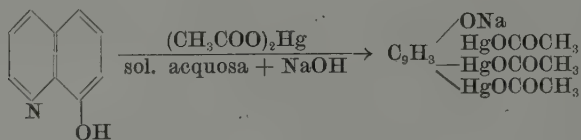
Dalle esperienze eseguite risulta in definitiva *a)* che l'acetato mercurico reagisce con l'8-ossichinolina, in soluzione acetica, sostituendo ad un solo atomo di idrogeno un gruppo HgOCOCH_3 , anche in presenza di eccesso di acetato mercurico, e che nel monoacetomereuro-ossichinolina sia possibile sostituire il gruppo OCOCH_3 , per trattamento con HCl , con il radicale $-\text{Cl}$, e, per trattamento con idrato ammonico, con il radicale $-\text{OH}$:



b) che se la soluzione è neutra inizialmente è possibile operando a t.o. o a b.m. con eccesso di acetato mercurico, sostituire due gruppi HgOOCCH_3 a due atomi di idrogeno nella 8-ossichinolina:



c) che se la soluzione viene continuamente neutralizzata, si riesce operando a t.o. ad introdurre tre gruppi acetomercurici nel nucleo della 8-ossichinolina



Le esperienze continuano.

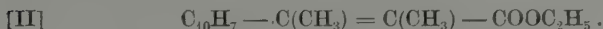
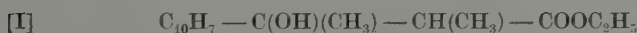
Chimica. — *Sintesi del 2, 3-dimetilnaftoindone-1* ⁽¹⁾.

Nota ⁽²⁾ di E. F. ARCANGELI, presentata dall'Aggregato G. BARGELLINI.

Gli acidi β -naftil-propionici, sostituiti in α e β con radicali vari, si prestano bene alla preparazione di composti indonici, per la possibilità di ciclizzazione in seguito ad eliminazione di una molecola di acqua fra il gruppo carbossilico ed un atomo di idrogeno del nucleo naftalinico. Si possono ottenere vari isomeri, perchè nel caso di acidi β -[naftil-(2)]propionici, la ciclizzazione può avvenire con gli atomi di carbonio del nucleo naftalinico in posizione 1 o 3; nel caso di acidi β -[naftil-(1)]propionici, con le posizioni 2 o 8.

Due soli indoni ⁽³⁾ derivati da acidi β -[naftil-(1)]propionici sono conosciuti fino ad oggi; ma l'interesse di questi composti sembra notevole quando si consideri la loro affinità di struttura con le sterine e gli ormoni sessuali.

Facendo reagire secondo REFORMATSKY ⁽⁴⁾ il metil- β -naftilchetone, con l' α -bromo-propionato di etile, si deve ottenere l'estere etilico dell'acido α , β -dimetil- β -ossi- β -[naftil-(2)]propionico, [I]; da questo per disidratazione si dovrebbe ottenere l'estere acrilico [II], di cui esistono due forme sin ed anti, per stereoisomeria etilenica



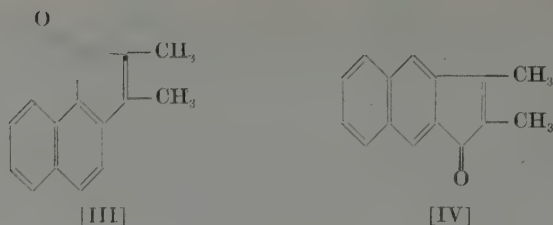
Infine da uno dei due diastereomeri dell'acido corrispondente, per ulteriore disidratazione, e contemporanea ciclizzazione si deve ottenere il 2, 3-dimetilnaftoindone-1, il quale può esistere nelle due forme [III] e [IV], a seconda che la ciclizzazione avvenga con le posizioni 1 o 3 del nucleo naftalinico.

⁽¹⁾ Ricerca eseguita nell'Istituto di Chimica Farmaceutica della R. Università di Pisa.

⁽²⁾ Pervenuta all'Accademia il 18 ottobre 1939-XVII.

⁽³⁾ I. G. Farbenindustrie A. G. — D. R. P. 490538; Kl. 12; « Chem. Zent. », 101, II, 468, 469 (1930); F. PIRRONE, « Atti Accad. Lincei », 19, 6, 102 (1934).

⁽⁴⁾ R. DE' FAZI, « Gazzetta Chimica It. », 49, 1, 242 (1919).



La reazione effettuata con le norme consuete per la sintesi secondo REFORMATSKY, condusse ad un olio, dal quale si poté separare a mezzo di ripetute distillazioni una prima frazione bollente fra 203° e 225° a 34 mm., la quale dopo innesco con cristalli di metil-naftilchetone e raffreddamento a 4-5°, lasciò separare abbondanti quantità del chetone di partenza; ed una seconda frazione bollente a 275-280° a 34 mm., nella quale per quanto si insistesse, sia innescando che raffreddando, non si poté dimostrare presenza del chetone usato nella reazione; ugualmente un trattamento con cloridrato di idrossilammina non diede modo di isolare l'ossima del metil-β-naftilchetone. I valori analitici di questa frazione mostrano trattarsi dell'estere etilico dell'acido α, β-dimetil-β-ossi-β-[naftil-(2)]propionico.

Ma l'olio ottenuto, che all'analisi risultava quasi puro, lasciato a sè, dopo 5 giorni, dava inizio ad una separazione di cristalli del metil-β-naftilchetone.

L'ossiacido, sotto forma di estere etilico, si rivela quindi estremamente instabile; analoga osservazione faceva BANCHETTI ⁽¹⁾, il quale facendo reagire metil-β-naftilchetone con bromoacetato di etile otteneva, dopo disidratazione, l'estere β-metil-β-[naftil-(2)]acrilico; nella saponificazione di questo, per ottenere l'acido, osservava che « se l'estere è stato conservato per molto tempo prima della saponificazione, il rendimento (in acido) è ancora più basso », per cui l'A. era indotto a supporre la possibilità della decomposizione per rottura del legame fra atomi di carbonio e trasposizione di un atomo di idrogeno. Analoga osservazione era stata fatta ancora in precedenza da STOERMER e FRIEDERICI ⁽²⁾, con l'estere β-o-anisil-fenil-idracrilico.

Visto il comportamento dell'estere lattico, e la sua instabilità, si decise di sottoporlo appena distillato, all'azione dell'anidride fosforica, allo scopo di ottenere l'estere acrilico [II], nella speranza che fosse più stabile. Per ebollizione in soluzione benzenica in presenza di anidride fosforica si ottenne un olio colorato intensamente in rosso; da questo per

⁽¹⁾ A. BANCHETTI, « Gazzetta Chim. It. », 69, 398 (1939).

⁽²⁾ STOERMER e FRIEDERICI, « Ber. », 41, 324 (1908).

distillazione a pressione ridotta (34 mm.) si poté isolare una frazione rosso rubino, bollente fra 229 e 230°.

Questo olio innescato con alcuni cristalli rossi, separatisi lungo la canna del refrigerante, lasciava deporre numerosi cristalli dello stesso colore, fondenti, dopo cristallizzazione dell'alcool, a 129,5–130°.

I cristalli testè descritti davano all'analisi valori concordanti per il 2,3-dimetilnaftoindone-1.

L'olio rimasto dopo la deposizione dei cristalli del naftoindone, se trattato con acido solforico concentrato, permetteva di isolare, dopo versamento su ghiaccio, ed estrazione dei prodotti della reazione, il metil- β -naftilchetone; mentre, per ripetuto trattamento con anidride fosforica, in xilolo, lasciava separare nuovi cristalli rosso granato fondenti a 128–130°.

Appare evidente da ciò che l'anidride fosforica, agendo sull'estere naftillattico, ne dà per disidratazione l'estere acrilico corrispondente, ma che la sua azione non si arresta a questo punto, fornendo, per successiva saponificazione, disidratazione e ciclizzazione il derivato naftoindonico; l'acido solforico invece ne favorisce la decomposizione.

La scarsità del prodotto ottenuto non ha permesso di stabilire quale dei due isomeri [III] e [IV] si fosse formato; ma le ricerche continueranno anche in questo senso.

Ringrazio vivamente il Prof. DE' FAZI per il suo costante interessamento.

PARTE SPERIMENTALE.

Preparazione dell'estere etilico dell'acido α , β -dimetil- β -ossi- β -naftil (2)] propionico. (I).

In un pallone da 300 cc., ben secco, vengono introdotti:

gr. 20 di α -bromopropionato di etile

gr. 17 di metil- β -naftilchetone

gr. 6,5 di zinco in piccoli granuli

gr. 30 di benzolo.

I reattivi adoperati erano stati seccati su acido solforico, ed il solvente era stato tenuto su sodio.

Il pallone collegato ad un refrigerante a ricadere chiuso da un tubo a cloruro di calcio, viene scaldato a bagno d'aria con piccola fiamma, per mantenere il liquido in dolce ebollizione. Il riscaldamento viene continuato per 3 ore circa avendo cura di agitare spesso la soluzione, che, col procedere della reazione, assume una densità sempre maggiore. Dopo circa 3 ore quasi tutto lo zinco è disciolto.

Si lascia raffreddare la massa, quindi si versa in imbuto separatore, e si agita con acido solforico al 20 %. Separato lo strato acquoso dal

benzenico, si lava questo fino a reazione neutra, e poi si secca la soluzione benzenica su cloruro di calcio. Si elimina poi il benzolo per distillazione a bagnomaria. Il residuo oleoso molto denso e di colore bruno viene distillato dapprima a pressione ordinaria, fino a 200°, poi nel vuoto a 34 mm.

Si hanno così 3 frazioni:

- a) Fra 200° e 210° (nella quasi totalità a 203°);
- b) Fra 210° e 225°;
- c) Fra 225° e 235°.

Le tre frazioni raccolte si presentano come olii più o meno mobili, colorati in giallo chiaro.

Le prime due frazioni sono costituite quasi esclusivamente da metil β -naftilchetone; infatti seminando nel tubo contenente la frazione a) dei cristalli di metil- β -naftilchetone, e ponendo il tubo nel ghiaccio, si ha in breve tempo cristallizzazione della massa oleosa, mentre la reazione con cloridrato di idrossilammina sulla frazione b) dà un'ossima fondente a 140-145° (p. f. dell'ossima del metil- β -naftilchetone: 145°).

Dalla frazione c) a mezzo ripetute distillazioni si ottiene in definitiva un prodotto bollente tra 275 e 280° a mm. 62, che per raffreddamento a 0°, anche in seguito a semina con metil- β -naftilchetone, non dà traccia alcuna di prodotti solidi. All'analisi si ha:

calcolato per $C_{17}H_{20}O_3$	C % 75,00	H % 7,35
trovato	C % 74,45	H % 7,56 .

L'olio lasciato a sè, depone, dopo 5 giorni, notevole quantità di aghi bianchi fondenti a 52°, che si colorano in giallo arancio con acido solforico concentrato, e danno un'ossima fondente a 144°.

Preparazione del 2,3-dimetilnaftoindone-1 — [III] o [IV].

L'estere etilico dell'acido α , β -dimetil- β -ossi- β -(naftil-(2))propionico distillato di recente, disciolto in benzene anidro, viene fatto bollire a ricadere, in presenza di anidride fosforica. Dopo due ore di ebollizione si eliminano la P_2O_5 ed il benzolo, e si distilla il residuo nel vuoto, ottenendo un'unica frazione, intensamente colorata in rosso rubino che passa fra 229 e 230° a mm. 34. Le ultime gocce del distillato, raffreddandosi, solidificano.

Seminati nell'olio, questi cristalli aumentano continuamente; separati per decantazione e ricristallizzati da alcool-etero, si presentano di colore rosso rubino e fondono a 129,5-130°; all'analisi si ha:

Calcolato per $C_{15}H_{12}O$	C % 86,53	H % 5,71
trovato	C % 86,81; 87,1	H % 5,91; 5,83.

Una piccola porzione dell'olio rosso rubino dal quale si erano separati per decantazione i cristalli, viene trattata con acido solforico concentrato. La soluzione solforica dopo 24 ore viene versata su ghiaccio; si ha una polvere giallastra che fonde, grezza, tra 48 e 52°, e dopo ricristallizzazione a 53°; una mescolanza con metil- β -naftilchetone non mostra alcun abbassamento del punto di fusione.

L'olio che non depone più cristalli sottoposto nuovamente all'azione di anidride fosforica, per 3 ore in xilene bollente, dopo filtrazione ed eliminazione del solvente, lascia un olio arancione, che depone alcuni altri cristalli rossi fondenti a 128-130°.

Geologia. — *Il Calabriano nell'Appennino romagnolo*⁽¹⁾.
Nota preliminare⁽²⁾ di G. RUGGERI, presentata dall'Aggregato M. GORTANI.

Ho iniziato da qualche tempo lo studio del Pliocene romagnolo, e mi sono soffermato specialmente sulla parte superiore di esso, meno conosciuta, perchè meno fossilifera di quella inferiore, e nascosta e mascherata spesso dalla coltre delle sabbie gialle cosiddette « astiane », essa stessa difficile a studiarsi per l'abbondante vegetazione che la ricopre e per la scarsità degli affioramenti.

Abbiamo, a questo riguardo, una prima lista di fossili delle sabbie gialle inolesi del TOLDO⁽³⁾ nel 1905, e una seconda, per la medesima località, del GIGNOUX⁽⁴⁾ nel 1914, in base alla quale, per intuizione non suffragata da prove paleontologiche dimostrative, l'autore pensava di poter attribuire al suo Calabriano la formazione delle sabbie gialle.

Le mie ricerche mi hanno dato fossili in più luoghi; ma specialmente lungo la valle del Santerno, ove, superiormente ai livelli a fauna tipicamente piacentiana, si nota la seguente serie:

1) Marne argillose molto potenti (oltre 100 metri). Costituiscono la parte superiore delle marne azzurre « piacentiane ». Alla loro base si raccoglie, fra l'altro *Cyprina islandica*, *Chlamys septemradiata*, e, a indicare la minima profondità del deposito, *Mytilus galloprovincialis* e *Cardium edule*.

Frequenti vi sono anche frammenti di legno, semi e strobili di conifere, alcuni, secondo una prima determinazione del prof. Tongiorgi, dell'Università di Pisa, di *Pinus sylvestris*, interessante indice di un raffreddamento del clima.

2) Alternanza di sottili strati di sabbie con pochi fossili marini e di argille con *Cyclostoma*. Spessore 5-6 metri.

3) Sabbie marnose grigie, con lenti molto fossilifere. Spessore 3-4 metri. Vi si raccoglie una fauna abbondante e ben conservata, con « habitat » di pochi metri di profondità.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Geologico della R. Università di Bologna.

(2) Pervenuta all'Accademia il 7 luglio 1939-XVII.

(3) G. TOLDO, *Note preliminari sulle condizioni geologiche dei contrafforti appenninici compresi fra il Sillaro e il Lamone*, « Boll. Soc. Geol. Ital. », XXIV (1905).

(4) M. GIGNOUX, *L'étage Calabrien sur le versant nord-est de l'Apennin, entre le M. Gargano et Plaisance*, « Bull. Soc. Géol. de France », Quatrième série, XIV (1914).

4) Panchina molto fossilifera, costituente l'imbasamento delle sabbie gialle, con fauna nettamente litorale (grosse Ostriche, Cardi, Cerizi ecc.).

5) Sabbie gialle, con lenti arenacee o conglomeratiche a ciottoletti silicei. Fossilifere specialmente verso la base, con fauna simile a quella del livello precedente. Affiorano al M. Castellaccio, a Sud di Imola.

6) Marne e sabbie alternate, di circa 1 metro di spessore, con pochi fossili marini.

Oltre che nell'Imolese ho raccolto fossili anche a Pideura (Faenza) e a monte Poggiolo (Forlì), in depositi di marne azzurre.

Le specie finora determinate, per i vari livelli, sono circa 150; numero sufficiente a darci un'idea abbastanza esatta dell'età dei giacimenti.

Per la grande maggioranza si tratta di specie viventi; le sole specie veramente estinte sono:

Tapes senescens (Dod.) che ho raccolto al liv. 4°. Questa specie dal Pliocene perdura fino al più recente Calabriano.

Nassa musiva (Br.) Liv. 1° Dubito si tratti di un esemplare fluitato. Comunque questa specie, frequente nel Pliocene antico, si rinviene ancora nel Siciliano.

Altre specie interessanti sono:

Chlamys septemradiata (Müll.). Vivente anche nel Pliocene antico, si fa particolarmente abbondante nel Calabriano e nel successivo Siciliano. L'ho rinvenuta frequente in tutti i livelli a facies marnosa, con particolare abbondanza a Pideura.

Cyprina islandica (L.). Quantunque sia ancora discusso l'assoluto valore cronologico di questa specie, è certo che essa è abbondante solo nel Calabriano, del quale costituisce, in ultima analisi, l'unico elemento « nuovo » nei confronti del Pliocene antico. In Emilia, sembrava limitata al Piacentino. L'ho raccolta con discreta abbondanza, ma sempre più o meno frammentaria, nel liv. 1, della Val del Santerno, a Pideura ed a M. Poggiolo. Caratteristica comune dei miei esemplari è una spiccata « gracilità ». Curioso il fatto che essa sia abbondante specialmente verso la base dei nostri depositi, ed è forse questa la ragione per cui era sfuggita ai precedenti raccoglitori, che si sono indugiati specialmente sui livelli superiori.

Corbulomya mediterranea (Costa). Frequentissima nell'attualità, non è conosciuta nel Pliocene antico. Abbondantissima al liv. 2°.

Philina aperta (L.). Questa specie, oggi cosmopolita, è conosciuta fossile solo per il Calabriano di M. Mario. Liv. 4°.

Da queste considerazioni consegue, come più logica, l'attribuzione dei nostri depositi al Calabriano.

Risulta così provata con validi elementi la presenza del Calabriano in Romagna, e con faune molto più abbondanti di quelle del Piacen-

tino, che costituivano finora le uniche faune sicuramente calabrianne dell'Emilia.

Ma il risultato più interessante è il forte spessore delle formazioni calabrianne, superiore certamente ai 150 metri, comprendendo così una parte non piccola delle marne a tipo piacentiano.

Ho intenzione di delimitare con precisione questo Calabriano, sia in estensione, sia in profondità; questo studio implicherà un nuovo esame di tutto il Pliocene, ed a questo riguardo ho già raccolto, e vado raccogliendo, materiale paleontologico, onde avere serie per quanto possibile complete per ogni località.

Mineralogia. — *Il berillo di C. Mondei presso Montescheno (Val d'Ossola)* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di L. PERETTI, presentata dall'Aggregato F. SACCO.

Fra i minerali che costituiscono il filone lenticolare di pegmatite intercalata fra gli gneiss tabulari e le anfiboliti gneissiche nella Valle Bravettola (Comune di Montescheno nella Bassa Val d'Ossola) ⁽³⁾, il *berillo*, finora non segnalato da altri, merita una descrizione particolareggiata, e per la sua minor frequenza in natura, e per la sua abbondanza in posto, dove costituisce un vero giacimento minerario, e per il suo interesse petrografico.

Nella cava che, presso C. Mondei, sfrutta la pegmatite per produzione di quarzo e felspati, i cristalli di berillo si rinvennero localizzati in due zone stratiformi — costituite essenzialmente da mica muscovite a squame minute con quarzo e felspati, mentre i grandi cristalli di muscovite, il granato e la biotite vi sono presenti ma quantitativamente subordinati al berillo stesso ed il crisoberillo, pure in nitidi cristalli, vi è straordinariamente raro — affiancate con regolarità ad una massa appiattita di quarzo, giacente subverticale lungo l'asse della lente e rappresentante l'ultima fase del deposito filoniano. La potenza delle zone mineralizzate a berillo è di pochi dm.; la loro superficie scoperta dalla coltivazione è di parecchie decine di metri quadrati.

I cristalli di berillo, sempre con abito prismatico allungato secondo l'A⁸, sono impiantati nella ganga senza un'orientazione definita rispetto all'andamento del filone. Misurano fin oltre cm. 40 di lunghezza e cm. 18 di diametro; il peso massimo riscontrato nei maggiori individui s'avvicina a una decina di chilogrammi.

A seconda della tinta se ne possono distinguere, ad occhio, due varietà: azzurra e grigio-oliva. Il tipo senza confronto più frequente, rappresentato da cristalli di pochi mm. di lunghezza e diametro fino a quelli delle maggiori dimensioni surriferite, presenta colore di massa variabile dal bianco torbido, appena sensibilmente cilestrino, all'azzurro glauco traslucido, a lucentezza da vitrea a grassa. L'altra varietà, a cristalli grigio-

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel Laboratorio di Mineralogia e Geologia del R. Politecnico di Torino.

⁽²⁾ Pervenuta all'Accademia il 2 novembre 1939—XVIII.

⁽³⁾ L. PERETTI, *Filoni di pegmatite a berillo nella Val Bravettola presso Montescheno (Val d'Ossola)*. «Atti R. Accad. Scienze di Torino», vol. LXV. Torino, 1939.

oscuri, a riflessi olivastri, opachi e zeppi di inclusioni, è affatto eccezionale: la osservai rappresentata da quattro piccoli cristalli, di fronte alle molte migliaia esaminate del tipo più comune.

L'abito cristallino è, come di consueto per i berilli delle pegmatiti alpine, assai semplice, risultando spesso soltanto del prisma esagono, mentre la base manca o è maldistinta. Il prisma è solitamente proporzionato: solo per eccezione la riduzione di due facce opposte gl'impartisce una sezione pressochè rombica.

Nei maggiori cristalli compare un prisma diesagono così da risultare qui assai frequente l'associazione, in altre località poco comune: $\{10\bar{1}0\}$ $\{21\bar{3}0\}$ e l'altra: $\{10\bar{1}0\}$ $\{21\bar{3}0\}$ $\{0001\}$. Le facce di $\{10\bar{1}0\}$ e di $\{21\bar{3}0\}$ hanno sviluppo equivalente, ma le prime sono lisce e quasi speculari, mentre le seconde presentano una profonda striatura parallela agli spigoli del prisma che si risolve in una fitta serie di faccette allungatissime di $\{10\bar{1}0\}$. Solo eccezionalmente compare associato con $\{10\bar{1}0\}$ il prisma inverso $\{11\bar{2}0\}$. I valori angolari furono riscontrati soltanto con misure approssimate mediante il goniometro d'applicazione.

Del resto frequentemente le facce dei cristalli non si discernono affatto, perchè li riveste un'incamiciatura tenacemente aderente di lamine micacee, ed essi assumono una forma colonnare cilindrica o affusata. Le basi di alcuni grandi cristalli sopportano aggruppamenti paralleli di numerosi cristalletti prismatici lunghi pochi mm., limpidi, color acquamarina, tutti perfettamente terminati: le faccette della semplice associazione: $\{10\bar{1}0\}$ $\{0001\}$ danno al goniometro di WOLLASTON immagini perfette e la media delle misure concorda con i valori teorici.

Nell'interno di grandi cristalli anche le pareti di fratture beanti sono tappezzate da una generazione di minutissimi cristalli aciculari e isolati di berillo incolore, associati a lamelle esagono di muscovite ed a cristallini di albite. I cristallini di berillo misurano meno di mm. 1 di diametro e mm. 8 di lunghezza massima. Gli spigoli delle basi sono spesso troncati da faccette piramidali, per lo più indeterminabili, data la loro estrema esiguità che non consente misure. Tuttavia ho potuto in un individuo accertare, con discrete misure, l'associazione, relativamente ricca di forme:

$$\{10\bar{1}0\} \{11\bar{2}0\} \{21\bar{3}0\} \{0001\} \{10\bar{1}1\} \{1121\} \{21\bar{3}1\} ? .$$

Tutti i cristalli appaiono incrinati secondo superfici di sfaldatura basale, spesso rotti trasversalmente e coi segmenti spostati — nei maggiori individui anche d'alcuni centimetri — per traslazione laterale o per rotazione intorno all' A^6 , poi rinsaldati da quarzo torbido con lamelle muscovitiche, analogamente a quanto fu già osservato accadere per i berilli d'altre località ossolane. Altri sistemi di fratture isorientate simulano talora una sfaldatura piramidale. Frequenti sono infine i concrescimenti paralleli o paral-

lelo-concentrici di due individui, confermati dall'esame microscopico della distribuzione delle inclusioni.

Al microscopio risulta anzitutto la forte caratteristica *biassicità anomala* nelle sezioni perpendicolari all'A⁶. Anche i cristalli meglio trasparenti appaiono costellati da fitti sciami allungati d'inclusioni puntiformi, che a forte ingrandimento presentano talora libelle mobili, da lamelle rettangole di mica muscovite spesso regolarmente orientate parallelamente alla base o alle facce del prisma, da squamette caolinari o cloritiche; meno comuni figurano fra gli inclusi microscopici: cristallini di quarzo, granato, e biotite cloritizzata (nella varietà grigio-oscuro).

Fu determinato il *peso specifico* con miscela joduro di metilene-xilolo e bilancia di Westphal: risultò:

per la varietà azzurra limpida	p. sp. = 2,718
» » » grigio-oliva . .	» = 2,726

Gli *indici di rifrazione* vennero determinati a luce monocromatica di sodio con totalriflettometro di ABBE-PULFRICH su lamine tagliate parallelamente all'A⁶. I valori medi di parecchie misure risultarono:

	ω	ϵ	B
per la varietà azzurra . .	1,5836	1,5772	64
» » » grigio-oliva	1,5825	1,5750	75

La *composizione chimica* (I) fu stabilita soltanto per la varietà comune azzurra, data la troppo scarsa quantità di materiale disponibile del tipo grigio. L'analisi quantitativa, media di due determinazioni, diede i risultati seguenti: (II è l'analisi del berillo di Craveggia secondo G. SPEZIA ⁽¹⁾ riportata a titolo di confronto):

	I	II
SiO ₂	64,95	65,12
Al ₂ O ₃	17,24	19,65
Fe ₂ O ₃	0,48	0,67
FeO	tr.	
BeO	12,56	11,49
CaO	0,53	
MgO	0,31	0,48
K ₂ O	0,50	
Na ₂ O	0,84	
Li ₂ O	0,13	tr.
Cs ₂ O, Rb ₂ O	ass.	ass.
H ₂ O (per arroventamento) . .	2,28	1,95
Totale	99,82	99,36

(¹) G. SPEZIA, *Sul berillo di Craveggia*. « Atti R. Accad. Scienze di Torino », vol. XVII, Torino 1882.

La marcia dell'analisi fu quella solitamente praticata pei silicati, secondo HILLEBRAND; gli alcali furono dosati col metodo di L. SMITH; BeO fu determinato ponderalmente, precipitandolo con bicarbonato sodico secondo PARSON e BONES: determinazioni mediante l'o-ossichinolina sورتirono risultati abbastanza concordanti. Rubidio e cesio furono ricercati nella soluzione cloridrica degli alcali mediante spettrogrammi eseguiti con spettrografo Zeiss grande modello, Q 24.

Il basso tenore in BeO , che rientra però nei limiti delle analisi di berilli riportate dal DOELTER ⁽¹⁾, è dell'ordine di quello riscontrato nel berillo di Craveggia. Il tenore in alcali, abbastanza elevato, corrisponde ai valori piuttosto alti — per le varietà azzurre — degli indici di rifrazione, della birifrangenza e del peso specifico. Altrettanto spiccate risultano le analogie morfologiche e paragenetiche tra il berillo di Montescheno e i berilli rinvenuti in talune pegmatiti d'altre località della Val d'Ossola a Pallanzeno ⁽²⁾, Craveggia ⁽³⁾ Vallontoliva e Cosasca ⁽⁴⁾.

⁽¹⁾ C. DOELTER, *Handbuch der Mineralchemie*. Dresden, 1912–1931.

⁽²⁾ B. GASTALDI, *Scoperta del berillo nelle rocce cristalline di val d'Ossola*. «Atti R. Accad. Scienze di Torino», vol. VI, 1871; Id., *Berillo di Pallanzeno (Val d'Ossola)*. «Atti R. Accad. Scienze di Torino», vol. VII, Torino, 1872.

⁽³⁾ G. SPEZIA, Nota cit.; G. STRUEVER, *Contribuzioni alla mineralogia della Val Vigizzo*. «Atti R. Acc. Lincei», S. IV, vol. V, Roma, 1889.

⁽⁴⁾ G. LINCIO, *Sul berillo di Vall'Antoliva e di Cosasca*. «Atti R. Accad. Scienze di Torino». vol. XL, Torino, 1905.

Chimica (Chimica biologica). — *Nutrizione e sviluppo sessuale nel gallo* ⁽¹⁾. Comunicazione preliminare di A. ALIBRANDI, presentata ⁽²⁾ dall'Aggregato C. CIACCIO.

Le osservazioni che portarono alla scoperta della vitamina E vennero eseguite nel corso di ricerche sull'alimentazione lattea esclusiva del ratto ⁽³⁾. Da esse e dalle successive ⁽⁴⁾ risultò così che il latte è molto povero di vitamina antisterile. Si è ritenuto che la vitamina E sia l'unico fattore specifico necessario per la normalità dei processi riproduttivi; ma il MARTINO ⁽⁵⁾ nel 1935 comunicava alla Società Italiana di Biologia Sperimentale l'osservazione di un completo arresto dello sviluppo sessuale ottenuto nei giovani polli sottoposti ad esclusiva alimentazione lattea per lungo periodo di tempo. L'arresto dello sviluppo sessuale non è evidentemente dovuto alla deficienza di vitamina E, giacchè i fenomeni di carenza di questo fattore si manifestano — com'è noto — in un periodo successivo al raggiungimento della completa maturità sessuale. Ed infatti nuove ricerche (FULCHIGNONI ed ALIBRANDI ⁽⁶⁾) dimostrarono che il fenomeno non è per nulla modificato (nel suo decorso) dall'aggiunta alla dieta di olio di germi di grano.

La presente indagine sperimentale venne istituita coll'intento di pervenire ad una migliore conoscenza dei fattori specifici la cui carenza è da ritenere responsabile di questo parziale e ben determinato arresto evolutivo.

Sottoponemmo 5 gruppi di animali a diete lattee variamente integrate con sali minerali, con vitamine, con grano crudo o con grano autoclavato. Due altri gruppi furono lasciati, per controllo, ad alimentazione libera, rispettivamente con granturco e con grano.

Lo sviluppo sessuale fu studiato principalmente con successive determinazioni planimetriche eseguite col planimetro polare di AMSLER sugli ortoschiagrammi della cresta. Determinammo pure periodicamente la

⁽¹⁾ Ricerche eseguite nell'Istituto di Fisiologia Umana della R. Università di Messina.

⁽²⁾ Pervenuta all'Accademia il 6 settembre 1939-XVII.

⁽³⁾ MATTEL, « Proc. Exper. a. Med. », 1923, 20, 420.

⁽⁴⁾ CLAYTON, « Journ. Biol. Chem. », 1925, 63, 27.

⁽⁵⁾ MARTINO, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », 1935, 4, 217.

⁽⁶⁾ FULCHIGNONI ed ALIBRANDI, « Quad. Nutr. », 1935, 4, 105.

trasparenza specifica del bargiglio di ogni animale: considerammo l'inverso di questo valore come indice della irrorazione sanguigna dell'organo. Determinammo inoltre (quando esistevano) la capacità fecondante nonchè il grado di combattività ed il comportamento sessuale.

Come componente fondamentale delle diete usammo latte in polvere del commercio in impasto semidenso; come sorgente delle vitamine liposolubili A, D, E, olio di embrioni di grano ottenuto per pressione a freddo, essendo — com'è noto — in esso contenuta una modesta, ma sufficiente quantità anche dei primi due fattori (DAUGOUMAU ⁽¹⁾, MIGUEL ⁽²⁾). Credemmo pure opportuno aggiungere la vitamina B₂, essendo gli uccelli sensibilissimi alla sua carenza e potendosi eventualmente questa, attraverso alterazioni nervose (in animali in via di sviluppo) ripercuotere sull'evoluzione delle ghiandole sessuali. Usammo a tal uopo il cloridrato di aneurina cristallizzato.

Le sostanze minerali venivano conservate in soluzioni concentrate le quali erano poi diluite al momento dell'uso (nella opportuna proporzione) coll'acqua che serviva alla preparazione dell'impasto.

Nella seguente tabella sono riassunti i nostri risultati.

Dieta	Al 94° giorno
1° gruppo: latte + 26 U. I. vit. A + 10 U. I. vit. D + 20 U. R. vit. E + 8 U. C. vit. B ₂ pro die.	Non canta, non combatte, non si accoppia; spermiogenesi assente.
2° gruppo: come sopra + Mg, Fe, Cu, Mn, I, Br.	Canta, combattività discreta, si accoppia con poca frequenza, non feconda le uova; spermiogenesi presente.
3° gruppo: come il precedente meno Fe.	Qualità sessuali più spiccate del precedente: feconda le uova.
4° gruppo: come il primo ma il 40 % del latte (peso secco) era sostituito da grano tenero autoclavato a 134° per 2 ore.	Non canta, non combatte, non si accoppia; spermiogenesi presente.
5° gruppo: come il primo, ma il 40 % del latte (peso secco) era sostituito da grano tenero crudo.	Canta, combatte, si accoppia: feconda le uova.

⁽¹⁾ DAUGOUMAU, Librairie Delmas. Bordeaux, 1935.

⁽²⁾ MIGUEL citato da FLAMINI, *Med. Inf.*, 1937, 8, 3.

I controlli a grano presentarono uno sviluppo sessuale più precoce e più spiccato dei controlli a dieta maidica.

Al 94° giorno un animale di ciascun gruppo fu privato di un testicolo e messo subito dopo ad alimentazione libera (con mais e crusca di frumento). L'animale del primo gruppo raggiungeva uno sviluppo sessuale completo (cioè sufficiente alla fecondazione di uova) dopo circa 20 giorni dall'ammissione a tale dieta.

Al 96° giorno furono sacrificati i rimanenti animali. L'esame istologico dei testicoli rivelò normale sviluppo di questi organi nei controlli: essi presentavano tubuli ampi ed attiva spermatogenesi. Analogo sviluppo, sebbene non così spiccato, delle gonadi presentavano gli animali del 5° gruppo (alimentazione latte con aggiunta di grano crudo). I testicoli del 4° (latte più grano autoclavato) presentavano pochi spermatozoi, mentre quelli del terzo gruppo (latte più sali di Mg, Cu, Mn, I, Br) presentavano spermatozoi in discreta quantità ma sempre in minor numero degli animali del 5° gruppo.

I testicoli degli animali del secondo gruppo presentavano un quadro intermedio fra quello del quarto e quello del terzo gruppo. Quelli del primo presentavano completa assenza di spermatozoi, lumi tubulari assai ristretti; l'epitelio seminale già appariva però pluristratificato.

Possiamo dunque concludere che la dieta con latte in polvere determina se non completo arresto certo un notevolissimo ritardo dello sviluppo sessuale.

È da tener presente che il contenuto in rame del latte in polvere aumenta considerevolmente per i comuni metodi di preparazione (QUAM and HELLWIG ⁽¹⁾); a questo contenuto in rame particolarmente elevato (che corrisponde a 2,7 mg. per litro di latte liquido nei confronti di mg. 0,5 del latte non trattato) si può forse riferire l'attenuazione del fenomeno d'arresto dello sviluppo precedentemente osservato per effetto dell'alimentazione con latte crudo ordinario. È giustificato ammettere che il rame — il quale com'è noto ha la capacità di potenziare l'azione di vitamine e di ormoni — possa accrescere l'attività di riserve vitaminiche già contenute nei tessuti degli animali (polli di due mesi d'età) all'inizio dell'alimentazione con le diete sperimentali.

(¹) QUAM and HELLWIG, « Jour. Biol. Chem. », 1928, LXXVIII, 681.

Botanica (Patologia vegetale). — *Una nuora, grave malattia dell'insalata in Italia: il marciume da « Sclerotinia minor » Jaggy* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di G. GOLDANICH, presentata dall'Aggregato L. PETRI.

Nelle belle coltivazioni orticole della Villa Pontificia di Castel Gandolfo si è manifestata, nei primi mesi del corrente anno, una estesa mortalità nelle piante di insalata e di cicoria: queste, che crescevano in perfette condizioni di vegetazione, marcivano e morivano improvvisamente quando ormai si trovavano vicine alla maturità commerciale.

La causa di tale inconveniente è rimasta per molto tempo oscura perchè sui cespi in via di deperimento non si osservava, nè si riusciva ad isolare, altro che la *Botrytis vulgaris* e molti batteri, mentre i caratteri del marciume, il suo decorso, e specialmente le condizioni ambientali in cui crescevano i soggetti colpiti facevano escludere che tali organismi potessero considerarsi gli agenti veri e primi del marciume medesimo.

Fu soltanto con un sopralluogo che potei accorgermi che l'inizio del marciume si verificava nella parte radicale delle piante, specialmente nella zona del colletto, e che nel fittone delle piante morte — che rimaneva nel terreno quando si cercava di strappare il cespo — erano presenti dei piccolissimi corpi neri (grossi all'incirca quanto un seme di senape o di trifoglio) i quali rivestivano la cavità lasciata dalla scomparsa del midollo centrale. Portati in cultura artificiale questi corpi neri (che si rivelarono poi come sclerozi) germinarono rapidamente producendo delle rigogliose colonie bianche in cui nel corso di pochi giorni si differenziavano una quantità enorme degli stessi corpi, pressappoco eguali a quelli che crescevano sull'ospite.

Vennero allora fatte, nel nostro Campo sperimentale, delle inoculazioni artificiali su piante di insalata e di cicoria sane ottenendo, con una rapidità sorprendente, la riproduzione fedele del marciume di Castel Gandolfo.

L'esame morfologico delle culture mi ha portato ad una facile individuazione del parassita: si tratta della *Sclerotinia minor*, descritta nel 1920 dallo JAGGER in America ⁽³⁾.

La *Scl. minor* è conosciuta attualmente come uno dei più gravi parassiti della insalata, della cicoria, della indivia e di altre piante orticole.

(1) Ricerche eseguite nella R. Stazione di Patologia vegetale di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 23 settembre 1939 XVII.

(3) C. JAGGER, « *Sclerotinia minor* » n. sp. the cause of a decay of lettuce, celery and others crops, « Journ. Agr. Res. », 20, 1920, pp. 331-334.

La sua presenza è stata segnalata e lamentata specialmente negli Stati Uniti di America ⁽¹⁾, nella Francia ⁽²⁾ ed in Germania ⁽³⁾ in coltivazioni sotto vetro od all'aperto. Essa causa delle altissime percentuali di perdita del prodotto, non di rado fino all'80 %. In Italia la specie venne isolata nel 1932 da SAVASTANO in Sicilia da frutti di limone caduti per terra, su cui causava una sorta di marciume ⁽⁴⁾. Nella Penisola non era mai stata prima d'ora segnalata.

I caratteri del marciume da *Scl. minor* sono i seguenti: L'infezione si inizia quasi sempre nella zona del fittone radicale che fuoriesce dal terreno. Il micelio non ha bisogno di ferite o di lesioni di alcun genere per penetrare; sperimentalmente è dimostrato che egli invade le piante attraverso tessuti epidermici indenni. Il micelio vive saprofiticamente nel terreno alla cui superficie forma una specie di lievissima ragnatela che si espande man mano venendo a contatto con sempre nuovi ospiti; così si spiega il diffondersi epidemico del marciume dopo che si sono verificati i primi casi di mortalità in un appezzamento coltivato.

Il disfaccimento dei tessuti della zona del colletto avviene rapidamente; le foglie allora incominciano ad appassire, a rilassarsi, si adagiano sul terreno dove divengono gialle, quindi brune, e marciscono sotto l'azione della flora ubiquitaria che loro viene a contatto. Le prime a soccombere sono le foglie esterne, poi man mano quelle sempre più interne; trattandosi di lattuga quelle riunite nella « palla » centrale resistono per più tempo per poi cadere afflosciate anch'esse in una massa bruna fradicia. Quasi costantemente si ha il distacco della parte aerea da quella radicale data la repentina distruzione dei tessuti nel loro punto di unione.

Il decorso della malattia è rapido. Nelle mie prove di riproduzione artificiale ho avuto la morte delle piante di insalata e di cicoria in meno di tre giorni.

⁽¹⁾ W. S. BEACH, *The lettuce « drop » due to « Sclerotinia minor »*. « Pa. Agr. Exp. Sta. Bull. », 165, 1921, 27 pp.; R. E. SMITH, « *Botrytis* » and « *Sclerotinia* »: *their relation to certain plant diseases and to each other*. « Bot. Gaz. », 29, 1900, pp. 369-407; G. F. WEBER and A. C. FOSTER, *Diseases of lettuce, romaine, escarole and endive*. « Florida Agr. Exp. Sta. Bull. », 195, 1928, pp. 303-333.

⁽²⁾ F. LABROUSSE, *La maladie des laitues en Alsace et le « Sclerotinia minor » Jagger*. « Rev. Path. Vég. et Entom. Agric. », 17, 1930, pp. 369-374; E. ROSELLA, *La maladie du collet de la laitue, ses causes et ses remèdes*. « Progr. Agric. et Vit. », 107, 1937, pp. 496-497; 514-515; 537-539.

⁽³⁾ K. FLACHS, *Durch « Sclerotinia minor » Jagg. hervorgerufene Salatfäule und Versuche zu ihrer Bekämpfung*. « Gartenbauwissenschaft », 5, 1931, pp. 541-556; H. WASEWITZ, *Beiträge zur Biologie und Bekämpfung der durch « Sclerotinia minor » Jagg. verursachte Salatfäule*. « Angew. Bot. », 20, 1938, pp. 70-118.

⁽⁴⁾ G. SAVASTANO, *Ricerche sperimentali sul marcio del frutto degli agrumi*. « Boll. R. Staz. Pat. Veg. », XII, n. 5, 1932, pp. 324-325.

Contemporaneamente all'appassimento della parte aerea procede la differenziazione degli sclerozi. Questi si formano sul micelio bianco che aveva avvolto tutto il colletto e la porzione inferiore delle foglie. Per il loro colore e le piccole dimensioni sono difficilmente individuabili sul vegetale sporco di terra e specialmente nella terra stessa. Qui rimangono vitali per molti anni pronti a ripetere l'infezione quando vengono a contatto con ospiti idonei.

Gli sclerozi son neri, di forma irregolarmente rotondeggiante, più o meno sporgenti dalla matrice e di grossezza variabile dai 660 ai 1050 μ . In certi substrati ed anche sugli ospiti hanno tendenza a riunirsi in croste scleroziali di ampiezza variabile da pochi millimetri a qualche centimetro. Temperatura, umidità, natura e quantità del substrato influiscono in modo vario sul loro aspetto e sulle loro dimensioni. Notevole è il fatto — che ho confermato con le mie esperienze — che a temperatura più bassa gli sclerozi sono più piccoli ⁽¹⁾, contrariamente a quello che avviene nella maggior parte delle altre Sclerotinie.

Le colonie allevate su pezzi di vegetali, quali patata, carota, girasole, insalata trasformano i tessuti in una massa acquosa. Dai saggi preliminari compiuti mi sembra che questa trasformazione avvenga con una rapidità ed una intensità tanto maggiore quanto maggiore è la recettività della pianta al parassita; simile fatto, se vero, potrebbe essere di ausilio per una eventuale ricerca di piante resistenti.

Non son riuscito ad ottenere mai la forma ascofora dagli sclerozi; la difficoltà a differenziare gli ascomi è stata segnalata già da altri AA.

Il micelio produce una forma microconidica: all'apice delle ife o su brevi ramificazioni laterali nascono degli elementi rotondeggianti completamente ialini, dotati di un'ampia vacuolatura centrale, ma più spesso eccentrica, grossi 3-3,6 μ . Notoriamente il significato di questi elementi conidiformi non si conosce con esattezza; non sembra che abbiano importanza alcuna nel diffondere la malattia.

La *Scl. minor* trova il suo *optimum* di sviluppo ad una temperatura aggirantesi sui 22° C. A 35° C e a temperatura inferiore a 0° C. cessa di crescere. È molto resistente al freddo: degli inoculi su agar nutritizia in capsule racchiuse nel ghiaccio per 36 ore, hanno prodotto delle colonie regolari una volta trasportati a temperatura conveniente. Per questa proprietà il marciume si diffonde e si propaga anche nelle celle o nei carri refrigeranti come è stato più volte osservato in America ⁽²⁾.

⁽¹⁾ A. H. CHIVERS, *A comparative study of « Sclerotinia minor » Jagg. and « Sclerotinia intermedia » Ramsey in culture.* « Phytopath. », 19, 1929, pp. 301-309.

⁽²⁾ G. B. RAMSEY, « *Sclerotinia* » species causing decay of vegetables under transit and market conditions. « Journ. Agr. Res. », 31, 1925, pp. 597-632.

La lotta contro il marciume da *Scl. minor* è basata su un complesso di pratiche culturali, ma specialmente nella disinfezione del terreno mediante antisettici liquidi o pulverulenti o mediante il calore.

Ritengo che la *Scl. minor* non sia limitata alla località in cui l'ho osservata, ma che al contrario sia abbastanza diffusa in Italia. Ad essa è probabile che siano da attribuire diversi casi di deperimento per marciume delle coltivazioni di insalata e di cicoria che si verificano in più parti d'Italia – segnalati spesso anche a questa Stazione – la cui eziologia era rimasta finora incerta o si faceva risalire a fenomeni di parassitismo che non giustificavano i caratteri sintomatologici ed epidemiologici del marciume stesso.

Fisiologia. — *Azione dell'ammide nicotinica sugli eritrociti e sui leucociti del sangue di animali normali* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di ANTONIETTA ORRÙ, presentata dall'Aggregato S. VISCO.

In una Nota precedente ⁽³⁾ ho riportato i risultati di alcune esperienze eseguite per studiare l'azione dell'acido nicotinico sugli eritrociti e sui leucociti del sangue di animali normali.

Riporto qui i risultati ottenuti con esperienze condotte con tecnica e finalità identiche ma in cui invece dell'acido nicotinico, fu iniettata l'ammide nicotinica.

Gli animali usati per l'esperimento furono: conigli, cavie e colombi tenuti in condizioni normali di ambiente e di alimentazione.

Esperienze sui conigli. — In diversi conigli, che ricevevano come alimento verdura fresca a volontà, furono determinati nel sangue, ad intervalli di 2–3 giorni: il numero di eritrociti e di leucociti con il contaglobuli di Thoma–Zeiss, ed il contenuto in emoglobina con l'emometro di Sahli.

Contemporaneamente si seguirono le variazioni ponderali degli animali e si fecero i preparati di sangue a secco.

L'ammide nicotinica venne iniettata per via endomuscolare nelle seguenti dosi giornaliere:

coniglio n. 75 = mgr. 5 di ammide in cc. 0,25 di H₂O

» n. 73 = » 10 » » » cc. 0,50 » »

» n. 74 = » 15 » » » cc. 0,75 » »

Riporto nella tabella I i dati che si riferiscono a queste esperienze.

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Generale della R. Università di Roma.

⁽²⁾ Pervenuta all'Accademia il 7 agosto 1939–XVII.

⁽³⁾ A. ORRÙ, « Rend. R. Acc. Lincei », XXIX, pag. 333, 1939–XVII.

Dall'esame di tali dati si rileva quanto segue:

a) In tutti e tre gli animali si osservò, dopo il trattamento con ammidie nicotinica, un aumento dei globuli rossi, nei confronti dei valori osservati prima del trattamento.

b) Tale aumento, nel coniglio che ricevette 5 mgr. di ammidie si verificò alla 7^a iniezione e proseguì fino alla 15^a iniezione. Dopo tale periodo il numero degli eritrociti si abbassò per risalire poi e raggiungere i 7.280.000 alla 25^a iniezione. Un'altra diminuzione con successivo aumento di ebbe tra la 33^a e la 49^a iniezione e così di seguito ma con oscillazioni meno pronunziate. Dopo la 69^a iniezione la somministrazione di ammidie venne sospesa ed il numero dei globuli rossi dopo 54 giorni da tale sospensione si abbassò a 5.120.000.

Nessuna variazione degna di nota si poté osservare nel numero di leucociti, mentre si ebbe un lieve aumento del valore emoglobिनico.

Il peso dell'animale durante il periodo sperimentale aumentò.

c) Nel coniglio che ricevette giornalmente mgr. 10 di ammidie, il numero degli eritrociti aumentò in maniera decisiva, verso la 10^a iniezione, dopo di che si mantenne costantemente, più elevato del normale, pure oscillando tra 6.000.000 e i 7.000.000. Dopo la 32^a iniezione il trattamento venne sospeso; dopo 5 giorni di sospensione il numero di eritrociti si manteneva ancora intorno ai 7.000.000; dopo 22 giorni esso tendeva a diminuire pur mantenendosi sui 6 milioni e mezzo circa.

Il numero dei leucociti ebbe tendenza ad aumentare durante il periodo in cui venne somministrata l'ammide, ed altrettanto può dirsi dell'emoglobina. Il peso dell'animale aumentò lievemente.

d) Nel coniglio che ricevette 15 mgr. giornalieri di ammidie nicotinica, l'aumento del numero dei globuli rossi fu ancora più notevole: esso si osservò subito dopo la 3^a iniezione e con lievi oscillazioni, si fece sempre più pronunziato fino a portarsi verso alla 30^a iniezione intorno agli 8.400.000, senza mai abbassarsi fino al valore normale osservato precedentemente al trattamento. Dopo la 32^a iniezione il trattamento venne sospeso: e ad 11 giorni dalla sospensione il numero di eritrociti si era abbassato a 6.520.000.

Il numero dei leucociti ebbe tendenza ad aumentare durante la somministrazione dell'ammide e fu pure in aumento il valore emoglobिनico.

Anche il peso dell'animale, che nel periodo precedente il trattamento si manteneva costante, aumentò in seguito al medesimo.

Esperienze sulle cavia. — Si tennero in osservazione 4 cavia che ricevevano per alimentazione erba fresca a volontà. In ognuna di esse si determinò, ogni 4-5 giorni il numero di globuli rossi, sia nel periodo precedente il trattamento con ammidie nicotinica, sia durante il periodo in cui questa sostanza venne giornalmente iniettata per via endomuscolare ed in dosi varie.

Contemporaneamente si seguirono le variazioni ponderali di ogni animale durante l'intero periodo.

L'ammide nicotinică venne iniettata nelle seguenti dosi:

cavie n. 120 e 121 = mgr. 2,5 sciolti in cc. 0,25 di H_2O

» » 108 e 109 = » 5 » » cc. 0,50 » »

Nella tabella II sono riportati i dati che si riferiscono a queste esperienze. Uno sguardo ai dati così riuniti permette di rilevare quanto segue:

Le cavie che ricevettero giornalmente mgr. 2,5 di ammide nicotinică, presentarono dopo 2 iniezioni un netto aumento del numero di eritrociti (2 milioni circa). Dopo questo primo aumento nella cavia 120 si ebbe un abbassamento del numero di eritrociti fino ai valori iniziali, ed un successivo innalzamento dopo il quale il numero si abbassò nuovamente e rimase a tale livello per tutto il periodo dell'esperimento che durò 49 giorni.

Il peso dell'animale che nel periodo di osservazione si mantenne presso a poco costante, sospese le iniezioni, cominciò a diminuire. La cavia morì 8 giorni dopo.

Nella cavia 121 dopo il primo aumento se ne ebbero altri due molto lievi, ma verso la 43^a iniezione il numero di eritrociti tendeva ad abbassarsi anche al disotto del valore iniziale.

Contemporaneamente il peso dell'animale verso la fine del trattamento tendeva ad abbassarsi.

Nelle cavie che ricevettero mgr. 5 giornalmente di ammide nicotinică, si notò soltanto per la cavia n. 108 un leggero aumento del numero di eritrociti verso la 14^a e la 24^a iniezione. L'animale perdette lentamente di peso e morì dopo la 54^a iniezione.

Nella cavia n. 109 non si poterono notare notevoli variazioni del numero di eritrociti: anche questo animale cominciò a perdere di peso dopo l'inizio del trattamento e morì dopo la 54^a iniezione.

Esperienze sui colombi. — Fu seguito il comportamento del numero di globuli rossi di due colombi alimentati con mais giallo e dei quali il n. 35 ricevette giornalmente per via endomuscolare, mgr. 2,5 di ammide nicotinică sciolta in cc. 0,25 di H_2O ed il n. 25 ne ricevette giornalmente mgr. 5 sciolti in cc. 0,5 di H_2O .

Nella Tabella III si riportano i dati che riguardano queste esperienze.

I dati così riuniti mettono in evidenza che l'ammide nicotinică nella dose di mgr. 2,5-5 giornalieri non ha nessuna azione sul numero di eritrociti di colombi del peso di gr. 350-400 circa, almeno nelle condizioni sperimentali da me considerate. Il peso degli animali per tutta la durata dell'esperimento si è mantenuto costante.

TABELLA II.

Cavia N. 120 (femmina)				Cavia N. 121 (femmina)				Cavia N. 108 (maschio)				Cavia N. 109 (maschio)			
N. giorni	Peso animale gr.	Milioni di eritrociti per mmc.	N. giorni	Peso animale gr.	Milioni di eritrociti per mmc.	N. giorni	Peso animale gr.	Milioni di eritrociti per mmc.	N. giorni	Peso animale gr.	Milioni di eritrociti per mmc.	N. giorni	Peso animale gr.	Milioni di eritrociti per mmc.	
1	395	4.72		1	417		5.73	1		325	4.80		1	360	4.40
4	345	4.84	4	380	5.84	5	387	4.40	4	370	5.42				
4	Iniezione giornaliera di mgr. 2.5 di ammidè nicotínica		4	Iniezione giornaliera di mgr. 2.5 di ammidè nicotínica		10	400	3.68	9	405	4.56				
			16			422	4.76	14	420	5.68					
			23			443	5.12	20	440	4.36					
			27			426	5.00	27	467	4.64					
7			35	468	4.88	31	442	5.36	31	442	5.36				
			47	525	4.92	39	442	4.88							
			Iniezione giornaliera di mgr. 5 di ammidè nicotínica		52	Iniezione giornaliera di mgr. 5 di ammidè nicotínica		51	493	4.72					
			54	470	5.24	59	465	5.48							
			58	505	4.72	62	489	4.68							
			62	460	5.68	66	450	4.88							
51			66	459	6.18	70	460	5.48							
			69	455	6.38	73	435	4.72							
			73	450	4.04	77	445	4.32							
			76	436	5.82	80	435	4.80							
			84	441	6.16	84	435	4.80							
			86	398	4.52	90	390	5.36							
			94	402	5.01	98	407	4.88							
57			99	385	5.12	103	394	5.00							
			102	380	4.44	106	400	6.00							
59	315	—	60	409	—	106	+	—							

TABELLA III.

Colombo N. 35			Colombo N. 25		
N. giorni	Peso animale gr.	Milioni di eritrociti per mme.	N. giorni	Peso animale gr.	Milioni di eritrociti per mme.
1	322	4.00	1	394	3.20
3	325	4.36	3	408	3.60
9	300	3.36	9	405	3.76
13	270	3.20	13	395	3.42
17	252	3.28	17	380	3.76
23	285	3.28	23	410	4.64
30	305	3.64	30	400	3.68
36	276	3.60	36	395	3.36
40	320	3.51	40	409	4.16
48	272	3.84	48	379	3.48
60	334	3.64	60	373	3.92
75	327	4.00	75	395	3.92
75	Si iniettano giornalmente mgr. 2.5 di ammido nicotina		75	Si iniettano giornalmente mgr. 5 di ammido nicotina	
78	302	4.00	78	370	3.68
82	316	3.68	82	380	4.96
86	332	3.12	86	402	3.48
90	321	3.36	90	395	4.12
93	330	3.60	93	405	3.42
101	337	3.52	101	423	3.92
109	337	3.76	109	370	3.76
115	332	4.24	115	385	3.04
121	327	4.00	121	397	4.00
124	350	4.00	124	400	4.00
124	Si sospende il trattamento		124	Si sospende il trattamento	
127	350	—	127	426	—
134	335	—	134	405	—

CONCLUSIONI.

L'insieme delle esperienze sopra riportate permette di trarre le seguenti conclusioni:

a) *Eritrociti*: L'ammide nicotinica somministrata in piccole dosi a conigli e cavie alimentati normalmente, esercita, come l'acido nicotinico, un'azione stimolante sugli organi ematopoietici, con conseguente aumento del numero degli eritrociti. Per le dosi considerate la sua azione fu più efficace nei conigli, nei quali il numero di eritrociti, una volta aumentato di 2-3 milioni al disopra del numero iniziale, si mantenne elevato per tutto il periodo sperimentale. Nelle cavie l'aumento del numero di globuli rossi non fu molto pronunziato, forse in conseguenza del fatto che le dosi somministrate raggiungevano già il limite di tossicità, come può dedursi dal fatto che i due animali che ricevevano giornalmente mgr. 5 di ammide morirono 54 giorni dopo l'inizio del trattamento.

Nelle dosi di mgr. 2.5-5 giornalieri l'ammide nicotinica non ha modificato il numero di eritrociti di colombi in maniera apprezzabile (¹).

b) *Leucociti ed emoglobina*: Il numero dei leucociti ed il valore emoglobinico nei conigli in seguito al trattamento con ammide nicotinica ebbero tendenza ad aumentare.

Mi riservo in una prossima Nota di riferire i risultati ottenuti dall'esame morfologico del sangue degli animali trattati con ammide nicotinica.

(¹) È interessante notare qui le osservazioni fatte recentemente dal PEARSON («Journ. Biol. Chem.», 129, 491, 1939) secondo le quali quasi tutto l'acido nicotinico presente nel sangue si trova nei globuli rossi.

A partire dalla presente Serie VII, che la Reale Accademia d'Italia pubblica in continuazione della Serie VI della Reale Accademia dei Lincei, i sunti dei verbali delle Adunanze della Classe, anzichè nei *Rendiconti*, saranno pubblicati, insieme coi verbali delle altre tre Classi, nell' *Annuario*, come è norma dell'Accademia d'Italia.

COMUNICAZIONI

Qualche prospettiva mineraria dell'Africa Orientale Italiana

Comunicazione ⁽¹⁾ di S. E. FEDERICO MILLOSEVICH

Ricordate, camerati, i primi giorni di maggio del 1936-XVI. Quei memorabili giorni, rari nella vita di un uomo, nei quali l'animo si rivolge grato a Dio per averci concesso la gioia di viverli. Il 9 maggio il DUCE dallo storico balcone di Palazzo Venezia aveva dato agli Italiani l'annuncio della conquista e della fondazione dell'Impero,

In quel momento la domanda: Che cosa ci può dare l'Impero? correva sulle bocche e nel pensiero di tutti e l'entusiasmo generale faceva concepire le più rosee speranze.

Alla domanda, per quanto riguarda le materie prime minerali, i competenti non potevano trarre risposta, se non dallo spoglio della scarsa letteratura in proposito posta a facile disposizione di tutti con la pubblicazione avvenuta nel 1935 della carta Geologica dell'Eritrea, della Somalia e dell'Etiopia, per opera dell'illustre e compianto nostro Socio GIUSEPPE STEFANINI. Un'accurata bibliografia, in appendice alla Memoria illustrativa della carta, offriva materiale di facile elaborazione per articoli che apparvero in quel tempo in quotidiani e riviste varie, con intenti anche vari, dalla semplice enumerazione di notizie interessanti l'industria estrattiva dell'Impero del Negus e delle nostre colonie primogenite, con fugaci accenni a probabili giacimenti minerari, alla divulgazione dei risultati degli studi e dei rilievi geologici compiuti dalle varie missioni scientifiche nell'immensa regione.

Su scarsi dati di fatto, quali i risultati delle ricerche e delle coltivazioni minerarie che si erano venute gradatamente sviluppando nell'Eritrea e le informazioni non tutte attendibili sui permessi d'indagine concessi dal Negus nel territorio dell'Impero e sulle imprese di pochi seri e coraggiosi tecnici prima e più importante fra tutte quella per lo sfruttamento delle eluvioni e delle alluvioni platinifere a Jubdo nel paese dei Galla,

(1) Letta nell'Adunanza del 18 novembre 1939-XVIII.

iniziata da un valoroso pioniere italiano A. PRASSO e di molti filibustieri senza competenza e senza scrupoli, era lecito abbandonarsi ad induzioni non troppo fondate.

Era noto inoltre che da secoli e secoli si continuava ad estrarre oro dalle alluvioni dell'ovest e da qualche affioramento superficiale eccezionalmente ricco dei filoni di quarzo aurifero nel massiccio cristallino.

Al primo orientamento generico seguì la preparazione di un programma di razionale ricerca e la sua graduale attuazione.

Data l'estensione dell'area da esplorare, bisognò cominciare con itinerari di prospezione in vastissima scala. All'uopo nel codice minerario dell'Impero si introdusse l'istituto giuridico del permesso di indagine, fase preliminarissima di un'impresa mineraria in terre vergini.

Si costituirono presto compagnie di ricerca con capitali associati di forti industrie del Regno. Lo Stato stesso contribuì con suoi fondi al capitale di alcune di esse e creò per suo conto, a tutto suo carico, una Regia Azienda Mineraria.

Si ingaggiarono tecnici, richiamando anche da paesi e colonie africane numerosi italiani, che alla prospezione e all'esercizio dell'industria estrattiva stavano dedicando la loro attività coraggiosa e intelligente; si diede a qualche giovane elemento adatto una sommaria istruzione di mineralogia pratica; si formarono squadre di ricerca fornite dell'indispensabile armamentario del prospettore pratico e anche di mezzi adatti per determinazioni ed analisi più precise; altre poche furono attrezzate, oltre che per un vero e proprio rilievo geo-minerario, anche per l'applicazione dei metodi d'indagine della moderna geofisica mineraria e incominciò un lavoro fervido e vario. Dal rilevamento geologico a scopo prevalentemente scientifico con il conseguente accurato studio in laboratorio di campioni di rocce e di fossili, come quello diretto dal camerata DAINELLI per conto di questa Accademia, a quello geologico e geofisico eseguito da un gruppo di specialisti italiani e tedeschi; dallo studio delle strutture tettoniche dei terreni sedimentari a scopo di ricerca petrolifera organizzato dall'A. G. I. P. con geologi e geofisici di sicura competenza, alla prospezione comune, con raccolta e determinazione sommaria di minerali e rocce per itinerari pre-stabiliti e alla esecuzione anche di superficiali lavori, come scavi di pozzi e trincee in qualche affioramento particolarmente interessante.

A questo complesso lavoro servì da prima direttiva generica un esame sintetico della costituzione geologica dell'Impero sulla carta e sulle pubblicazioni che fornirono ad essa gli elementi fondamentali. Ciò permise di limitare in buona parte l'area della ricerca con l'eliminazione di quelle formazioni geologiche nelle quali è da escludere *a priori* il ritrovamento di giacimenti minerari importanti. La estesa copertura basaltica, o le erte ambe delle prime eruzioni, possono presumersi sterili di manifestazioni metallifere e in genere anche di minerali utili, tranne forse qualche accu-

mulo intertrappico di combustibili fossili. Presso a poco si può dire altrettanto delle formazioni eruttive più recenti. E neanche è probabile l'esistenza di considerevoli giacimenti metalliferi nei calcari marini dell'era secondaria che per estensioni cospicue scendono dall'altipiano del Tigrai alla Somalia. Si può pensare invece all'esistenza di depositi di petrolio nei terreni triassici di *facies* lagunare, come quelli di Lugh nella Somalia o in quelli eocenici della Somalia Orientale, o anche in quelli più recenti della serie di Aden sulle rive del Mar Rosso nella regione costiera di Massaua e nelle isole del Mar Rosso.

Tranne che per il petrolio, le ricerche minerarie si orientarono quindi necessariamente verso i terreni antichi dell'imbasamento cristallino del grande acrocoro etiopico, dove essi affiorano nelle regioni elevate e soprattutto sui fianchi erosi occidentali ed orientali.

Su questa orientazione iniziale di massima il lavoro di ricerca dei tesori occulti della terra dell'Impero continua alacramente e incomincia a dar frutto, ma è ben lungi dall'essere compiuto e non si può dire neanche molto avanzato per l'insita difficoltà delle cose: area immensa, percorsi lunghissimi e assai disagiati, numero limitatissimo di elementi idonei a tale lavoro in specie e alla vita coloniale in genere.

Siamo, come sapete, preparando la coscienza coloniale della gioventù italiana, come diamo opera ad aumentare i quadri, ancora un poco ristretti, dei tecnici minerari, che l'attività molto intensa dell'industria estrattiva assorbe completamente nella Madre Patria.

E d'altronde, la terra nasconde gelosamente i suoi segreti nelle zone vergini dei climi tropicali, dove la fitta vegetazione, le estesissime alluvioni, il potente crostone lateritico possono coprire affioramenti anche cospicui.

Con tutto ciò i risultati parziali già raggiunti sono la prova sicura che, a suo tempo, anche in questo campo arriderà il successo all'opera alacre e coraggiosa dei nostri pionieri.

Non di tutti i risultati raggiunti intendo intrattenervi: abuserei della Vostra pazienza, camerati illustri, e invaderei d'altronde molti campi, di cui ho parziale, o sola indiretta, conoscenza. Molto succintamente vi esporrò invece quanto si è fatto e quanto si sta facendo nell'Impero per la ricerca dei giacimenti auriferi e per la produzione del prezioso metallo supremo oggetto della cupidigia umana.

L'oro è assai diffuso nell'Impero. Dovunque affiora la formazione fondamentale scistoso cristallina prepaleozoica e specialmente nel suo lato occidentale, è possibile trovare filoni di minerale aurifero. Tutti i fiumi dell'ovest, che nel loro corso superiore erodono le rocce di questa formazione, convogliano oro ai loro depositi alluvionali. Uguali condizioni, in linea generale, si riscontrano nel Kenia e nel Tanganika, cosicchè si può veramente concepire un unico, per quanto complesso, e grandioso processo metallogenico ed un'unica, se pur varia e discontinua, provincia metalli-

fera di immensa estensione. Questa provincia, limitando le nostre induzioni storiche alla parte che rientra nei confini dell'Impero, è conosciuta come tale da migliaia di anni.

Se può essere un volo di fantasia rimontare ai 5000 anni av. G. Cr., agli inizi cioè della prima dinastia Faraonica, è certo però che l'Egitto ebbe per secoli e secoli relazioni con le popolazioni dell'Etiopia e che questa fornì oro al vicino impero di civiltà più progredita. Sicchè cade opportuna l'osservazione che le alluvioni più ricche, più superficiali e più facilmente accessibili sieno state per prime scoperte e sfruttate. Lo stesso si può dire degli affioramenti eluvionali o filoniani eccezionalmente ricchi. Non è quindi probabile che in qualche luogo dell'impero possa rinnovarsi la folle corsa alla caccia dell'oro che si verificò in California, in Australia e più tardi in tanti altri luoghi del mondo al primo annuncio della scoperta di depositi alluvionali superficiali eccezionalmente ricchi ed estesi.

I giacimenti filoniani meglio noti e posti già in grado di dare oggi una produzione regolare sono quelli entro i confini della colonia primogenita. Benchè lavorati *ab antiquo*, l'inizio del loro recente sfruttamento risale a quel periodo di assetto dall'Eritrea dopo il turbinoso periodo di conquista e di guerra, che è merito di Ferdinando Martini.

Nell'altipiano centrale, nella regione di Cheren e nel bassopiano occidentale le zone dove si riscontrano manifestazioni aurifere coprono una area di circa km² 4.000 di cui la parte più estesa, tre quarti approssimativamente del totale, appartiene al bassopiano, cioè alle valli del Barca, del Gase e del Setit. Si contano a decine nelle varie zone e complessivamente raggiungono il numero di alcune centinaia. Mentre l'estensione del fenomeno metallogenico è tanto vasta la concentrazione è variabilissima, e solo localmente, stando alle nostre attuali cognizioni, favorevole ad una regolare e redditizia coltivazione mineraria.

Si tratta, nella massima parte dei casi, di filoni di quarzo aurifero che, pure con differenze morfologiche e con dimensioni variabili entro limiti molto estesi, presentano tutti strette analogie di costituzione, sono incasati in formazioni della stessa natura litologica, con le quali hanno anche analoghi rapporti di giacitura, e sono tutti collegati ad un unico e grandioso fenomeno eruttivo da cui ripetono comune origine.

Gli scisti cristallini prepaleozoici, che costituiscono l'ossatura fondamentale dell'intera regione etiopica, sono stati soggetti nel prepaleozoico stesso a potenti azioni orogenetiche che li hanno ripiegati, costipati e rad-drizzati con andamento complessivo nord-nord-ovest-sud-sud-est. In relazione con questo movimento tettonico, e per un periodo di cui non si può esattamente valutare la durata, ma che si è esteso forse anche al paleozoico antico, vennero ad intrudersi nella formazione scistosa potenti masse di magmi eruttivi di tipo prevalentemente acido. In seguito alla consolidazione di questi magmi in forma di massicci granitici o dioritici,

che l'erosione profonda e prolungatissima ha messo allo scoperto in aree diverse e assai estese, si iniziò il processo metallogenico vero e proprio. Soluzioni idrotermali metallifere hanno pervaso la massa degli scisti compenetrando tutte le fratture principali e secondarie fino a riempirle completamente del loro deposito e impregnando anche in molti casi dello stesso deposito le pareti stesse delle fratture, dove la natura della roccia lo consentiva.

Non solo entro gli scisti ha operato la fase idrotermale del processo eruttivo, ma entro il massiccio roccioso eruttivo nelle sue fratture e soluzioni di continuità, o nel contatto fra rocce eruttive e scisti. Differenziazioni inoltre dei magmi profondi sotto forma di apofisi filoniane di natura acida aplitica, facendosi strada nella massa stessa eruttiva, o nei contatti della medesima con gli scisti, o negli scisti stessi hanno facilitato il percorso delle soluzioni metallifere.

Queste diverse condizioni genetiche si riflettono nelle giaciture, di guisa che si hanno:

a) filoni negli scisti, cioè filoni isolati o sistemi di due, tre, o più filoni ad andamento parallelo concordante in direzione e in inclinazione con le scistosità della roccia incassante. La loro potenza è variabilissima, da pochi centimetri a due e più metri e così anche le loro dimensioni in lunghezza e profondità. Nel filone di Damiscioba (Valle del Gase) uno dei meglio conosciuti e in regolare preparazione per un razionale sfruttamento abbiamo potenze di due metri e più e lunghezza esplorata sui m. 1000 e si sono raggiunte profondità sui 100 metri; lunghezza e profondità che sono tutt'altro che definitive, ma aumenteranno certo col progresso dei lavori.

Più spesso si hanno filoni di tipo lenticolare, non uniformi e con alternanze di spessore: talvolta i sistemi filoniani non sono paralleli, ma incrociati occupando spaccature degli scisti oblique all'andamento generale delle scistosità e costituiscono veri reticolati. Anche variabile è il tenore in oro da filone a filone e nello stesso filone. Un tenore medio sui 15 grammi per tonnellata costituisce già condizione favorevole per lo sfruttamento.

b) Filoni nelle rocce eruttive, per lo più ai fianchi di dicchi aplitici nella massa del granito o della diorite.

c) Filoni di contatto fra scisti e masse eruttive.

d) Giacimenti lenticolari di impregnazione di solfuri auriferi con o senza quarzo negli scisti.

Talora, come ad Adi Nefas nell'altipiano, le dimensioni di questi ammassi lenticolari e il loro tenore medio sui 10 grammi Au per tonnellata permettono lavorazioni industriali.

La tessitura dei filoni quarziferi dell'Eritrea è del tipo uniforme o massiccio: quasi mai si osserva una differenziazione in zone. Ciò dipende dal fatto che la ganga è, in modo assolutamente prevalente, costituita da quarzo; noduli e vene di carbonati (siderite e ancherite) pochi silicati, fra

cui sericite e clorite, si associano al quarzo in modo assolutamente accessorio.

Carattere peculiare di molti distretti auriferi dell'Eritrea è la abbondanza delle cloriti nelle rocce incassanti. Si tratta infatti di scisti cloritici molto compatti nella loro massa e con spiccata scistosità solo in vicinanza, o a contatto immediato dei filoni. Clorite e quarzo in queste rocce sono elementi predominanti ai quali si associa spesso la mica. Si nota spesso una spiccata sericitizzazione della roccia incassante nell'immediato contatto coi filoni. In questi contatti la soluzione metallifera ha potuto penetrare anche per qualche decimetro nello scisto che si è arricchito in tal modo di quei solfuri che si trovano insieme con l'oro in particelle visibili disseminati in quantità maggiore o minore nelle masse del quarzo. Si tratta di pirite, in prevalenza, con calcopirite, pirrotite, pirite arsenicale, tutte, specialmente la prima, aurifere.

La clorite si trova anche nel filone stesso e in questo caso spesso in noduli o concentrazioni di grande purezza.

Questo trionfo della clorite nel distretto aurifero dell'Eritrea potrebbe far rivolgere il pensiero alle formazioni aurifere della Ungheria e Transilvania, se non si dovesse escludere una qualsiasi analogia con la propilitizzazione per le grandi differenze di età geologica e di altra natura fra i due distretti.

Per concludere: sulla genesi di questi giacimenti filoniani si può asserire che la venuta e la circolazione della soluzione aurifera si devono ad una fase posteruttiva di media o bassa idrotermalità. Lo dimostrano l'assenza nei filoni dei minerali caratteristici dell'alta termalità e la presenza invece di altri, fra cui la clorite stessa, con caratteri di media o bassa termalità e la struttura inoltre della massa dei filoni uniformemente silicea e compatta.

Dei giacimenti auriferi alluvionali la nostra conoscenza non è ancora scientificamente molto precisa. Si sa della loro grande estensione, si sa che le sabbie di tutti i fiumi che provengono dal massiccio etiopico sono aurifere.

Aurifere le sabbie del Gasc, del Barca, dell'Anseba, del Tacazzè, del Setit, del Balas, del Dabus, del Baro, del Didessa, dell'Acobo, dell'Omo Bottego, del Ganale Doria, del Dana Parma e di altri fiumi.

Sono quantitativi variabilissimi da bacino a bacino e da luogo a luogo dello stesso bacino alluvionale: in molti casi trasecurabili, economicamente sfruttabili in qualche caso.

Alluvioni relativamente ricche si trovano nell'Uollega, nei Beni Sciangul, nelle regioni di Gubbà e Uomberà, nella valle dell'Acobo e altrove.

Sono depositi nell'alveo attuale dei fiumi o in terrazzi sui fianchi delle valli: qualche volta sono giacimenti eluvionali dovuti alla laterizzazione di antiche alluvioni. Le più ricche sono, come ho detto, conosciute

e sfruttate da secoli. Le popolazioni indigene di generazione in generazione si sono tramandate l'esercizio di un'arte mineraria, rudimentale certamente, ma ad ogni modo più perfezionata di altre attività artigiane. In alcune popolazioni di grado basso di civiltà, come i Beni Sciangu, dediti ad una agricoltura appena primordiale, tutti gli uomini sanno scavare pozzetti profondi fino a 5 metri e più con arnesi rudimentali e tutte le donne lavano rapidamente e perfettamente le sabbie alla batea.

I giacimenti primari filoniani in gran parte, ma anche di altra natura, come impregnazione negli scisti e arricchimenti in posto di carattere eluvionale a spese dei quali si sono formate le alluvioni sono meno noti. Sono certamente in gran numero nei Beni Sciangu e nell'Uollega. Alcuni sono o sono stati oggetto di lavorazioni piuttosto superficiali. Oggi ancora la prospezione mineraria in queste regioni è arretrata e siamo ben lungi dall'avere una conoscenza anche approssimativa del numero e dell'entità di questi giacimenti primari. Le ricerche iniziate dopo la conquista dell'Impero hanno portato alla identificazione di molte alluvioni aurifere, qualcuna delle quali con un contenuto in metallo soddisfacente, altre si troveranno sicuramente.

Sono depositi alluvionali nell'alveo attuale dei fiumi o sono terrazze delle valli con uno spessore variabile, che raramente raggiunge il metro, ricoperti spesso da un mantello di maggior potenza di sabbie sterili o meno aurifere.

L'esame di queste alluvioni sepolte si faceva già dagl'indigeni e si fa ora meglio sotto la nostra direzione a mezzo di pozzetti a intervalli regolari che vengono a costituire maglie quadrate con lati che non superano il centinaio di metri di lunghezza. I pozzetti attraversano la parte sterile e giungono allo strato ricco che si adagia sul letto roccioso dell'antico alveo fluviale. La conoscenza della morfologia nascosta di quest'alveo è elemento indispensabile per stabilire i tratti dove restringimenti o irregolarità, infossature o rilievi del fondo, abbiano potuto agire da naturali concentratori dell'oro nella parte pesante delle sabbie. Purtroppo questa conoscenza non si può raggiungere in modo diretto se non con una fitta rete di pozzetti, cioè con un lavoro metodico, lungo e relativamente costoso, anche se eseguito dagli indigeni.

Il tentativo di determinare in modo rapido e indiretto la morfologia del letto per mezzo di metodi geofisici elettrici, approfittando della diversa resistività di un materiale incoerente alluvionale rispetto a quella della massa rocciosa compatta, è praticamente fallito, perchè questa massa stessa è stata nelle varie vicende subite attraverso lunghi periodi geologici così alterata, anche a profondità assai notevoli e modificata così completamente nelle sue proprietà fisiche, che nulla di conclusivo si trasse da campagne geoelettriche minerarie eseguite a questo scopo in alcune alluvioni dei Beni Sciangu.

Risultato delle prospezioni attualmente in attivissimo corso è la conoscenza del contenuto in oro delle sabbie alluvionali in zone per ora ancora ristrette rispetto alla loro totale estensione. In qualche caso il contenuto in oro per metro cubo di alluvione raggiunge proporzioni tali da potersi concepire uno sfruttamento con mezzi ancora piuttosto semplici ed economici, che sono del resto i soli consentiti in regioni impervie, nelle quali comunicazioni e trasporti sono ancora difficili e dove non si ha ancora disponibilità di energia elettrica a prezzi convenienti.

Alluvioni che in alcuni punti raggiungono in media i due grammi d'oro per metro cubo sono definite per estensione ancora molto ridotte, alluvioni ricche o molto ricche che superino di molto questo contenuto non sono state ancora riconosciute che in casi rarissimi e per estensioni ridottissime. Le alluvioni più estese, quelle sulle quali si può concepire uno sfruttamento su larga scala, alluvioni con contenuti non trascurabili, ma inferiori al grammo per metro cubo, da lavorare con estesi dragaggi, incominciano a delinearsi in grandi aree e si continuano anche a prospettare diligentemente.

Per ora si può pensare a lavorazioni economiche delle alluvioni che contengono un grammo o più di Au per metro cubo, e in luoghi dove si dispone di acqua, cioè a sfruttamenti con mezzi idraulici economici atti alla disgregazione delle sabbie e al loro trasporto fino agli scivoli di raccolta riservando a un avvenire, che speriamo prossimo, i grandi mezzi per le grandi estensioni di tenori minori.

Questa tecnica economica si comincia ad applicare e presto ne vedremo i frutti.

Si può domandare: quanto oro si è prodotto, quanto si produce, quanto si potrà produrre dallo sfruttamento economico delle alluvioni adatte. Per le lavorazioni che rimontano nei secoli la risposta è impossibile, ma è difficile anche per gli anni recenti. Possiamo soltanto arguire che sono state asportate le parti ricche e in condizioni favorevoli per quantitativi certamente cospicui. Gli ultimi negus ricevevano dai capi locali nei paesi Galla e nei Beni Sciangul un tributo che si può approssimativamente contare sui due o tre quintali all'anno.

Oggi dalle alluvioni questo limitato contributo il Governo Italiano non ritrae ancora. L'attività singola degli indigeni con i loro pozzetti e con i loro lavaggi, continua a produrre un quantitativo d'oro forse dello stesso ordine di grandezza e anche maggiore che arriva soltanto in minima quantità alle casse della Banca d'Italia e per mille incontrollabili rivoli si disperde e passa la frontiera del Sudan, dove è pagato in misura molto superiore al prezzo stabilito dalla nostra banca ed utilizzato per acquisto degli articoli di cui l'indigeno ha bisogno e che nei mercati del Sudan si trovano in condizioni di acquisto, per ora almeno, molto più favorevole che nei mercati dell'Impero.

È chiaro però che questo stato di cose potrà esser modificato, sia con pagamento a prezzo più elevato dell'oro ai produttori indigeni, sia favorendo l'afflusso ai loro mercati locali di merci di provenienza italiana e rispondenti ai loro bisogni e ai loro gusti.

Per il rimanente, e in misura maggiore, concorrerà l'organizzazione da parte dei nostri industriali dell'estrazione di oro dalle alluvioni con i mezzi economici di cui ho fatto cenno, fino a che non siano possibili le grandi installazioni e conseguentemente le grandi produzioni.

Diverso è il quadro delle possibilità di produzione dei giacimenti filoniani. Qui abbiamo una nostra esperienza nazionale oltre a quella degli Inglesi nel Kenia e dei Tedeschi e poi degli Inglesi nel Tanganika, dove si trovano condizioni di giacitura analoghe. In Eritrea una attività industriale ha cominciato a delinearsi più di quarant'anni fa.

La scoperta di affioramenti superficiali di filoni o parti di filone, eccezionalmente ricche con oro visibile e tenori elevati diede impulso verso la fine del secolo scorso all'industria estrattiva eritrea.

Coraggiosi pionieri forniti soltanto di piccole batterie di pestelli e di tavole d'amalgamazione poterono con superficialissimi lavori realizzare lauti, ma effimeri guadagni.

Esaurite rapidamente le porzioni superficiali o poco profonde ad elevato tenore, essi non ebbero nella maggior parte dei casi i mezzi per proseguire un regolare sfruttamento.

Tracce di lavori, se così possono chiamarsi delle trincee, delle piccole discenderie, o dei pozzetti poco profondi, stanno in parecchie località dell'Eritrea ad attestare questa fase iniziale dell'attività mineraria, che risale del resto anche più addietro nel tempo.

Qualcuno soltanto dei giacimenti fu oggetto di regolari coltivazioni, specialmente nei primi anni di questo secolo, e a quest'epoca rimontano pozzi e gallerie a livelli diversi, insomma una vera e propria coltivazione mineraria quale è quella che si riscontra in qualche miniera eritrea.

In seguito ragioni varie, come impoverimento del minerale e maggior costo di estrazione a maggiori profondità e ribasso del valore dell'oro, verificatosi nel primo decennio di questo secolo, fecero sospendere i lavori in alcune miniere bene, o almeno discretamente organizzate, senza però che s'interrompesse l'attività dei modesti o modestissimi imprenditori minerari di modo che la produzione del prezioso metallo nell'Eritrea toccò un massimo un anno prima della guerra etiopica.

Durante questo periodo alcuni impianti industriali meno rudimentali erano venuti installandosi procurando notevoli guadagni a qualche nostro nazionale audace e fortunato.

Una nuova fase veramente industriale ebbe inizio con la fondazione dell'Impero e con l'istituzione della Regia Azienda Miniere Africa Orientale. La coltivazione mineraria di alcuni giacimenti filoniani dell'Eritrea

fu ripresa con sani criteri tecnici, cioè con regolare condotta dei lavori in sotterraneo e con metodi metallurgici appropriati e perfezionati. Il solo processo di amalgamazione non aveva ricavato che una parte dell'oro contenuto nel minerale oggetto da decenni di lavorazione e si erano venuti accumulando nei luoghi di lavorazione quantitativi cospicui di materiale cosiddetto di rifiuto, contenente oro in quantità non trascurabile anche più, di 5-6 grammi per tonnellata. Bisognava affrontare il problema industriale con impianti moderni di cianurazione, ormai largamente diffusi dovunque esistano miniere aurifere. Un paio d'impianti costosi e complicati costruiti in Germania sono già stati trasportati sui luoghi, uno anzi a grandi distanze da Massaua e installati superando notevoli difficoltà per la messa in opera.

La fornitura dell'acqua necessaria fu ottenuta con bacini di raccolta e con costruzione di serbatoi, stazioni di pompaggio e relative condutture, quella dell'energia occorrente ai servizi di miniera e degli stabilimenti metallurgici per mezzo di centrali termoelettriche.

Vicino ai due centri minerari più importanti sono sorte costruzioni per uffici e per abitazioni dei nazionali e separatamente villaggi indigeni, sono stati costruiti tronchi di strade e accomodate vecchie piste, nelle impervie e torride regioni del bassopiano occidentale. Oggi nella Valle del Gasc, fino a pochi anni or sono deserta e inaccessibile, attorno alle miniere di Ugarò e Damiscioba è sorto un nuovo centro pulsante di fervida attività, che sta assumendo anche di giorno in giorno una più confortevole attrezzatura.

Con tenace lavoro attraverso a gravi e innumerevoli difficoltà una così complessa organizzazione ha cominciato a funzionare e a dare regolare produzione in due centri, uno, il minore, a Sciumagallè nell'altipiano a poca distanza da Asmara, l'altro, di potenzialità molto maggiore, a Ugarò nel bassopiano occidentale, non lungi dai confini del Sudan. La spesa fu sostenuta tutta dallo Stato che comincia oggi a trarne i frutti con i versamenti alla Banca d'Italia dell'oro, versamenti che vanno aumentando mensilmente con ritmo regolarmente crescente mano a mano che gl'impianti vengono messi a punto e potenziati.

Parallelamente, accanto alla produzione procedono lo studio, la sperimentazione e la ricerca di nuovi giacimenti sfruttabili. Si è già detto che innumerevoli sono nel massiccio cristallino Eritreo gli affioramenti di filoni o pseudofiloni o sistemi filoniani, grandi e piccoli, affioramenti che rivelano un contenuto di oro più o meno soddisfacente. Tali manifestazioni, dove un primo esame metodico e saggi superficiali riescano soddisfacenti, vengono eseguiti con veri e propri lavori di ricerca, lenti e costosi; si tratta di scavare gallerie nel durissimo e tenacissimo quarzo aurifero, si dispone di scarsa e poco abile mano d'opera indigena. Costosa è l'installazione di motocomplessori, costosissimo ne è l'esercizio con carburanti che si devono

importare dall'estero e si devono trasportare nell'interno per incomode piste, per decine e centinaia di chilometri. In quest'opera di vera e propria ricerca mineraria si alternano, come è ben prevedibile, successi ed insuccessi, ma i successi lasciano intravedere nuove possibilità, e permettono di progettare già l'esercizio di nuove miniere e successivamente di nuovi centri di produzione più o meno perfezionati a seconda delle circostanze.

Per il perfezionamento appunto dei mezzi di produzione metallurgica, continuano studi e sperimentazioni: studi sulla composizione del minerale, sperimentazione su metodi di arricchimento adatti alle varie composizioni: cominciano ad apparire nell'altipiano impianti di arricchimento gravimetrico e stanno per installarsi celle di flottazione.

Il complesso lavoro è condotto con metodo rigoroso e prudente ed esige tempo non breve, anche per difficoltà inerenti alle condizioni locali ed altre che derivano dalla situazione politica del momento attuale, ma con sicura fiducia di poter giungere a creare in alcune miniere dell'Eritrea attrezzature industriali degne della tecnica moderna e della capacità degli italiani. Attrezzature che non avranno nulla da invidiare alle maggiori del mondo, se non la ricchezza e il quantitativo di minerale da sfruttare.

Ecco in breve, il quadro della situazione dell'industria aurifera nell'Impero e le prospettive del suo attuale sviluppo. Abbiamo oggi, soprattutto da parte dell'Azienda di Stato, una produzione ancora modesta, ma sicura e crescente con ritmo regolare. Vorrete forse chiedermi delle previsioni per l'avvenire e, pur con le dovute riserve, azzardo di esporvele e di riassumerle brevissimamente.

Lo Stato ha fatto, fa e deve continuare a fare opera di propulsione e di esempio, ma è necessario l'intervento del capitale privato, dato che la fondamentale condizione dell'esistenza e della diffusione del minerale è ormai accertata. Bisogna soltanto creare alcune condizioni, non meno fondamentali, affinché il capitale, per raggiungere risultati favorevoli, trovi impiego redditizio.

Occorrono anzitutto forti capitali, perchè nessuna miniera si crea e si esercisce a buon mercato e tanto meno le miniere d'oro: devono essere banditi gli illusi o gli avventurieri senza denaro e senza capacità: occorrono ancora: dirigenti tecnici provetti, mano d'opera non eccessivamente costosa, energia a buon mercato.

I tecnici minerari provetti scarseggiano in Italia.

È deficienza grave che rende più difficile la battaglia autarchica ed è segnalata autorevolmente fin dall'inizio della battaglia medesima. Si stanno apprestando i rimedi, ma l'effetto non può essere immediato. Quando sarà raggiunto disporremo di buoni tecnici anche per l'Impero, dove la lacuna oggi è gravissima.

Mano d'opera a relativo buon mercato non può essere che l'indigena, oggi piuttosto scarsa e soprattutto maldestra. D'altronde gli operai nazionali, neanch'essi molto numerosi, costano eccessivamente e nelle condizioni climatiche della maggior parte delle zone aurifere rendono poco. Non è neanche questo problema insolubile. Gli indigeni si vanno addestrando e cominciano a dare miglior rendimento. Bisogna creare, e in breve si riuscirà certamente a crearla, una manovalanza indigena con caporali italiani che ne costituiscano i quadri.

Maggiori difficoltà s'incontreranno per fornire alle terre dell'Impero e in zone remote energia a buon mercato.

Basta riflettere che nel centro più importante e avviato alla maggior produzione funziona una centrale termoelettrica a motori Diesel distanti più di 500 chilometri da Massaua per comprendere a quale prezzo si produca l'energia occorrente.

In attesa della possibilità di disporre di energia idroelettrica le altre soluzioni, come centrali termoelettriche a combustibili fossili, o gassogeni presentandosi soltanto parziali e applicabili in certe particolari condizioni, l'industria mineraria aurifera avrà prezzi di costo eccessivamente alti e non sarà remunerativa che nei giacimenti di particolare potenza e ricchezza.

Ma i competenti ci assicurano che la disponibilità, per ora solo potenziale, di forze idrauliche esiste in molte regioni dell'Impero e specialmente nel versante occidentale che più ci interessa. Il progressivo potenziamento dell'Impero renderà possibile in avvenire installazioni idroelettriche proporzionate alle utilizzazioni che si verranno presentando per nuovi e crescenti bisogni, fra i quali quello delle industrie estrattive.

Non sono uomo che si lascia trascinare a sogni fantastici, cari camerati, e negli ambienti minerari italiani non ho fama di facile ottimismo. Perciò credetemi senz'altro se vi affermo che col pensiero vedo in azione in un futuro, che mi auguro prossimo, potenti draghe nell'estese alluvioni dell'Uollega e dei Beni Sciangul, numerose batterie di pestelli, laverie e grandi impianti di cianurazione nel bassopiano occidentale Eritreo e forse in altre regioni. Allora saranno possibili le grandi produzioni, alle quali stiamo preparando il terreno favorevole con una sana sistemazione industriale, dove le condizioni sono particolarmente propizie. Questa sicura visione mi dà la gioia di collaborare con entusiasmo e con fervore, che vorrei poter definire giovanili, a tale sistemazione con la sicura certezza di contribuire con ciò alle fortune economiche del nuovo Impero d'Italia.

NOTE DI ACCADEMICI
E DI AGGREGATI ALLA R. ACCADEMIA D'ITALIA

Matematica. — *Calotte a centri allineati di superficie algebriche.* Nota ⁽¹⁾ di ENRICO BOMPIANI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Data una curva piana algebrica d'ordine n ed una retta che la tagli in punti distinti esiste una relazione fra gli elementi del 2° ordine E_2 della curva uscenti da quei punti. Questa relazione è stata data forse la prima volta, sotto forma metrica (mentre il fatto ha carattere proiettivo), da M. REISS nel 1837; essa è stata ritrovata da A. V. BÄCKLUND (in forma duale) nel 1869 ⁽²⁾, da E. HOLST nel 1882 ⁽³⁾, e infine da H. LIEBMANN nel 1927 ⁽⁴⁾.

S. LIE si era servito per la determinazione delle superficie più volte di traslazione ⁽⁵⁾ del teorema inverso di quello del REISS (nel caso delle curve del 4° ordine) una cui dimostrazione (per un ordine qualunque) è stata data di recente da F. ENGEL ⁽⁶⁾; hanno fatto uso della relazione stessa H. LIEBMANN (loc. cit.) per la dimostrazione di un teorema di

⁽¹⁾ Presentata nell'Adunanza del 18 novembre 1939—XVIII.

⁽²⁾ A. V. BÄCKLUND, *Einige Sätze über die Normalen algebraischer Kurven*, «Lund Universitets Orsskrift», vol. 5 (1869).

⁽³⁾ E. HOLST, *Ein Beitrag zur methodischen Behandlung der metrischen Eigenschaften algebraischer Kurven*, «Archiv for Mathematik og Naturvidenskab», Bd. VII (1882), pagg. 109–114; *Analytischer Beweis eines geometrischen Satzes*, ibidem, pagg. 115–178; *Ein Paar syntetischer Methoden in der metrischen Geometrie mit Anwendungen*, ibidem, pagg. 240–362.

⁽⁴⁾ H. LIEBMANN, *Bestimmung der geradlinigen Dreiecksnetze aus den Krümmungselementen der Hüllkurven*, «Sitzungsber. der math.-nat. Abt. der Bayerischen Akad. der Wissenschaften» (1927), pagg. 73–87.

⁽⁵⁾ S. LIE, *Bestimmung aller Flächen, die in mehrfacher Weise durch Translationsbewegung einer Kurve erzeugt werden*, «Archiv. for Mathem. og Naturvid.», Bd. VII (1882), pagg. 155–176, «Gesamm. Abhandl.», Bd. I, pagg. 450–467.

⁽⁶⁾ F. ENGEL, *Die Umkehrung des Reiss'schen Satzes über Kurven n -ter Ordnung*, «Deutsche Mathem.», Bd. 4 (1939), pagg. 340–347.

H. GRAF ed R. SAUER sui 3-tessuti rettilinei esagonali ⁽¹⁾ e T. KUBOTA ⁽²⁾ per trarne una proprietà caratteristica delle curve algebriche piane.

Il teorema del REISS è suscettibile di approfondimenti in varie direzioni ⁽³⁾; non mi occupo qui di essi, bensì della sua estensione alle calotte di 2° ordine a centri allineati e distinti di una superficie algebrica di S_n (e alle ipersuperficie) ⁽⁴⁾.

2. NUMERO DELLE RELAZIONI ESISTENTI FRA LE CALOTTE A CENTRI ALLINEATI DI UNA F^n . — Dal punto di vista qualitativo (cioè se non ci si cura dell'effettiva forma delle relazioni che si hanno in vista ma solo della loro esistenza) si vede facilmente che:

Data una superficie d'ordine n , F^n , ed una retta che la incontri in n punti distinti, fra le calotte del 2° ordine aventi i centri in quei punti passano tre relazioni indipendenti.

È forse opportuno premettere (per rendere indipendente la dimostrazione dall'effettiva conoscenza della relazione del Reiss) una semplice osservazione sulla necessità dell'esistenza di una relazione fra gli E_2 di una C^n piana aventi i centri in punti tutti distinti di una retta r . Se le condizioni offerte da quegli E_2 ad una C^n che debba contenerli fossero indipendenti sarebbero $3n$ (essendo 3 per ciascun E_2). Si consideri una C^{n-3} arbitraria, dipendente da $n(n-3)/2$ parametri e la Γ^n $r^3 C^{n-3}$ che pure contiene quegli E_2 . Poichè la C^n data non contiene la retta r il sistema lineare individuato da C^n e dalle Γ^n ha dimensione $n(n-3)/2 + 1$ e quindi gli E_2 offrono soltanto $\frac{n(n+3)}{2} - \frac{n(n-3)}{2} - 1 = 3n - 1$ condizioni. Fra essi passa dunque una relazione.

Passiamo ora alla F^n considerata insieme alla retta r che l'incontri in n punti distinti. Ogni sezione piana per r dà luogo ad una relazione fra i suoi E_2 uscenti da questi punti. Ma poichè una calotta superficiale del 2° ordine è individuata da tre suoi elementi curvilinei ⁽⁵⁾ basta dare gli E_2 di tre sezioni piane con i centri su r per costruire le calotte di F^n

⁽¹⁾ H. GRAF u. R. SAUER, *Ueber dreifache Geradensysteme*, « Sitzungsber. der math.-nat. Abt. der Bayerischen Akad. der Wissensch. » (1924), pag. 119.

⁽²⁾ T. KUBOTA, *Einige Kennzeichnende Eigenschaften der ebenen algebraischen Kurven und der algebraischen Flächen*, « Science Reports of the Tôhoku Imperial University », series I, vol. XXVI (1937), pagg. 243-247.

⁽³⁾ Di questi ho dato conto in un corso di Geometria Differenziale nel 1937 e in alcune conferenze tenute in Germania nel 1938.

⁽⁴⁾ L'unico risultato che conosca di questo tipo è dato nella mia Nota: *Ueber zwei Kalotten einer Hyperquadrik*, « Jahresbericht der Deutschen Mathem.-Vereinigung », Bd. 49 (1939), pagg. 143-145.

⁽⁵⁾ E. BOMPIANI, *Gli analoghi proiettivi dei teoremi di Meusnier e di Eulero*, « Rendic. Semin. Matem. R. Univ. di Roma », vol. II, s. IV (1938), pagg. 99-120.

con i centri in quei punti. Di qui l'esistenza di *tre* relazioni fra le calotte del 2° ordine con centri in essi.

3. RICERCA ANALITICA IN UN RIFERIMENTO GENERALE. — Per approfondire la ricerca e trarre altre conseguenze è necessario porla in forma analitica.

S'indichino: con z_1, z_2, z_3, z_4 quattro punti individuanti lo spazio (proiettivo S_3) e z_1, z_2 stiano su r ; con $x_i = z_2 + \sigma_i z_1$ ($i = 1, \dots, h$) gli n punti di F^n su r . Le calotte con centri in essi, riferita quella di centro x_i ai parametri u_i, v_i , siano individuate dagli sviluppi

$$[3.1] \quad x_i + x_{i1} du_i + x_{i2} dv_i + \frac{1}{2} (x_{i11} du_i^2 + 2 x_{i12} du_i dv_i + x_{i22} dv_i^2).$$

Posto

$$[3.2] \quad L_i = |X x_i x_{i1} x_{i2}|, \quad N_1 = |X z_2 z_3 z_4|, \\ N_2 = |X z_3 z_4 z_1|, \quad N_3 = |X z_4 z_1 z_2|, \quad N_4 = |X z_1 z_2 z_3|$$

(i secondi membri sono determinanti costruiti con le coordinate omogenee dei punti indicati) l'equazione di una superficie F^n tangente ai piani $L_i = 0$ nei punti x_i è del tipo

$$[3.3] \quad -2 \Pi L_i = N_3^2 \Phi + 2 N_3 N_4 \Psi + N_4^2 X$$

ove ΠL_i indica il prodotto di tutte le L_i per $i = 1, \dots, n$; e Φ, Ψ, X sono forme di grado $n-2$ in N_1, \dots, N_4 : ciò perchè posta una $L_i = 0$ si ha un punto doppio nella sua sezione con $N_3 = N_4 = 0$.

Del resto le F^n dipendono da $\binom{n+3}{3} - 1$ parametri e quelle soddisfacenti alle 3 n condizioni imposte da $\frac{n(n^2-1)}{6} + n(n-1)$; nella

[3.3] la Φ dipende da $\frac{n(n^2-1)}{6}$ parametri essenziali mentre in X dobbiamo escludere tutti i termini aventi a fattore N_3^2 e in Ψ quelli aventi a fattore sia N_3 che N_4 ; la [3.3] dipende quindi da

$$\frac{n(n^2-1)}{6} + (n-1)^2 + n-1 = \frac{n(n^2-1)}{6} + n(n-1)$$

parametri, come doveva essere.

Imponiamo alle F^n le condizioni relative al 2° ordine. Indicati con Φ_k, Ψ_k, X_k i valori di Φ, Ψ, X rispettivamente nel punto x_k e poichè in esso $N_3 = N_4 = 0$, $N_1 = |z_1 z_2 z_3 z_4| \sigma_k$, $N_2 = -|z_1 z_2 z_3 z_4|$ si ha

$$[3.4] \quad \Phi_k = \sum_0^{n-2} \varphi_r \sigma_k^r, \quad \Psi_k = \sum_0^{n-2} \psi_r \sigma_k^r, \quad X_k = \sum_0^{n-2} \chi_r \sigma_k^r \quad (k = 1, \dots, n),$$

ove $\varphi_r, \psi_r, \chi_r$ sono coefficienti indipendenti da k . Si noti ancora che

$$[3.5] \quad |x_k x_i x_{i_1} x_{i_2}| = |z_1 z_2 x_{i_1} x_{i_2}| (\sigma_k - \sigma_i).$$

L'appartenenza ad F^n della calotta [3.1] di centro x_k porta

$$[3.6] \quad |x_k x_{k_1} x_{k_2} d^2 x_k| \cdot \Pi'_k |x_k x_i x_{i_1} x_{i_2}| = \\ = |z_1 z_2 z_4 dx_k|^2 \Phi_k + 2 |z_1 z_2 z_4 dx_k| \cdot |z_1 z_2 z_3 dx_k| \Psi_k + |z_1 z_2 z_3 dx_k|^2 X_k$$

ove Π'_k indica il prodotto di tutti i fattori che seguono per $i \neq k$. In forza delle precedenti questa si scrive

$$[3.7] \quad \frac{|x_k x_{k_1} x_{k_2} d^2 x_k|}{|z_1 z_2 x_{k_1} x_{k_2}|} \Pi |z_1 z_2 x_{i_1} x_{i_2}| \cdot \Pi'_k (\sigma_k - \sigma_i) = \\ = |z_1 z_2 z_4 dx_k|^2 \Phi_k + 2 |z_1 z_2 z_4 dx_k| \cdot |z_1 z_2 z_3 dx_k| \Psi_k + |z_1 z_2 z_3 dx_k|^2 X_k.$$

Questa relazione vale per qualunque E_2 della calotta di centro x_k ; per gli E_2 appartenenti ad una sezione piana $N_3 + \lambda N_4 = 0$ i differenziali $dx_k = x_{k_1} du_k + x_{k_2} dv_k$ sono legati da

$$[3.8] \quad |z_1 z_2 z_4 dx_k| + \lambda |z_1 z_2 z_3 dx_k| = 0$$

quindi la precedente, posto $P = \Pi |z_1 z_2 x_{i_1} x_{i_2}|$, dà

$$\frac{|x_k x_{k_1} x_{k_2} d^2 x_k|}{|z_1 z_2 x_{k_1} x_{k_2}| \cdot |z_1 z_2 z_3 dx_k|^2} = \frac{1}{P \Pi'_k (\sigma_k - \sigma_i)} \{\lambda^2 \Phi_k - 2 \lambda \Psi_k + X_k\}$$

cioè indicato con A il determinante di Vandermonde delle σ e con A_k il complemento algebrico di σ_k^{n-1} in A

$$[3.9] \quad \frac{|x_k x_{k_1} x_{k_2} d^2 x_k|}{|z_1 z_2 x_{k_1} x_{k_2}| \cdot |z_1 z_2 z_3 dx_k|^2} = \frac{A_k}{PA} \{\lambda^2 \Phi_k - 2 \lambda \Psi_k + X_k\}$$

Sommando queste relazioni rispetto a k e notando che per essere Φ_k, Ψ_k, X_k di grado $n-2$ in σ_k è $\Sigma A_k \Phi_k = \Sigma A_k \Psi_k = \Sigma A_k X_k = 0$ si ha

$$[3.10] \quad \sum_k^n \frac{|x_k x_{k_1} x_{k_2} d^2 x_k|}{|z_1 z_2 x_{k_1} x_{k_2}| \cdot |z_1 z_2 z_3 dx_k|^2} = 0$$

nella quale du_k, dv_k sono da calcolarsi a norma della [3.8] (i differenziali secondi non figurano che apparentemente).

La [3.10] è la relazione cercata (da applicarsi a tre sezioni piane); è da osservare che, come deve, essa non dipende affatto dai fattori di normalizzazione che si possono applicare alle coordinate dei vari centri, dalla scelta dei parametri su ciascuna calotta e neppure dal punto z_3 (che non entra che apparentemente e può essere un punto qualunque dello spazio).

4. PARTICOLARIZZAZIONE DEL RIFERIMENTO. — La relazione [3.10] proprio per la sua generalità (che la rende applicabile a qualunque riferimento) è poco espressiva. Conviene quindi particolarizzarla. Assumiamo in coordinate cartesiane non omogenee x, y, z la retta r come asse z e siano $P_i(0, 0, \gamma_i)$ i punti d'intersezione di r con F^n . Posto nell'intorno di P_i su F^n :

$$[4.1] \quad z_i = \gamma_i + p_i x + q_i y + \frac{1}{2} (\gamma_i x^2 + 2 s_i xy + t_i y^2)$$

la F^n di equazione

$$[4.2] \quad 2 \Pi (z - \gamma_i - p_i x - q_i y) = x^2 \Phi + 2 xy \Psi + y^2 X,$$

con Φ, Ψ, X di grado $n - 2$ e

$$[4.3] \quad \Phi = \sum_0^{n-2} \varphi_s z^s + \dots, \quad \Psi = \sum_0^{n-2} \psi_s z^s + \dots, \quad X = \sum_0^{n-2} \chi_s z^s + \dots$$

ove i termini non scritti sono di grado ≥ 1 in x, y , contiene le calotte di 2° ordine date se per $x = 1, \dots, n$ si ha

$$[4.4] \quad r_k \Pi'_k (\gamma_k - \gamma_i) = \sum_0^{n-2} \varphi_s \gamma_k^s, \quad s_k \Pi'_k (\gamma_k - \gamma_i) = \sum_0^{n-2} \psi_s \gamma_k^s, \\ t_k \Pi'_k (\gamma_k - \gamma_i) = \sum_0^{n-2} \chi_s \gamma_k^s.$$

I piani per r e per le tangenti asintotiche in P_k sono rappresentati da

$$[4.5] \quad \sum_0^{n-2} \varphi_s \gamma_k^s x^2 + 2 \sum_0^{n-2} \psi_s \gamma_k^s xy + \sum_0^{n-2} \chi_s \gamma_k^s y^2 = 0.$$

Se si assegnano (dati i punti P_k e i piani in essi tangenti) le coppie di piani per le tangenti asintotiche nei punti P_k (quindi queste) si danno $2n$ condizioni; mentre i coefficienti essenziali che figurano nelle [4.5] (cioè i coefficienti $\varphi_s, \psi_s, \chi_s$ a meno dell'omogeneità) sono $3n - 4$; quindi si hanno condizioni fra le tangenti asintotiche nei punti P_k se $3n - 4 < 2n$, cioè se $n \leq 3$.

Per $n = 2$ le condizioni sono evidenti (incidenza delle generatrici in P_1 e in P_2) ⁽¹⁾; per $n = 3$ si ha in generale una condizione per le tangenti asintotiche in tre punti allineati. In generale dati i piani per r e per quelle tangenti asintotiche nella forma

$$\alpha_k x^2 + 2 \beta_k xy + \gamma_k y^2 = 0$$

⁽¹⁾ L'ulteriore condizione, riguardante le curvature nei due centri, è data nella mia Nota già citata: *Ueber zwei Kalotten einer Hyperquadrik*.

deve aversi

$$\sum_0^{n-2} \varphi_s \gamma_k^s = \alpha_k \sum_0^{n-2} \chi_s \gamma_k^s, \quad \sum_0^{n-2} \psi_s \gamma_k^s = \beta_k \sum \chi_s \gamma_k^s.$$

Se Γ è il determinante di Vandermonde delle $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ e $\Gamma_k^{(t)}$ è in esso il complemento algebrico di γ_k^t si ha

$$\sum_{k=1}^n \sum_{s=0}^{n-2} \varphi_s \gamma_k^s \Gamma_k^{(t)} = \sum_{k=1}^n \sum_{s=0}^{n-2} \chi_s \gamma_k^s \Gamma_k^{(t)} \alpha_k = 0;$$

e poichè $\sum_k \gamma_k^s \Gamma_k^{(t)} = 0$ per $s \neq t$, $= \Gamma$ per $s = t$ e $t \leq n-2$ risulta

$$\Gamma \varphi_t = \sum_0^{n-2} \chi_s \sum_1^n \alpha_k \gamma_k^s \Gamma_k^{(t)}$$

e analogamente

$$\Gamma \psi_t = \sum_0^{n-2} \chi_s \sum_1^n \beta_k \gamma_k^s \Gamma_k^{(t)} \quad \text{per } t \leq n-2$$

mentre

$$\sum_0^{n-2} \chi_s \sum_1^n \alpha_k \gamma_k^s \Gamma_k^{(n-1)} = 0, \quad \sum_0^{n-2} \chi_s \sum_1^n \beta_k \gamma_k^s \Gamma_k^{(n-1)} = 0.$$

Per $n = 3$ se queste due equazioni omogenee in χ_0, χ_1 devono esser risolubili con χ_0 e χ_1 non tutte e due nulli (nel caso opposto si avrebbero tre flessi allineati di F^3 e quindi le tangenti asintotiche sarebbero indeterminate nei tre centri) si deve avere una relazione fra le α_k, β_k cioè fra le tre coppie di piani. Se invece $n > 3$ si possono in generale dare ad arbitrio $n-3$ delle χ e determinare in conseguenza le due rimanenti, indi le φ e le ψ .

5. LE TRE RELAZIONI PER UNA SUPERFICIE DEL TERZO ORDINE. — Le tre relazioni di cui si è detto fin dal principio (n. 2) possono scriversi, come risulta dalle [4],

$$[5.1] \quad \sum_1^n r_k = 0, \quad \sum_1^n s_k = 0, \quad \sum_1^n t_k = 0.$$

Per $n = 3$, se quei piani per le tangenti asintotiche non sono tutti indeterminati (tre punti di flesso allineati di F^3), le relazioni scritte provano ch'essi si distribuiscono in coppie di una stessa involuzione; mentre se un punto è di flesso (p. es. $r_1 - s_1 - t_1 = 0$) le coppie di tangenti asintotiche in due punti con esso allineati sono sempre incidenti.

Esauriamo, poichè se ne presenta l'occasione, il caso in cui la retta r incontra F^3 in un punto di flesso P : e siano P_1 e P_2 due punti distinti allineati con esso. Ogni sezione piana per r determina in P_1 e in P_2 due E_2

appartenenti ad una conica. Si consideri la quadrica avente in P_1 contatto del 2° ordine e in P_2 del 1° ordine con F^3 : per quanto s'è ora detto essa ha contatto del 2° ordine anche in P_2 , cioè esiste una quadrica osculatrice in P_1 e in P_2 ad F^3 . La sestica intersezione della quadrica con F^3 ha P_1 e P_2 tripli: i piani delle tre coniche in cui quella si spezza segano il piano tangente in P nelle tre rette di F^3 ch'esso contiene.

Se poi P è di flesso e $P_1 \equiv P_2$, cioè P è un punto della sezione del piano polare armonico di P rispetto ad F^3 con F^3 stessa, ogni sezione piana per PP_1 ha un punto sestattico in P_1 (cioè con conica a contatto 6 — punto): sicchè la quadrica di Moutard relativa a P_1 e alla tangente $P_1 P$ (contenente le coniche a contatto 5 — punto in P_1 con le sezioni piane di tangente $P_1 P$) ha contatto del 5° ordine, in P_1 e in direzione $P_1 P$, con F^3 (e non del 4° come avviene in generale).

Ritorniamo al caso generale (P_1, P_2, P_3 su r non di flesso).

Se sono *date* le tangenti asintotiche in P_k con le coppie di piani

$$\alpha_k x^2 + 2 \beta_k xy + y^2 = 0 \quad k = 1, 2, 3,$$

dovrà aversi $r_k = \rho_k \alpha_k$, $s_k = \rho_k \beta_k$, $t_k = \rho_k$ e il determinante $|\alpha_k \beta_k 1| = 0$. Le ρ_k sono quindi definite a meno di un medesimo fattore. Se s'interpretano x, y, z come coordinate cartesiane ortogonali e si tiene presente l'espressione della curvatura gaussiana segue da quanto s'è ora osservato che i rapporti delle curvature gaussiane nei tre punti P_k sono già determinate dalle tangenti asintotiche: quindi data la curvatura in uno di questi punti rimane determinata negli altri due.

Sono queste le ulteriori due condizioni (oltre quella relativa alle tangenti asintotiche) cui devono soddisfare le tre calotte del 2° ordine di centri P_k per poter appartenere ad una F^3 . Sicchè riassumendo:

Siano P_1, P_2, P_3 punti distinti allineati di una F^3 e non di flesso, le coppie di piani per la loro retta e per le tangenti asintotiche in essi sono coppie di una involuzione; questa è condizione necessaria e sufficiente affinché tre coppie di rette uscenti dai punti P_i siano in essi tangenti asintotiche di qualche F^3 ; per le F^3 che le posseggono sono inoltre determinati i rapporti delle curvature gaussiane nei tre punti.

Se uno solo dei punti P_i è di flesso ⁽¹⁾, p. es. P_1 , e $P_2 \neq P_3$, esiste una quadrica a contatto del 2° ordine con F^3 in P_2 e P_3 ; mentre se $P_2 \equiv P_3$ la quadrica di MOUTARD relativa al punto P_2 e alla tangente $P_1 P_2$ ha, in questa direzione, contatto del 5° ordine con F^3 .

Se infine P_1 e P_2 sono di flesso per F^3 tale è anche P_3 .

⁽¹⁾ Se lo fossero due, lo sarebbero tutti tre (e le relazioni del 2° ordine sarebbero identicamente soddisfatte).

6. SIGNIFICATO PROIETTIVO DELLE TRE RELAZIONI PER UNA F^n . — Caratterizzate così le calotte a centri allineati di una F^3 (e quelle di una F^2), si può dare un espressivo significato geometrico alle relazioni

$$\sum_1^n r_k = 0 \quad , \quad \sum_1^n s_k = 0 \quad , \quad \sum_1^n t_k = 0.$$

relative ad n calotte a centri allineati di una F_n con $n \geq 4$. Si prendano a piacere j di queste calotte: per esse si costruisca a piacere una F^{j+1} , che taglierà la retta dei centri in un $(j+1)$ -esimo punto e si consideri la calotta del 2° ordine ad esso relativa. Per le $j' = n - j$ calotte residue di F^n si faccia passare ad arbitrio una $F^{j'+1}$ e si consideri la sua calotta relativa all'ulteriore suo punto d'intersezione con la retta dei centri. Dette r, s, t e rispettivamente r', s', t' le grandezze del 2° ordine relative alle ultime calotte (non di F^n) di F^{j+1} e di $F^{j'+1}$ si ha

$$\begin{aligned} \sum_1^j r_x + r = 0 \quad , \quad \sum_1^j s_k + s = 0 \quad , \quad \sum_1^j t_x + t = 0 \\ \sum_{j+1}^n r_x + r' = 0 \quad , \quad \sum_{j+1}^n s_k + s' = 0 \quad , \quad \sum_{j+1}^n t_k + t' = 0 \end{aligned}$$

da cui sommando e tenendo conto delle precedenti

$$r + r' = 0 \quad , \quad s + s' = 0 \quad , \quad t + t' = 0;$$

cio prova che le ultime due calotte appartengono ad una quadrica. Quindi:

Condizione necessaria e sufficiente affinché n calotte del 2° ordine a centri allineati appartengano ad una stessa superficie algebrica F^n è che prese ad arbitrio j e $j' = n - j$ di esse e costruite pure ad arbitrio una F^{j+1} per le prime j e una $F^{j'+1}$ per le altre, le calotte residue di F^{j+1} e di $F^{j'+1}$ aventi i centri sulla stessa retta appartengano ad una quadrica.

Si noti che questo teorema (conoscendosi già il significato geometrico delle condizioni per F^2 ed F^3) ha un effettivo valore costruttivo delle calotte a centri allineati di F^n . Si abbiano per esempio tre calotte a centri allineati su r di F^4 e inoltre: il centro e il piano tangente della quarta (da costruire; gli altri elementi già dati possono assumersi ad arbitrio). Per due delle calotte date si costruisca una F^3 , cioè si determini la calotta di essa con centro su r (questo punto e il piano tangente possono darsi ad arbitrio; il teorema in fine del n. 5 la determina). Della calotta ora costruita si prenda quella a contatto armonico: per essa e per la terza delle calotte date si costruisca una F^3 passante per il quarto centro col piano tangente assegnato; la calotta di F^3 con questo centro (che si sa costruire) appartiene ad F^4 .

7. FORMA METRICA DELLE RELAZIONI PRECEDENTI. — Alle relazioni, di cui si è rilevato il carattere proiettivo nel teorema precedente, può darsi forma metrica, come ha il teorema del REISS.

Se x, y, z sono coordinate cartesiane ortogonali, $L_i M_i N_i$ i coefficienti della seconda forma fondamentale relativa alla calotta di centro P_i , ed ω_i l'angolo della normale ivi alla superficie con la retta dei centri, le tre relazioni si trascrivono

$$\sum_1^n \frac{L_i}{\cos \omega_i} = 0 \quad , \quad \sum_1^n \frac{M_i}{\cos \omega_i} = 0 \quad , \quad \sum_1^n \frac{N_i}{\cos \omega_i} = 0 .$$

Detta K_i la curvatura gaussiana della calotta di centro P_i si ha notoriamente $K_i = (L_i N_i - M_i^2) \cos^2 \omega_i$; sicchè dalle relazioni scritte si ricava l'altra

$$\frac{K_i}{\cos^4 \omega_i} = \sum_1^n \frac{K_i}{\cos^4 \omega_i} + \sum_{i+k}^n \frac{L_i N_k - M_i M_k}{\cos \omega_i \cos \omega_k}$$

che permette il calcolo della curvatura in un centro note le calotte rimanenti e il piano tangente in quello.

È da osservare che nelle relazioni fondamentali non entrano affatto le distanze dei centri; sicchè esse rimangono soddisfatte comunque si spostino ciascuna calotta per traslazione lungo la retta dei centri. Cioè:

Se n calotte (del 2° ordine) a centri allineati appartengono ad una F^n dando a ciascuna di esse una traslazione arbitraria parallela alla retta dei centri si ottengono n calotte appartenenti ancora a superficie algebriche d'ordine n ⁽¹⁾.

8. CALOTTE A CENTRI ALLINEATI DI IPERSUPERFICIE. — Un breve accenno alle ipersuperficie algebriche V_{r-1}^n in S_r . Si trova che tra le n

calotte del 2° ordine a centri allineati passano $\frac{r(r-1)}{2}$ relazioni; se

$n \leq \frac{r(r-1)}{2}$ alcune di queste relazioni riguardano di necessità i coni

asintotici. Rimane il fatto che distribuite le calotte a centri allineati in più gruppi di j_1, \dots, j_s calotte ($j_1 + \dots + j_s = n$) e costruita ad arbitrio una $V_{r-1}^{j_1+1}$ per le calotte del primo gruppo e così per gli altri fino a $V_{r-1}^{j_s-1}$, le calotte residue di queste varietà con centri sulla retta appartengono a V_{r-1}^s . Rimane anche il fatto relativo alle calotte ottenute con traslazioni arbitrarie lungo la retta dei centri dalle calotte di una V_n^{r-1} .

(¹) Di questo teorema, che permette di considerare anche centri non tutti distinti (purchè la retta dei centri non risulti tangente) vale anche l'analogo per le curve piane, che non credo sia stato finora rilevato.

Meccanica. — *Distribuzione degli sforzi e dei momenti interni nelle verghe rigide.* Nota ⁽¹⁾ di UMBERTO CISOTTI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Scopo di questa Nota è di determinare la distribuzione interna degli sforzi e dei momenti delle verghe rigide in condizioni dinamiche. Si giunge a formule esplicite, abbastanza semplici e maneggevoli — le [10] e [11] — nelle quali intervengono oltre alle caratteristiche del moto rigido (traslazione e rotazione) anche gli elementi che caratterizzano la configurazione geometrica e la costituzione materiale (massa, baricentro e tensore d'inerzia) del tratto di verga compreso tra un suo estremo e il generico punto interno in cui si vuol valutare lo sforzo e il momento.

1. *Linee baricentriche di una linea materiale (verga).* — Si abbia una linea materiale: diciamo s la lunghezza di un arco generico OP ; contato positivamente in un verso prefissato, a partire da un suo estremo O se la linea è aperta, da uno qualunque dei suoi punti se la linea è chiusa; se l è la lunghezza della linea, s varierà tra 0 e l : $0 \leq s \leq l$.

Se ds è un elemento lineare e μds la massa in esso contenuta, μ rappresenta la *densità* di distribuzione delle masse lungo la linea ed è funzione di s , definita nell'intervallo su citato se la verga è eterogenea, costante se omogenea. La massa contenuta nell'arco OP sarà:

$$[1] \quad m = \dot{m}(s) = \int_0^s \mu ds;$$

per cui il baricentro dell'arco stesso risulta definito dalla seguente relazione puntuale ⁽²⁾:

$$[2] \quad G = G(s) = \frac{1}{m} \int_0^s \mu P ds.$$

Facendo variare s il baricentro G descrive una linea che, seguendo il CESARO ⁽³⁾, è a dirsi *linea baricentrica* della verga considerata.

⁽¹⁾ Presentata nell'Adunanza del 18 novembre 1939-XVIII.

⁽²⁾ Cfr. CISOTTI, *Meccanica razionale*, III edizione, Milano, Libreria Editrice Politecnica (1939-XVIII), pag. 169.

⁽³⁾ *Geometria intrinseca*, Napoli, 1896, pag. 78.

2. *Stato d'inerzia variabile lungo la verga.* — Assumiamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale coll'origine in O , al quale riferiremo i punti $P(x, y, z)$ della linea materiale. Poniamo:

$$\begin{aligned} \dot{S}_x(s) &= \int_0^s \mu x^2 ds, & \dot{S}_y(s) &= \int_0^s \mu y^2 ds, & \dot{S}(s) &= \int_0^s \mu z^2 ds; \\ D(s) &= \int_0^s \mu yz ds, & E(s) &= \int_0^s \mu zx ds, & F(s) &= \int_0^s \mu xy ds; \end{aligned}$$

con che D, E, F sono i momenti di deviazione dell'arco OP ; i momenti di inerzia rispetto agli assi di riferimento sono definiti dalle relazioni:

$$A = S_y + S_z, B = S_z + S_x, C = S_x + S_y;$$

$$C - B = S_y - S_z, A - C = S_z - S_x, B - A = S_x - S_y.$$

Dunque A, B, C, D, E, F definiscono lo stato d'inerzia dell'arco OP ; facendo percorrere al punto P la linea, cioè facendo variare s da 0 fino a l , le sei funzioni su indicate variano pure con s , in particolare per $s = l$ si ha definito lo stato di inerzia di tutta la verga.

3. *Richiamo delle equazioni della statica delle verghe.* — Sia $\mathbf{F} ds$ la forza agente sopra l'elemento ds di filo, per cui \mathbf{F} rappresenta la forza per unità di lunghezza; l'azione che viene esercitata in P dal tratto di verga PO' , esterna al tratto OP , è rappresentata da uno sforzo Φ e da un momento Γ . Ponendo (¹):

$$[3] \quad \Gamma^* = \Gamma(s) + (P - O) \wedge \Phi(s),$$

valgono le seguenti equazioni indefinite per l'equilibrio della verga:

$$[4] \quad \mathbf{F} + \frac{d\Phi}{ds} = 0, \quad (P - O) \wedge \mathbf{F} + \frac{d\Gamma^*}{ds} = 0.$$

Le condizioni agli estremi sono:

$$[5] \quad \begin{cases} F_O + \Phi(0) = 0, & M_O + \Gamma(0) = 0, \\ F_{O'} - \Phi(l) = 0, & M_{O'} - \Gamma(l) = 0; \end{cases}$$

rappresentando $\mathbf{F}_O, \mathbf{F}_{O'}$ le forze e $\mathbf{M}_O, \mathbf{M}_{O'}$ i momenti, sollecitatori agli estremi O e O' della verga.

Poniamo:

$$[6] \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}(s) = \int_0^s \mathbf{F} ds, \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}(s) = \int_0^s (P - O) \wedge \mathbf{F} ds,$$

¹) Cfr., ad es., loco primo citato, pag. 248.

con che \mathbf{R} rappresenta la risultante ed \mathbf{M} il momento, rispetto all'estremo O , delle forze \mathbf{F} agenti sopra il tratto di verga OP . Per $P = O$, cioè per $s = 0$, si ha naturalmente $\mathbf{R} = \mathbf{M} = 0$. Per $P = O'$ è $s = l$, per cui, ponendo $\mathbf{R}[l] = \mathbf{R}$, $\mathbf{M}[l] = \mathbf{M}$, \mathbf{R} e \mathbf{M} rappresentano la risultante e il momento, rispetto ad O , delle forze agenti su tutti gli elementi della verga. Dalle [4], integrando tra O e s , si ottiene:

$$[4'] \quad \Phi = -\mathbf{R} + \mathbf{c} \quad , \quad \Gamma^* = -\mathbf{M} + \mathbf{c}^*,$$

designando \mathbf{c} e \mathbf{c}^* due vettori costanti, a priori arbitrari; per l'ultima di queste relazioni dalla [3] si ricava:

$$[3'] \quad \Gamma = \mathbf{c}^* + (P - O) \wedge (\mathbf{c} - \mathbf{R}) - \mathbf{M}.$$

Ammissa la continuità degli sforzi e dei momenti dai punti interni della verga agli estremi, dalle condizioni agli estremi [5], tenute presenti la prima delle [4'] e [3'], si deducono le relazioni seguenti:

$$\mathbf{c} = -\mathbf{F}_O = \mathbf{F}_{O'} + \bar{\mathbf{R}} \quad , \quad \mathbf{c}^* = -\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_{O'} + (O' - O) \wedge \mathbf{F}_{O'} + \bar{\mathbf{M}},$$

che includono le condizioni vettoriali caratteristiche per l'equilibrio:

$$\mathbf{F}_O + \mathbf{F}_{O'} + \bar{\mathbf{R}} = 0 \quad , \quad \mathbf{M}_O + \mathbf{M}_{O'} + \bar{\mathbf{M}} + (O - O') \wedge \mathbf{F}_{O'} = 0.$$

Dopo ciò, dalle [4'] e [3'], si deducono le formule:

$$[7] \quad \boxed{\Phi = -\mathbf{R} - \mathbf{F}_O \quad , \quad \Gamma = -\mathbf{M}_O + (P - O) \wedge (\mathbf{F}_O + \mathbf{R}) - \mathbf{M} \quad ,}$$

le quali determinano completamente lo sforzo Φ e il momento Γ , lungo tutti i punti interni P della verga, quando siano assegnati le forze e i momenti applicati agli estremi.

4. *Verga rigida in moto.* — Dalle equazioni della statica delle verghe rigide si passa a quelle della dinamica sostituendo, a \mathbf{F} , $\mathbf{F} = \mu \mathbf{a}$, designando μ la densità ed \mathbf{a} l'accelerazione di un generico punto P della verga. Basterà dunque porre nelle [4] $\mathbf{F} = \mu \mathbf{a}$ al posto di \mathbf{F} , con che si ottengono le seguenti relazioni:

$$[8] \quad \frac{d\Phi}{ds} = \mu \mathbf{a} - \mathbf{F} \quad , \quad \frac{d\Gamma^*}{ds} = (P - O) \wedge (\mu \mathbf{a} - \mathbf{F}),$$

continuando Γ^* ad essere definito dalla relazione [3].

Ora, introducendo le caratteristiche del moto rigido: la traslazione v_0 e la rotazione ω , si ha notoriamente, indicando con punti sovrapposti alle lettere derivazioni rispetto al tempo ⁽¹⁾:

$$[9] \quad a = \dot{v}_0 + \dot{\omega} \wedge (P - O) + \omega \wedge [\omega \wedge (P - O)].$$

Conseguentemente dalla prima delle [8], integrando, tenendo presente la prima delle [5], nonchè le [1], [2] e [6], si ottiene in definitiva:

$$[10] \quad \Phi = m \{ \dot{v}_0 + \dot{\omega} \wedge [G - O] + [\omega \wedge \omega \wedge (G - O)] \} - F_O - R.$$

Questa formula definisce lo sforzo in tutti i punti della verga.

Per la [9] si ha:

$$(P - O) \wedge a = (P - O) \wedge \dot{v}_0 + (P - O)^2 \omega - [(P - O) \times \omega] (P - O) + [\omega \times (P - O)] (P - O) \wedge \omega,$$

per cui, ponendo:

$$P - O = xi + yj + zk, \quad \omega = \omega_x i + \omega_y j + \omega_z k,$$

si ottiene, con facili riduzioni,

$$(P - O) \wedge a = (P - O) \wedge \dot{v}_0 + \{ (y^2 + z^2) \dot{\omega}_x + xy (\omega_x \omega_z - \dot{\omega}_y) - \\ - xz (\omega_y \omega_x + \dot{\omega}_z) + yz (\omega_z^2 - \omega_y^2) + (y^2 - z^2) \omega_y \omega_z \} i + \dots$$

Per questa, dalla seconda delle relazioni [8], integrando tra O e s , tenendo presenti le formule del n. 2, le [6], si ricava \mathbf{F}^* ; portando nella [3] e tenendo presenti le condizioni agli estremi [5], si deduce per il momento \mathbf{F} la seguente espressione:

$$[11] \quad \mathbf{F} = -\mathbf{M} - \mathbf{M}_O - (P - O) \wedge \Phi + m (G - O) \wedge \dot{v}_0 + \\ + \{ A \dot{\omega}_x - (B - C) \omega_y \omega_z + D (\omega_z^2 - \omega_y^2) - \\ - E (\omega_y \omega_z + \dot{\omega}_z) + F (\omega_x \omega_z - \dot{\omega}_y) \} i + \dots$$

essendo Φ definito dalla [10].

Le formule [10] e [11] definiscono ora, in modo completo, la distribuzione degli sforzi e dei momenti in tutti i punti della verga. Dette formule vanno a coincidere colle [7] nel caso statico, cioè quando è $v_0 = \omega = 0$, com'era da prevedersi.

⁽¹⁾ Cfr., per es., loco primo citato, pag. 112.

5. *Equazioni delle caratteristiche del moto rigido.* — Poniamo:

$$m [l] = \bar{m}, \quad G [l] = \bar{G}, \quad \bar{A} [l] = \bar{A}, \quad B [l] = \bar{B}, \quad C [l] = \bar{C}, \quad D [l] = \bar{D}, \\ E [l] = \bar{E}, \quad F [l] = \bar{F},$$

con che \bar{m} designa la massa, \bar{G} il baricentro e $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}, \bar{E}, \bar{F}$ i momenti e i prodotti d'inerzia di tutta la verga. Allora, ponendo nelle relazioni [10] e [11] $s = l$ e tenendo presenti le condizioni agli estremi [5], si ottengono le seguenti equazioni vettoriali:

$$[12] \quad \left\{ \begin{aligned} F_O + F_{O'} + \bar{R} &= \bar{m} \{ \dot{v}_0 + \dot{\omega} \wedge (\bar{G} - O) + \omega \wedge [\omega \wedge (\bar{G} - O)] \}, \\ M_O + M_{O'} + \bar{M} + (O' - O) \wedge F_{O'} &= \bar{m} (\bar{G} - O) \wedge \dot{v}_0 + \\ &+ \{ \bar{A} \dot{\omega}_x - (\bar{B} - \bar{C}) \omega_y \omega_z + \bar{D} (\omega_z^2 - \omega_y^2) - \\ &- \bar{E} (\omega_y \omega_x + \dot{\omega}_z) + \bar{F} (\omega_x \omega_z - \dot{\omega}_y) \} \mathbf{i} + \dots \end{aligned} \right.$$

Una volta assegnate le sollecitazioni agli estremi, cioè $F_O, F_{O'}, M_O, M_{O'}$, e la risultante R e il momento M delle forze agenti sugli elementi della verga, e nota la costituzione geometrica e materiale della verga, sono da ritenersi quantità note anche $\bar{G}, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}, \bar{E}, \bar{F}$, per cui le due relazioni [12] servono a determinare le caratteristiche cinematiche v_0 e ω del moto rigido, assegnate le loro determinazioni iniziali.

6. *Moti rigidi traslatori.* — Se il moto rigido della verga è traslatorio, avendosi $\omega = 0$, le equazioni [12] si riducono alle seguenti

$$[13] \quad \left\{ \begin{aligned} F_O + F_{O'} + \bar{R} &= \bar{m} \dot{v}_0, \\ M_O + M_{O'} + \bar{M} + (O' - O) \wedge F_{O'} &= \bar{m} (\bar{G} - O) \wedge \dot{v}_0. \end{aligned} \right.$$

Se il moto traslatorio è uniforme, avendosi $\dot{v}_0 = 0$, i secondi membri delle [13] sono nulli e le [13] stesse, così ridotte, esprimono le condizioni statiche caratteristiche. Se il moto traslatorio non è uniforme, eliminando $\bar{m} \dot{v}_0$ dalle due relazioni [13], si ottiene:

$$[14] \quad M_O + M_{O'} + \bar{M} + (O' - O) \wedge F_{O'} = (\bar{G} - O) \wedge (F_O + F_{O'} + \bar{R}).$$

È questa la condizione a cui devono soddisfare le sollecitazioni agli estremi, affinchè la verga si muova di moto traslatorio. Verificata questa condizione, dalla prima delle [13], integrando rispetto al tempo tra t_0 e t , si ottiene:

$$v_0 = \frac{1}{\bar{m}} \int_{t_0}^t (F_O + F_{O'} + \bar{R}) dt + c,$$

designando c la velocità per $t = t_0$. Questa formula esprime che la velocità di traslazione è, ad ogni istante, quella che corrisponde all'impulso, in quell'istante, delle forze applicate alla verga, in aumento alla velocità iniziale.

Per quanto riguarda la distribuzione degli sforzi interni la [10] fornisce:

$$\Phi = m \dot{v}_0 - F_O - R,$$

ovvero, per la prima delle [13],

$$[15] \quad \Phi = \frac{m}{\bar{m}} (F_O + F_{O'} + R) - F_O - R.$$

Per la distribuzione dei momenti basta applicare al caso attuale la [11] tenuto conto della prima delle [13]; si ha:

$$[16] \quad F = -M - M_O + (P - O) \wedge (F_O + R) + \frac{m}{\bar{m}} (G - P) \wedge (F_O + F_{O'} + \bar{R}).$$

7. *Moti rotatori assiali.* — Se si tratta di un moto rotatorio attorno ad un asse fisso, assumendo l'asse x parallelo a quest'asse, si ha:

$$[17] \quad \omega = \dot{\varphi} i, \quad \dot{\omega} = \ddot{\varphi} i,$$

avendo indicato con φ l'angolo, contato positivamente in un verso prefissato, che un piano rigidamente connesso colla verga, e contenente l'asse, forma con un piano fisso, anch'esso contenente l'asse e comunque prescelto. Se P_0 è un punto dell'asse di rotazione, si ha:

$$[18] \quad v_0 = \dot{\varphi} i \wedge (O - P_0);$$

e derivando, dopo eliminato $\dot{O} = v_0$ mediante la precedente, si ottiene:

$$[19] \quad \dot{v}_0 = \ddot{\varphi} i \wedge (O - P_0) + \dot{\varphi}^2 [(O - P_0) \times i] i.$$

Per le [17] e [19], le equazioni [12] diventano:

$$[20] \quad \left\{ \begin{array}{l} F_O + F_{O'} + \bar{R} = \bar{m} \{ \ddot{\varphi} i \wedge (\bar{G} - P_0) + \dot{\varphi}^2 [i \times (\bar{G} - P_0)] i \}, \\ M_O + M_{O'} + \bar{M} + (O' - O) \wedge F_{O'} = \bar{m} (\bar{G} - O) \wedge \\ \quad \wedge \{ \ddot{\varphi} i \wedge (O - P_0) + \dot{\varphi}^2 [(O - P_0) \times i] i \} + \\ \quad + A \ddot{\varphi} i + (\bar{E} \dot{\varphi}^2 - F \ddot{\varphi}) j - (\bar{F} \dot{\varphi}^2 + \bar{E} \ddot{\varphi}) k. \end{array} \right.$$

L'espressione [10] degli sforzi, per le [17] e [19], si semplifica nel modo seguente:

$$[21] \quad \Phi = m \{ \ddot{\varphi} i \wedge (G - P_0) + \dot{\varphi}^2 [(G - P_0) \times i] i \} - F_O - R.$$

Infine, la [11], per [17] e [19], dà la seguente formula che definisce i momenti:

$$[22] \quad \begin{aligned} \mathbf{I} = & -\mathbf{M} + m(G-O) \wedge \{\ddot{\phi} \mathbf{i} \wedge (O-P) + \\ & + \dot{\phi}^2 [(O-P_0) \times \mathbf{i}] \mathbf{i} - \mathbf{M}_O - (P-O) \wedge \boldsymbol{\Phi} + \\ & + A \ddot{\phi} \mathbf{i} + (E \dot{\phi}^2 - F \ddot{\phi}) \mathbf{j} - (F \dot{\phi}^2 + E \ddot{\phi}) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Nel caso di rotazioni uniformi è $\ddot{\phi} = 0$; allora [21] e [22] diventano:

$$[23] \quad \begin{cases} \boldsymbol{\Phi} = -\mathbf{R} - \mathbf{F}_O + m \dot{\phi}^2 [(G-O) \times \mathbf{i}] \mathbf{i}, \\ \mathbf{I} = -\mathbf{M} - \mathbf{M}_O - (P-O) \wedge \boldsymbol{\Phi} + \\ \quad + m \dot{\phi}^2 [(O-P_0) \times \mathbf{i}] (G-O) \wedge \mathbf{i} + \dot{\phi}^2 (E \mathbf{j} - F \mathbf{k}). \end{cases}$$

Se P_0 , invece che un punto comunque prescelto dell'asse, è la proiezione del baricentro \bar{G} della verga sull'asse di rotazione, avendosi $(\bar{G}-P_0) \times \mathbf{i} = 0$, le equazioni [20] diventano:

$$[24] \quad \begin{cases} \mathbf{F}_O + \mathbf{F}_{O'} + \bar{\mathbf{R}} = 0, \\ \mathbf{M}_O + \mathbf{M}_{O'} + \bar{\mathbf{M}} + (O'-O) \wedge \mathbf{F}_{O'} = \\ \quad = \dot{\phi}^2 \{ \bar{m} [(O-P_0) \times \mathbf{i}] (\bar{G}-O) \wedge \mathbf{i} + E \mathbf{j} - F \mathbf{k} \}. \end{cases}$$

Quest'ultima relazione determina il valore della velocità angolare; si ha infatti:

$$\dot{\phi}^2 = \frac{|\mathbf{M}_O + \mathbf{M}_{O'} + \bar{\mathbf{M}} + (O'-O) \wedge \mathbf{F}_{O'}|}{\bar{m} [(O-P_0) \times \mathbf{i}] (\bar{G}-O) \wedge \mathbf{i} + E \mathbf{j} - F \mathbf{k}}.$$

La prima delle relazioni [24] impone una condizione vettoriale affinché sia possibile il moto rotatorio uniforme; altre due condizioni scalari si ottengono eliminando $\dot{\phi}^2$ tra le tre relazioni scalari contenute nella seconda delle relazioni vettoriali [24].

Meccanica (Meccanica celeste). — *Forma d'un pianeta dedotta dai valori della gravità in superficie.* Nota II⁽¹⁾ di CORRADINO MINEO, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

In una Nota precedente dello stesso titolo, sono venuto a questa conclusione.

Sia

$$r = a(1 + \zeta)$$

l'equazione d'una superficie prossima a una sfera, in cui ζ abbia il seguente sviluppo in funzioni sferiche di Laplace:

$$\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \omega^{2n} \sum_{m=0}^{\infty} Z_m^{(n)}.$$

Sia g una funzione che ammetta il seguente sviluppo laplaciano:

$$g = g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \omega^{2n} \sum_{m=0}^{\infty} G_m^{(n)}:$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un pianeta, di rotazione ω costante, del quale una superficie d'equilibrio esteriore abbia l'equazione assegnata, ammetta la funzione g come gravità sulla detta superficie, è che, nell'approssimazione d'ordine n , sia verificato il sistema di equazioni

$$(m-1) Z_m^{(n)} - \frac{1}{g_0} G_m^{(n)} = \frac{2m+1}{2} V_m^{(n)},$$

$$(1-m) Z_m^{(n)} + G_m^{(n)} = \frac{2m+1}{2m} W_m^{(n)},$$

per $m = 0, 1, 2, \dots$, dove $V_m^{(n)}, W_m^{(n)}$ sono due funzioni sferiche d'ordine m dipendenti dalle precedenti approssimazioni (cioè da $Z_n^{(1)}, \dots, Z_m^{(n-1)}$; $G_m^{(1)}, \dots, G_m^{(n-1)}$).

Ne segue che se la condizione

$$[\alpha] \quad W_m^{(n)} = -mg_0 V_m^{(n)} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

⁽¹⁾ Presentata nell'Adunanza del 18 novembre 1939-XVIII.

è soddisfatta, il sistema di equazioni dà $Z_0^{(n)}, Z_2^{(n)}, \dots, Z_m^{(n)}, \dots$, in funzione di $G_0^{(n)}, G_2^{(n)}, \dots, G_m^{(n)}, \dots$, che possono esser prefissate ad arbitrio, mentre $Z_1^{(n)}$ resta affatto arbitraria e $G_1^{(n)}$ deve verificare la condizione

$$[\beta] \quad G_1^{(n)} = -\frac{3}{2} g_0 V_1^{(n)}.$$

Ma per $n = 1$, la $[\alpha]$, dipendente dalla soluzione di partenza ($\zeta = 0$, $g_0 = \frac{C_0}{a}$), è soddisfatta; quindi $G_0^{(1)}, G_2^{(1)}, \dots, G_m^{(1)}, \dots$ si possono effettivamente assegnare ad arbitrio, rimanendo per conseguenza univocamente determinate $Z_0^{(1)}, Z_2^{(1)}, \dots, Z_m^{(1)}, \dots$: non $Z_1^{(1)}$ che resta arbitraria, mentre, risultando $V_1^{(1)} = 0$, deve esser verificata la condizione $G_1^{(1)} = 0$.

Per $n = 2$, la $[\alpha]$, in cui $V_m^{(2)}$ e $W_m^{(2)}$ dipendono dalla prima approssimazione ora detta ($n = 1$), è certamente verificata, in virtù dei valori compatibili di $G_m^{(1)}$ e $Z_m^{(1)}$. Basta pensare che quando si ritengano date le funzioni $Z_m^{(n)}$, il problema è quello di NEUMANN, che si deve ammettere univocamente determinato per le superficie in questione.

Per induzione completa, si arriva quindi alla conclusione:

Per ogni assegnazione delle funzioni

$$Z_1^{(1)}, Z_1^{(2)}, \dots, Z_1^{(n)}, \dots,$$

resta per conseguenza determinata una superficie sulla quale la gravità g ha uno sviluppo laplaciano prefissato ad arbitrio, salve le funzioni sferiche $G_1^{(1)}, G_1^{(2)}, \dots, G_1^{(n)}, \dots$ di 1° ordine, che devono verificare la $[\beta]$.

Si noti che $V_1^{(n)}$, in fondo, dipende soltanto da $Z_1^{(1)}, Z_1^{(2)}, \dots, Z_1^{(n-1)}$. Ci si può allora chiedere se le $[\beta]$ non siano atte a determinare successivamente $Z_1^{(1)}, Z_1^{(2)}, \dots, Z_1^{(n)}, \dots$, nel qual caso la gravità si potrebbe dare interamente ad arbitrio sulla cercata superficie, che resterebbe perfettamente determinata. Esamineremo prossimamente questa importante questione, che richiede lo studio della struttura analitica delle funzioni $V_m^{(n)}$ e $W_m^{(n)}$.

Nella presente Nota ci occupiamo in particolare del problema di determinare la superficie, ammettendo che l'assegnata funzione g verifichi le condizioni di compatibilità $[\beta]$, come si deve pensare che avvenga quando la g vien data sperimentalmente.

1. EQUAZIONE DI FREDHOLM DALLA QUALE DIPENDE LA DETERMINAZIONE DELLA SUPERFICIE, AMMESSO CHE LA GRAVITÀ VERIFICHINO LE CONDIZIONI DI COMPATIBILITÀ. — La determinazione di S (sempre nel caso di

soluzioni in prossimità d'una sfera in riposo) dipende soltanto dalla prima equazione [23] della citata Nota I, equazione che scriviamo così:

$$[1] \quad \zeta_n(P) = \frac{3}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{\zeta_n(M)}{\sqrt{2-2\cos\gamma}} d\sigma_M + f_n(P),$$

dove

$$[2] \quad f_n(P) = \frac{1}{2\pi g_0} \int_{\sigma} \frac{g_n(M)}{\sqrt{2-2\cos\gamma}} d\sigma_M + v_P^{(n)}$$

si deve ora considerare come una funzione nota.

$L^i i^{mo}$ nucleo iterato della [1] è

$$[3] \quad K_i(M, P) = \frac{3^i}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(\cos\gamma)}{(2n+1)^{i-1}},$$

ed è continuo su tutta la sfera σ per $i > 2$, giacchè la serie a secondo membro della [3] è allora assolutamente e uniformemente convergente su σ . La [1] è equivalente a

$$[4] \quad \zeta_n(P) = \lambda \int_{\sigma} K_3(M, P) \zeta_n(M) d\sigma_M + F_n(P),$$

per il valore $\lambda = 1$, essendo

$$[5] \quad F_n(P) = f_n(P) + \int_{\sigma} K_1(M, P) f_n(M) d\sigma_M + \int_{\sigma} K_2(M, P) f_n(M) d\sigma_M.$$

Com'è noto, l'equazione omogenea relativa alla [4] non ha altra soluzione se non una funzione sferica⁽¹⁾. Precisamente la funzione sferica $Y_m(\theta, \varphi)$ è soluzione quando

$$\lambda = \frac{(2m+1)^3}{27}.$$

Le costanti caratteristiche del nucleo $K_3(M, P)$ sono quindi

$$\frac{1}{27}, \quad 1, \quad \frac{625}{27}, \quad \dots, \quad \frac{(2m+1)^3}{27}, \quad \dots$$

Nel caso nostro dunque ($\lambda = 1$), l'equazione [4] è una equazione *singolare*, perchè la relativa equazione omogenea ha come soluzione una qualunque funzione sferica di 1° ordine (e questa soltanto). Come si sa dalla

(¹) Vedi per es. GOURSAT, *Cours d'Analyse mathématique*, vol. III, 1927, pagg. 265-266.

teoria delle equazioni di FREDHOLM, condizione necessaria e sufficiente affinchè la [4], per $\lambda = 1$ abbia soluzioni, è che sia verificata la relazione

$$[6] \quad \int_{\sigma} F_n(P) Y_1(P) d\sigma_P = 0,$$

dove $Y_1(P)$ è appunto una qualunque funzione sferica del 1° ordine. Si hanno allora infinite superficie, determinate cioè a meno d'una funzione sferica del 1° ordine, sulle quali la gravità è quella assegnata.

2. *Caso in cui la funzione ζ ammetta uno sviluppo laplaciano privo di funzione sferica del 1° ordine.* — Se si cerca la soluzione ζ tra le funzioni sviluppabili in una serie di funzioni di LAPLACE nella quale manchi la funzione sferica del 1° ordine (questo caso è importante dal punto di vista meccanico, come vedremo in una prossima Nota), allora il nostro problema si può far dipendere dall'equazione

$$[7] \quad \zeta_n(P) = \frac{27}{4\pi} \int_{\sigma} \zeta_n(M) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{P_n(\cos \gamma)}{(2n+1)^2} d\sigma_M + F_n(P) \quad (1).$$

In questo caso la serie dei nuclei iterati è convergente, avendosi

$$[8] \quad \frac{3^3}{4\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{P_n(\cos \gamma)}{(2n+1)^2} + \dots + \frac{3^{3i}}{4\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{P_n(\cos \gamma)}{(2n+i)^{3i-1}} + \dots = \\ = \frac{27}{8\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)(4n^2+10n+13)} P_n(\cos \gamma) = \Gamma(M, P).$$

E la soluzione di [7] è

$$[9] \quad \zeta_n(P) = F_n(P) + \int_{\sigma} \Gamma(P, M) F_n(M) d\sigma_M.$$

Se s'impone la condizione che anche l'assegnata gravità abbia uno sviluppo laplaciano privo di funzione sferica del 1° ordine, si vede facilmente che la condizione $[z]$ è soddisfatta se e soltanto se lo sviluppo laplaciano di $\psi_P^{(n)}$ manchi anch'esso di funzione sferica di 1° ordine.

Ci proponiamo di calcolare, in una prossima Nota, la seconda approssimazione, tanto importante per le applicazioni, e di esaminare la que-

(1) Questa equazione è stata adoperata dal SIGNORINI, per dimostrare rigorosamente la formula di STOKES ($n = 1$). Vedi « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », vol. XX, 1911, pag. 219-222. Vedi anche C. MINEO, *Sulla formula di Stokes che serve a determinare la forma della Terra*, « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », to. LI, 1927.

stione della convergenza della soluzione formale. Se si riesce, per esempio, a dimostrare una condizione del tipo

$$|F_n(P)| < \frac{h^n}{\sigma_1^n},$$

Con h costante positiva e minor d'uno, la serie

$$\zeta = \zeta_1 \omega^2 + \dots + \zeta_n \omega^{2n} + \dots$$

risulta allora assolutamente e uniformemente convergente su tutta la sfera unitaria σ purchè ω appartenga all'intervallo $(0, \omega_1)$.

Astronomia. — *Sul problema della variazione delle latitudini.* Nota ⁽¹⁾ dell'Accademico EMILIO BIANCHI.

Nella Memoria n. 11 del R. Osservatorio Astronomico di Capodimonte ⁽²⁾, il prof. CARNERA, Direttore di quella Specola e dell'annesso Ufficio internazionale delle latitudini, sottopone ad accuratissima analisi le osservazioni di latitudine fatte alla Stazione di Batavia negli anni 1931-37; giungendo a risultati i quali suggeriscono considerazioni che non ci sembrano prive di interesse, e che qui esponiamo in succinto, con tacito riferimento a fatti e questioni ben note a tutti coloro che del problema generale della variazione delle latitudini si interessano.

L'autore, dopo aver fissato i migliori valori delle declinazioni delle stelle, intraprende la discussione delle osservazioni con la ricerca delle correzioni residue $d\delta$ alle declinazioni medie di ciascun gruppo; e ciò a mezzo delle differenze $z - d\delta$ calcolate liberando le $\Delta\varphi = \varphi_{oss} - \varphi_0$ dello importo della variazione polare, espressa dal binomio $x \cdot \cos \lambda + y \sin \lambda$, nel quale sono posti per x ed y i valori forniti dal Servizio internazionale delle latitudini; e deducendo per ciascun gruppo osservato dette differenze $z - d\delta$ in due serie distinte a seconda che trattasi di osservazioni serali s oppure di osservazioni mattutine m del gruppo stesso.

Risultato essenziale di tale calcolo si è che quelle differenze mostrano un andamento chiaro coi successivi gruppi, cioè col tempo; ed altrettanto mostrano, naturalmente, le differenze $z_s - z_m$.

Era ben ovvio che, di fronte a tale fatto, si pensasse ad una rappresentazione analitica diretta ad esprimere la z locale come somma di un termine costante (c_m per i gruppi mattutini e c_s per i gruppi serali) e di termini periodici a coefficienti costanti. Ed anzi, eliminate le correzioni incognite $d\delta$ con la considerazione per ciascun gruppo delle differenze $z_s - z_m$, sono appunto queste differenze che l'autore rappresenta in definitiva con la somma di un termine costante $c_s - c_m = 0''.019 \pm 0''.011$ e di termini periodici, indirizzando la ulteriore discussione, (dopo la conclusione delle correzioni $d\delta$), allo accertamento della realtà di una tale rappresentazione.

Orbene: una attenta disamina di tutto quanto concerne la preparazione dei dati numerici che stanno alla base della ricerca e di tutto quanto

⁽¹⁾ Presentata nell'Adunanza del 18 novembre 1939—XVIII.

⁽²⁾ *Ricerche sulle variazioni della latitudine osservata nella stazione di Batavia.*

ha riferimento alla interpretazione di ciò che possono rappresentare effettivamente e il termine costante ed i termini periodici ora ricordati, induce a convincimenti che, pur non disconoscendo l'alto interesse della indagine qui in esame, non riescono tuttavia (a nostro avviso), a trattenere il lettore da talune riserve essenziali ed anzi lo conducono ad una radicale disamina del problema generale della variazione delle latitudini.

Infatti, per quanto concerne la preparazione dei dati numerici che stanno alla base della ricerca di cui parliamo, una prima obiezione fondamentale viene subito suggerita; ed è questa:

i valori delle coordinate x ed y del polo, quali risultano dal Servizio internazionale delle latitudini, sono notoriamente assai incerti, *rispetto al loro esclusivo significato polare*, perchè inquinati dalla influenza che le anomalie locali hanno sulle osservazioni delle stazioni di latitudine; anomalie locali che, pur allo stesso istante, gravano in modo diverso sulle misure delle diverse Stazioni e che sono variabili col tempo ancora in modo diverso da luogo a luogo; così che il termine $x \cdot \cos \lambda + y \cdot \sin \lambda$ non dà soltanto la anzidetta parte polare, ma porge questa sommata ad una parte spuria, nella realtà inscindibile dalla prima, e che tanto più è di efficienza pericolosa nell'analisi di dati numerici derivanti comunque dall'uso di detti valori di x ed y , in quanto, con ogni probabilità, questi finiscono con l'essere proprio affetti da vizi di carattere periodico annuo e di entità che, in valore assoluto, certo raggiunge l'ordine perfino di *parecchi centesimi di secondo d'arco*; come è detto già dalla natura stessa del problema, e come può essere precisato, in via specifica, ad esempio, dallo stesso esame critico comparativo dei risultati che per x ed y si ottengono usufruendo delle sole cinque Stazioni internazionali boreali, oppure di esse associate alle due australi. Il che equivale a dire: a seconda che si pongono alla base del calcolo di x ed y dati numerici affetti dalla sola influenza del sistema globale delle anomalie locali spettante alle Stazioni boreali, oppure dati numerici affetti invece dall'influenza che è somma spuria dell'effetto delle anomalie locali boreali con quello delle anomalie locali australi.

È vero che, volendo comunque discutere i residui di rappresentazione delle latitudini osservate, cioè gli z locali, non vi è altra via che servirsi degli x ed y internazionali; ma è altrettanto vero che, non potendosi, per quanto si disse, assolutamente avere con tale procedimento la parte di variazione della latitudine che è dovuta al solo moto polare con la necessaria esattezza, occorre procedere con estrema riserva quando poi si discutono e si sottopongono ad interpretazione sia pur solo analitica (tanto più poi se miranti anche a precisazioni numeriche), i risultati, che si possono derivare dall'analisi degli z locali, specie se la discussione finisce (come è inevitabile) con l'aggrarsi su grandezze dell'ordine dei centesimi di secondo d'arco; mentre un tale procedimento è non solo

autorizzato, ma anzi di efficienza quanto mai decisiva se esso mira *soltanto* a mettere in luce l'impotenza del Servizio internazionale delle latitudini a dare x ed y esatti, e tende a concludere i residui z a periodo annuo, come io feci per primo sulle osservazioni di Roma del 1912-13 e come fecero poi tanti altri dopo di me.

Ma ammettiamo pure per un momento di poter considerare i valori $z - \delta\delta$ come liberi da forti effetti perturbatori; prescindendo, cioè, dal fatto della impossibilità di porre alla base di una ricerca diretta a conclusioni tanto delicate, i termini z ottenuti con la depurazione delle $\Delta\varphi$ a mezzo degli x ed y internazionali.

È tuttavia facile vedere la importanza delle seguenti ulteriori considerazioni.

Sulla base dei dati pubblicati dall'Autore è immediata la deduzione dei valori di z corrispondenti ai diversi gruppi osservati: basta liberare le differenze $z - \delta\delta$ dei valori $\delta\delta$ conclusi. Si ottengono così i seguenti dati (in millesimi di secondo d'arco):

Gruppo	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
z soliti . .	+ 30	+ 56	+ 72	+ 74	+ 58	+ 24	- 25	- 66	- 85	- 74	- 43	+ 1
z mattino . .	+ 25	+ 38	+ 38	+ 88	+ 49	+ 38	- 8	- 58	- 98	- 96	- 57	- 57
z sera . .	+ 35	+ 75	+ 105	+ 59	+ 67	+ 7	- 42	- 75	- 72	- 54	- 30	+ 56
$z_s - z_m$. .	+ 10	+ 37	+ 67	- 29	+ 18	- 31	- 34	- 17	+ 26	+ 42	+ 27	+ 113

I valori di z della prima orizzontale sono quelli che derivano dalle osservazioni globali relative ai successivi gruppi: quelli della seconda e terza riga rispettivamente dalle osservazioni del mattino e della sera; nella ultima riga sono indicate le differenze tra gli elementi della terza e quelli della seconda; ed esse coincidono ovviamente con le differenze dell'ultima riga della Tabella III della Memoria in esame, sulle quali è essenzialmente basata la ricerca.

Orbene: i numeri della prima riga, rappresentati graficamente, mostrano un andamento sinusoidale a periodo annuo; è questa la variazione a periodo annuo (non polare, cioè locale, pura od impura non importa) che dalle latitudini di Batavia risulta in modo perfettamente identico a quanto è successo sempre e sempre succede (anche per quanto riguarda l'ampiezza) di ogni altra variazione non polare di tale tipo, finora precisata in tante altre Stazioni.

Ma è facile vedere che la variazione serale dall'autore trovata non è che una necessaria e naturale conseguenza di tale z annuo.

Consideriamo, infatti, accanto alla curva rappresentativa degli z , i valori che, per ciascun gruppo, corrispondono alla seconda ed alla terza riga del quadro precedente, cioè gli z_m e gli z_s ; si vede subito che essi si scostano sistematicamente dalla curva degli z globali; e precisamente nel primo quadrante gli z_m del mattino danno punti al di sotto della curva; nel secondo e nel terzo al di sopra; nel quarto al di sotto; e naturalmente il contrario dimostrano gli z_s serali.

E così deve essere: perchè le osservazioni mattutine di un certo gruppo precedendo sempre, in ordine di tempo, quelle serali del gruppo stesso, daranno luogo nel primo quadrante a valori di z più bassi di quelli relativi alle osservazioni serali del gruppo stesso, perchè ivi la curva sale; mentre il contrario avverrà nel secondo e terzo quadrante, perchè ivi la curva scende; e di nuovo nel quarto quadrante ritorneranno come nel primo col risalire della curva stessa.

Prima adunque di soffermarsi sul fatto che le osservazioni mattutine e serali di un medesimo gruppo sono fatte in media ad un intervallo di un mese meno due ore, e dare importanza solo a ciò che può succedere nel decorso serale di un paio d'ore, occorre tener bene presente quanto certamente succede nello intervallo di un mese.

Facciamo pure l'ipotesi che effettivamente vi sia una variazione serale delle latitudini. Essa dovrebbe risultare da uno studio molto accurato (ma ovviamente tutt'altro che facile e sicuro) delle differenze fra e le latitudini derivate dal primo e dal secondo gruppo di ciascuna combinazione, osservati ad una distanza media di un paio d'ore nella stessa sera. E così fece e calcolò il WANACH facendo l'analisi del primo dodicennio di osservazioni internazionali.

Ma se invece vogliamo esaminare una tale ipotesi sulla considerazione degli $z_s - z_m$, ci veniamo a trovare di fronte a dei numeri che contengono in sè non solo questo ipotetico effetto serale, ma, sovrapposto ad esso, l'effetto della variazione che, nel corso di un mese, hanno subito le latitudini istantanee osservate in causa della inevitabile variazione delle anomalie locali in detto intervallo di tempo, ed in più l'effetto differenziale della incertezza di cui sono affetti gli z stessi.

È ben evidente quindi che, fuori della via sopraindicata, del confronto, cioè, delle latitudini date da gruppi successivi osservati nella stessa sera, è assolutamente impossibile, coi mezzi oggi a nostra disposizione, la separazione dei due effetti sovrapposti.

Conclusioni. — 1° L'analisi delle osservazioni di Batavia conferma numerosi precedenti risultati circa la esistenza, nelle latitudini osservate, di un termine non polare, con periodo annuo ed andamento sinusoidale.

La presenza di questo termine (z locale) spiega perfettamente l'andamento sistematico delle differenze $z_s - z_m$ e trova già completa giustificazione in un'onda annua della refrazione zenitale, senza voler qui precisare le cause fisiche di essa.

L'Autore, invece, interpreta le anzidette differenze $z_s - z_m$ come dovute esclusivamente al fatto che un medesimo gruppo è osservato, in due successive combinazioni, alla distanza media di un paio d'ore; e quindi ritiene dimostrata la esistenza di una variazione locale serale, a cui si aggiunge probabilmente un termine variabile nel corso dell'anno; variazione, diciamo noi, che dovrebbe essere giustificata fisicamente da una onda diurna della refrazione zenitale variabile nel corso dell'anno.

La questione di decidere circa la realtà ed esclusività di una onda diurna oppure di una onda annua, oppure della coesistenza di esse, è talmente delicata dal punto di vista di una valutazione numerica, non solo, ma anche soltanto dal punto di vista di una valutazione qualitativa, che, riferendoci alle considerazioni iniziali di questo scritto, è da ritenersi assolutamente impossibile una decisione in merito, sino a che si lavora su degli z gravemente inquinati per la grave incertezza che tuttora persiste nella valutazione del termine internazionale polare.

2° Questa conclusione è sensibilmente pessimistica; ma, allo stato delle cose, è la sola che noi giudichiamo vera ed inoppugnabile. Disgraziatamente, rispetto alla vera latitudine media, una latitudine istantanea osservata è affetta dal termine polare, da una anomalia serale e da una anomalia annua, con entità, le due ultime, variabile (pur nello stesso istante) da luogo a luogo.

Ne consegue la impossibilità non solo di sceverare bene la componente polare, ma, peggio ancora, di scindere, come dicevamo, le due anomalie locali, serale ed annua; tutto ciò essendo assolutamente indipendente dal grado di precisione sino ad oggi raggiunto nelle osservazioni di latitudine; grado di precisione che potrà essere, se mai, aumentato solo quando si abbia conclusa una riorganizzazione del Servizio delle latitudini atta sicuramente a fornire al calcolatore la possibilità di scindere, precisare e valutare nei dati osservati la parte spettante alle diverse cause della variazione di essi col tempo e col luogo.

In altri termini: data la impossibilità di esprimere analiticamente le ricordate anomalie locali a mezzo di coefficienti che siano funzioni di quantità ben definite relative alle caratteristiche geografiche locali e non già ad elementi meteorologici od affini difficilmente precisabili, riesce vano il tentativo di concludere le anomalie in parola sulla base dei dati oggi osservati; questi, anzi, per le ragioni sopra dette, non possono nemmeno dare esatta e pura la componente del moto del polo.

3° Ed allora che cosa occorre e si può fare ?

Occorre considerare il problema generale della variazione delle latitudini nella sua realtà; e cioè in obbedienza alle esigenze dettate dalla natura sua vera ed intrinseca. Occorre convincersi, cioè, che, almeno per ora, la questione di risolvere un tale problema non è già riferibile all'ordine di precisione delle osservazioni con le quali lo abbiamo sin qui studiato, ma invece (cosa assai più grave) alla organizzazione (se possibile) dello studio di esso dipendentemente dall'obbedienza, come dicevo, alla sua realtà costitutiva; realtà che da troppi anni ormai è apparsa chiaramente assai più complessa di quanto dapprima non si credesse; e rispetto alla quale le armi che da oltre quarant'anni andiamo usando si sono dimostrate insufficienti, non già perchè troppo poco potenti o raffinate, ma perchè incapaci di abbracciare e tenere entro il ferreo dominio dell'osservazione diretta *tutti* i lati essenziali del problema stesso.

Con procedimenti osservativi come gli attuali, atti soltanto a dare la variazione *globale e complessiva* della latitudine istantanea *osservata* rispetto alla media, non si può certo risalire ad una precisazione separata ed esatta delle diverse componenti di detta variazione; e cioè della sua componente polare, di quella anomala locale serale e di quella anomala locale annua.

4° L'attuale Servizio internazionale delle latitudini domanda dunque una radicale riforma, dipendentemente dal concetto che esso, così come è oggi, è nello stesso tempo *esuberante* ed insieme *deficiente*.

È *esuberante* (nella sua composizione di ben cinque stazioni boreali e due australi) se si assegna ad esso il compito di fornire soltanto gli elementi *approssimativi* (come *soltanto* può fare oggi) del moto del polo, a scopo astronomico-geodetico (riduzioni al polo medio ecc. o viceversa). Per questo evidentemente sarebbero più che sufficienti quattro stazioni al massimo, di cui (per ragioni ovvie dopo quanto abbiamo detto e che ad ogni modo ripeteremo subito) due boreali e due australi, opportunamente disposte ed accoppiate.

È invece *deficiente* se si intende che gli sia affidato non solo il compito astronomico-geodetico qui sopra specificato, ma quello altresì di raccogliere osservazioni atte ad uno studio a fondo del problema generale della variazione delle latitudini nella realtà sua che è, come abbiamo già detto, ben più complessa e delicata.

Se questo è il compito di detto Servizio, occorre decidersi ormai a porre come base della sua organizzazione il seguente principio fondamentale ed essenziale: *costituire il Servizio in modo che esso, anzitutto, sia capace di dare esatta, od almeno con alta approssimazione, la componente polare della variazione della latitudine*; per modo da permettere una ulteriore utilizzazione dei dati osservati per lo studio approfondito, e sicuro (cioè non infido) degli altri sottoproblemi che accompagnano quello polare e che potremmo dire delle variazioni anomale locali; eventualmente, anche di altri.

5° Ma come può essere raggiunto un tale scopo ?

Parrebbe atto a suggerire la risposta a tale domanda il fatto, (già constatato per merito dell'attuale Ufficio internazionale delle latitudini di Napoli), del miglioramento che si manifesta nei risultati di calcolo delle osservazioni internazionali di latitudine se basati sulla utilizzazione simultanea delle stazioni boreali e di quelle australi, anzichè delle sole boreali. Parrebbe, in altre parole, di poter dire: siccome, da una parte, con le attuali sette stazioni, di cui cinque boreali e solo due australi, sono certamente lontane dall'essere raggiunte una buona compensazione ed una reciproca neutralizzazione dell'influenza delle anomalie locali sui risultati globali che possono trarsi dalle osservazioni internazionali di latitudine; e siccome, d'altra parte, è ovviamente chiaro, e praticamente dimostrato, il beneficio della considerazione (come dicevo) simultanea di tutte le stazioni oggi in funzione, anzichè delle sole boreali; si aumenti ancora il numero delle stazioni osservative, specie creandone altre di australi, in modo da poter *sperare* che, nel nuovo blocco, la compensazione e reciproca neutralizzazione delle anomalie locali di cui si fece ora cenno possano essere, se non completamente, almeno in massima parte raggiunte; e quindi la questione avvicinata alla soluzione.

Ma è ben difficile dare un tale consiglio in senso deciso; grande essendo già ed assai pesante il dispendio di lavoro e di mezzi che costa l'attuale Servizio internazionale delle latitudini, con 7 stazioni.

Piuttosto parrebbe assai più logico porre netta e cruda sul tappeto la proposta di promuovere uno studio della questione, diretta a precisare se sia attuabile o no nell'attuale Servizio una riforma radicale che consideri la possibilità di associare alle misure di latitudine quali oggi si fanno, altre ricerche sperimentali di natura affatto diversa, il tutto diretto allo scopo risolutivo che già ho sopra esattamente indicato.

6° E se da una tale indagine dovesse venire una risposta nettamente negativa, parmi evidente la opportunità, anzi la logicità, di ripiegare su di un servizio ridotto, meno pesante, meno costoso e meno impegnativo dell'attuale; ma soprattutto più consono alle effettive e reali possibilità risolutive insite nel problema stesso indagato. Se così dovesse essere, nessuna recriminazione per il lavoro sin qui compiuto anche se esso sarà così risultato privo di adeguato compenso. È questo talora il destino di talune ricerche, anche se organizzate e perseguite con tutta la cura e serietà possibili, come indubbiamente fu fatto nel caso del problema della variazione delle latitudini.

Astronomia. — *I problemi fondamentali della Cosmogonia e la legge di Newton.* Nota V⁽¹⁾ di GIUSEPPE ARMELLINI⁽²⁾,
Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. Mentre un Sistema Planetario si evolve, col passare dei milioni di secoli, cambiano le eccentricità delle orbite planetarie, le loro inclinazioni ecc. Ma due cose restano costanti e cioè: 1° La *massa totale* del Sistema, almeno trascurando la piccola quantità di materia che si può trasformare in energia; 2° Il *momento della quantità di moto*, giacchè il Sistema è sottoposto soltanto a forze interne e le attrazioni delle stelle lontanissime possono considerarsi come trascurabili.

Ora nel nostro Sistema Planetario queste due entità invariabili sono assai diversamente ripartite. Ed infatti la massa risiede quasi interamente nel Sole, che ha una massa circa ottocento volte superiore a quella di tutti i pianeti messi insieme; invece il momento della quantità di moto risiede quasi interamente nei pianeti che uniti hanno un momento circa trenta volte superiore a quello del Sole.

Questa strana singolarità del nostro Sistema Planetario ha attirato da tempo l'attenzione degli astronomi ed anzi costituisce uno degli argomenti favorevoli all'ipotesi cosmogonica dualistica, benchè a dir vero come ha mostrato il Gialanella⁽³⁾ non sia inconciliabile con l'ipotesi cosmogonica di Laplace. Vedremo ora come questa singolarità si spieghi invece in modo assai semplice con la nostra ipotesi cosmogonica. E ciò tanto più che tale premessa ci è necessaria per studiare la lenta diminuzione della velocità angolare di rotazione del Sole ω e dedurre poi l'età del nostro Sistema Planetario, partendo dal valore 4.10^{-14} del coefficiente cosmogonico ε (in unità C. G. S.) che abbiamo dedotto nella precedente Nota IV.

2. Come nelle precedenti Note, prendiamo per origine O il centro del Sole e tre assi ortogonali di direzione invariabile, scegliendo come asse

⁽¹⁾ Presentata nell'Adunanza del 18 novembre 1939-XVIII.

⁽²⁾ Le precedenti Note sono pubblicate in « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », 1937, sem. II; 1938 sem. I e II, 1939 sem. I.

⁽³⁾ Cfr. GIALANELLA, *Il nom. della quantità di moto del Sistema Planetario e l'ipotesi cosmogonica di Laplace* in « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », 1936, sem. I.

z l'asse di rotazione del Sole (onde il piano xy sarà il piano equatoriale solare) diretto positivamente in modo che per un osservatore avente i piedi in O e la testa dalla parte positiva anche la velocità angolare ω di rotazione del Sole risulti positiva. Siano poi x, y, z le coordinate di un pianeta P , di massa m estremamente piccola rispetto a quella del Sole M . Le componenti X, Y, Z della forza complementare Φ che agisce sul pianeta, in virtù dell'introduzione del termine cosmogonico, sono seconde le equazioni [4] della nostra Nota III:

$$[1] \quad \begin{cases} X = -\varepsilon f m \left[\frac{Mx}{R^3} \frac{dR}{dt} + \frac{C}{2R^4} \left(\frac{dx}{dt} + \omega y \right) \right] \\ Y = -\varepsilon f m \left[\frac{My}{R^3} \frac{dR}{dt} + \frac{C}{2R^4} \left(\frac{dy}{dt} - \omega x \right) \right] \\ Z = -\varepsilon f m \left[\frac{Mz}{R^3} \frac{dR}{dt} + \frac{C}{2R^4} \frac{dz}{dt} \right] \end{cases}$$

dove f indica il coefficiente attrattivo di Newton ($f = 6,67 \cdot 10^{-8}$ in unità C. G. S.), R la distanza OP e C il momento d'inerzia del Sole rispetto all'asse z .

3. Passiamo ora dalle coordinate cartesiane a coordinate cilindriche r, α, z , chiamando con r la distanza OP' (dove P' indica il piede della perpendicolare abbassata dal P sul piano xy) e con α l'angolo che OP' forma con l'asse x ; angolo che contiamo nel senso positivo (e cioè nello stesso senso della rotazione del Sole) a partire dalla parte positiva dello stesso asse x . Abbiamo immediatamente

$$[2] \quad \cos \alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad ; \quad \sin \alpha = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$[3] \quad R^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2 + z^2.$$

Decomponiamo ora la forza complementare Φ in tre componenti ortogonali F, T, Z . Precisamente la F sia diretta secondo la perpendicolare PP'' abbassata da P sull'asse z scegliendo come senso positivo quello da P'' verso P ; la T sia diretta parallelamente al piano xy in direzione normale alla F scegliendo come senso positivo quello della rotazione del Sole; infine la Z coincida con la terza componente già data dalle [1]. Avremo:

$$[4] \quad F = X \cos \alpha + Y \sin \alpha$$

$$[5] \quad T = -X \sin \alpha + Y \cos \alpha.$$

Tenendo presente la [1], [2] e [3] si ha:

$$[6] \quad x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = r^2 \frac{d\alpha}{dt}$$

e quindi con pochi calcoli si ottiene da [4] e da [5]:

$$[7] \quad F = -\frac{\varepsilon f m}{R^4} \left[\left(M r^2 + \frac{C}{2} \right) \frac{dr}{dt} + M r z \frac{dz}{dt} \right]$$

$$[8] \quad T = \frac{C \varepsilon f m r}{2 R^4} \left[\omega - \frac{dz}{dt} \right].$$

Osserviamo che se il pianeta si muovesse sul piano equatoriale del Sole descrivendo un'orbita circolare di raggio a , si avrebbe $z = 0$ ed $r = \text{costante}$, onde risulterebbe $F = 0$ in perfetto accordo con quanto dicemmo nella nostra Nota I. Osserviamo pure che in tal caso, avendosi $r = R = a$, anche la [8] coincide con la [25] della stessa Nota I.

3. Indichiamo ora con K_z il momento della quantità di moto del pianeta P rispetto all'asse z ; per note proprietà meccaniche, la derivata di K_z rispetto al tempo sarà eguale al momento delle forze agenti su P rispetto a z . Ma F e Z hanno momento nullo rispetto a questo asse, mentre il momento di T è eguale a Tr . Sarà dunque:

$$[9] \quad \frac{dK_z}{dt} = \frac{C \varepsilon f m r^2}{2 R^4} \left[\omega - \frac{dz}{dt} \right].$$

D'altra parte, poichè il momento totale della quantità di moto del sistema Sole-Pianeta si mantiene costante, la derivata del momento della quantità di moto del Sole sarà eguale e di segno contrario a $\frac{dK_z}{dt}$. In conseguenza, poichè il momento della quantità di moto del Sole è eguale a $C\omega$, si ha

$$[10] \quad \frac{d\omega}{dt} = -\frac{\varepsilon f m r^2}{2 R^4} \left[\omega - \frac{dz}{dt} \right].$$

Ora ω è positiva e maggiore di $\frac{dz}{dt}$ che rappresenta la proiezione sul piano xy della velocità angolare del moto di rivoluzione del pianeta intorno al Sole. Ne segue che K_z è funzione crescente del tempo, mentre ω è funzione decrescente; in altre parole, *il momento della quantità di moto passa dal Sole nel pianeta. Ciò spiega perchè, data l'antichità del nostro Sistema Planetario, il momento della quantità di moto si trovi oggi quasi interamente raccolto nei pianeti.*

Notiamo che se τ indica il tempo che il Sole impiega a compiere una rotazione, si ha ovviamente $\tau\omega = 2\pi$, donde:

$$[11] \quad \frac{1}{\tau} \frac{d\tau}{dt} = -\frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{dt} = \frac{\varepsilon f m r^2}{R^4} \left[1 - \frac{1}{\omega} \frac{dz}{dt} \right]$$

ciò che mostra che la durata della rotazione del Sole cresce col tempo.

Ponendo $\varepsilon = 4.10^{-11}$, come nella Nota IV, il calcolo numerico mostra, che, a causa dell'attrazione di Giove, la durata della rotazione del Sole aumenta di circa 0,006 secondi per ogni secolo; a causa di Saturno, l'aumento sarebbe di circa 0,001 per secolo ecc. In totale, a causa dell'introduzione del termine cosmogonico, l'attrazione dei pianeti aumenterebbe il tempo di rotazione solare di appena un centesimo di secondo per secolo; quantità troppo piccola per produrre qualsiasi divario con le osservazioni, anzi per essere sensibile alle osservazioni.

4. In una prossima Nota, vedremo come servendosi della [10] e delle equazioni trovate nella Nota precedente, sia possibile calcolare l'età del nostro Sistema Planetario supponendo che inizialmente le inclinazioni e le eccentricità fossero forti ecc. e che i deboli valori attuali siano dovuti unicamente all'influenza del termine cosmogonico nel lungo corso dei secoli. Vedremo anzi come l'età, che così si trova, risulta dell'ordine di grandezza di quella calcolata con altri metodi.

Ma ora, prima di terminare, dobbiamo dire qualche parola sopra una difficoltà sollevata ⁽¹⁾ recentemente in proposito dal prof. F. Zagar, mostrando come essa risulti infondata.

Come dicemmo nelle Note precedenti, se il moto di rivoluzione di un pianeta avesse inizialmente senso contrario a quello di rotazione del Sole, l'inclinazione J dell'orbita planetaria sul piano dell'equatore solare aumenterebbe fino a divenire eguale a 180° ; in altre parole, il piano dell'orbita planetaria effettuerebbe un ribaltamento in modo da cambiare così il movimento da retrogrado in diretto. Ora lo Zagar obietta che quando J è divenuto eguale a 90° , e cioè il piano dell'orbita si è disposto normalmente a quello dell'equatore solare, J dovrebbe rimanere costante. Infatti, nel caso di $J = 90^\circ$, come egli scrive testualmente « per evidenti (?) ragioni di simmetria si dovrebbe avere $\frac{dJ}{dt} = 0$ ».

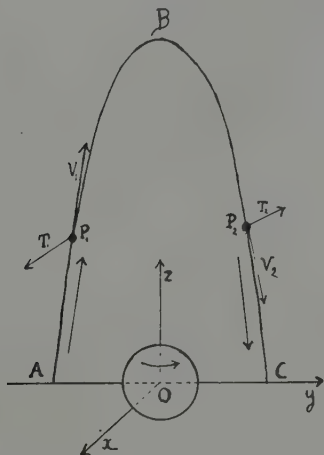
Tale difficoltà, come del resto ha ora riconosciuto lo stesso autore, è basata sopra un equivoco; ma poichè è stata pubblicata, ci è necessario di toglierla.

Sta dunque il fatto che l'invocata simmetria non solo non è evidente, ma non esiste. In altre parole, ammessa l'esistenza del termine cosmogonico, mentre vi è perfetta simmetria dinamica rispetto al piano equatoriale del Sole, tale simmetria non esiste per i piani passanti per l'asse z od asse di rotazione del Sole. Infatti se immaginiamo uno qualsiasi di questi piani, p. es. il piano $x = 0$ e due punti Q_1 e Q_2 simmetrici rispetto a detto piano, i vettori Φ_1 e Φ_2 rappresentanti le forze complementari che agiscono sul pianeta collocato in Q_1 e Q_2 , non sono l'immagine specu-

⁽¹⁾ Cfr. F. ZAGAR, *Sopra alcune ricerche recenti sopra l'origine del sistema solare* in « Mem. Soc. Astr. », vol. XII, 4.

lare l'uno dell'altro. Il contrario vale invece per due punti simmetrici rispetto al piano equatoriale, o piano $z = 0$. Ne segue che se si ha $J = 0$ ne discende $\frac{dJ}{dt} = 0$, mentre se si ha $J = 90^\circ$ non ne discende $\frac{dJ}{dt} = 0$, in perfetto accordo con le formole già date.

Ciò appare anche chiaramente dalle equazioni del moto 14) della Nota III; infatti, se si pone $z = \frac{dz}{dt} = 0$ ne segue $\frac{d^2z}{dt^2} = 0$, mentre se si pone $x = \frac{dx}{dt} = 0$ non se segue $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$. Cosa conforme ai teoremi gene-



rali di Dinamica, poichè il piano $z = 0$ è un piano di simmetria del campo vettoriale, mentre non lo è il piano $x = 0$.

Ma è bene notare che, indipendentemente anche dalle equazioni differenziali, il fatto che da $J = 90^\circ$ non segue $\frac{dJ}{dt} = 0$, può rendersi evidente con semplici considerazioni intuitive.

A tale scopo sia O il centro del Sole ed xyz una terna di assi ortogonali di direzione invariabile, scelti come precedentemente, essendo z l'asse di rotazione del Sole. Supponiamo il piano dell'orbita planetaria ortogonale al piano dell'equatore solare e coincidente p. es. col piano $x = 0$, o piano del foglio. Siano A e C i due punti in cui l'orbita planetaria taglia l'asse x e la rivoluzione abbia luogo p. es. nel senso ABC .

Poichè le forze F e Z non modificano ovviamente la posizione del piano dell'orbita planetaria, dovremo prendere in considerazione soltanto la forza T . Ora quando il pianeta si trova p. es. in P_1 la sua velocità è

diretta verso l'alto secondo V_1 , mentre la forza T_1 è normale al piano del foglio e diretta verso chi legge. Ne segue che l'estremo del vettore V_1 e quindi anche il punto B tenderà a spostarsi verso il lettore.

Supponiamo invece il pianeta giunto in P_2 . Allora la forza T_2 sempre normale al piano del foglio, è diretta in senso opposto al lettore, onde anche l'estremo del vettore velocità V_2 si sposterà in senso opposto al lettore. Ma il vettore V_2 è ora diretto verso il basso, onde il punto B tenderà ancora a spostarsi verso il lettore, come prima. In complesso il piano dell'orbita tenderà ad adagiarsi sul piano equatoriale e precisamente in modo tale che, dopo effettuato il ribaltamento, il senso del moto di rivoluzione del pianeta coincida con quello di rotazione del Sole; come appunto si dimostra analiticamente partendo dalle equazioni del moto.

Anche il fatto che per $J = 90^\circ$ risulti $\frac{dJ}{dt}$ massima e che lo Zagar dichiara incomprensibile, è invece evidente anche intuitivamente. Infatti la variazione di J è dovuta alla sola forza T e per $J = 90^\circ$ questa forza risulta normale al piano dell'orbita.

Chimica (Elettrochimica). — *Potenziali elettrochimici ed effetto Volta* — *Sul calcolo numerico dei potenziali elettrochimici normali dei metalli* ⁽¹⁾. Nota II ⁽²⁾ di OSCAR SCARPA, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. In una Nota precedente ⁽³⁾ ho fatto rilevare e ho dimostrato teoricamente come allo stato attuale delle conoscenze fisiche sia necessario correggere tutti i valori dei potenziali elettrochimici dei metalli, poichè le moderne teorie elettroniche non concedono di trascurare le differenze di potenziale che esistono ai contatti fra i metalli eterogenei (effetti Volta interni) costituenti il circuito impiegato per l'esecuzione delle misure ⁽⁴⁾.

Per effettuare il calcolo numerico di tali correzioni è necessario conoscere i valori dell'effetto Volta interno per numerose coppie di metalli. Questi valori si dovrebbero alla lor volta calcolare, secondo le moderne teorie elettroniche, dall'applicazione della statistica di FERMI, oppure dedurre dallo studio dei fenomeni di diffrazione degli elettroni e da quello degli effetti fotoelettrici ⁽⁵⁾. Disgraziatamente mancano dati numerici sufficienti e sufficientemente esatti per effettuare questi calcoli ⁽⁶⁾. Se però si impiegano (almeno allo scopo di tentativo) i dati finora pubblicati si

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel Laboratorio di Elettrochimica e di Chimica-fisica del R. Politecnico di Milano.

⁽²⁾ Presentata nell'adunanza del 18 novembre 1939—XVIII.

⁽³⁾ O. SCARPA, *Potenziali elettrochimici ed effetto Volta*. Nota I, « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », XXIX, Serie VI, 1° semestrè, e in « Nuovo Cimento », anno XVI, n. 6, giugno 1939.

⁽⁴⁾ Per maggior chiarezza ricordo che mentre la teoria chimica dell'effetto Volta, le cui conclusioni sono ancora implicitamente o esplicitamente accettate dagli elettrochimici, afferma essere nulla la differenza di potenziale ai contatti intermetallici (a meno dei decimillesimi di Volt corrispondenti agli effetti Peltier), le moderne teorie elettroniche mostrano che a queste differenze di potenziale (cioè a quelle che si possono chiamare: *effetti Volta interni*) si debbono attribuire valori notevolissimi, non certo trascurabili rispetto ai valori delle f. e. m. delle pile elettrochimiche.

⁽⁵⁾ Vedere ad esempio nella Nota di PERUCCA e WATAGHIN, *Localizzazione dell'effetto Volta* ecc. in « Nuovo Cimento », anno VII, n. 9, novembre 1930.

⁽⁶⁾ Debbo ringraziare il prof. E. PERUCCA per avermi comunicato i dati che egli possiede circa i valori dei potenziali interni. Disgraziatamente questi valori, pur al dire del prof. PERUCCA, sono incerti di un Volt e più, anche nelle determi-

trova che le correzioni che è necessario apportare ai valori dei potenziali elettrochimici normali, riportati nelle tabelle e nei trattati, sono, per i pochi casi calcolabili, persino maggiori (e in generale molto maggiori) di quelle che ho esposte nella Nota precedente.

Poichè tali dati sono estremamente incerti, per effettuare calcoli che possano servire almeno come orientamento è necessario impiegare altri dati, cioè quelli che secondo le ipotesi esplicitamente o implicitamente accettate da parecchi fisici moderni assegnano almeno l'ordine di grandezza dei potenziali di contatto intermetallici.

Questi fisici, e fra questi i fisici Americani che hanno redatto le *Critical Tables*, ammettono, senz'altro, l'eguaglianza fra i valori degli effetti Volta interni (dei *Potenziali di contatto*) e di quelli esterni ottenuti con il metodo del condensatore variabile oppure dedotti dalle esperienze fotoelettriche.

Non credo che tale conclusione si possa ritenere rigorosa ma ritengo che, allo stato attuale delle conoscenze scientifiche, possa almeno servire per calcoli di orientamento.

Nella mia Nota precedente, volendo calcolare l'ordine di grandezza delle correzioni che si debbono portare ai valori dei potenziali elettrochimici finora ritenuti validi, ho dovuto fondare i calcoli accettando la sopracennata ipotesi, e non avendo ancora a disposizione un numero sufficiente di dati fotoelettrici e termoelettrici, ho dovuto impiegare i dati pubblicati nelle «Critical Tables» ed ivi indicati: *Potenziali di contatto* benchè corrispondano in realtà agli effetti Volta esterni (misurati con i metodi di Lord KELVIN, di MATORANA ecc.).

Nel seguito, avendo avuto l'originale di una Nota di BUTLER⁽¹⁾ ho potuto ricavare da questa una tabella abbastanza completa dei valori degli effetti Volta dedotti mediante i lavori di estrazione degli elettroni dai metalli, ricavati da pubblicazioni di Langmuir e di Hughes. (Vedi Tabella I). Aggiungo che anche il Butler assume questi valori come misura degli effetti Volta interni.

Dico subito che l'esame di tali valori conferma la attendibilità di quelli da me impiegati nella precedente pubblicazione. Aggiungo che le differenze fra i valori da me impiegati e quelli riportati nella tabella di BUTLER sono alla lor volta dello stesso ordine di grandezza di quelle che si notano fra i valori degli effetti Volta ricavati dai migliori sperimentatori con il metodo del condensatore variabile.

nazioni più recenti. Una discussione relativa alla impossibilità di impiegare questi valori per effettuare calcoli che abbiano un reale significato fisico ai fini del presente studio, sarà da me esposta nella Nota in cui (secondo il programma prefissomi) esporrò le conclusioni generali del presente studio.

⁽¹⁾ *On the seat of the electromotive Force in the Galvanic Cell*, «Philosophical Magazine», vol. 48, 1924.

TABELLA I.

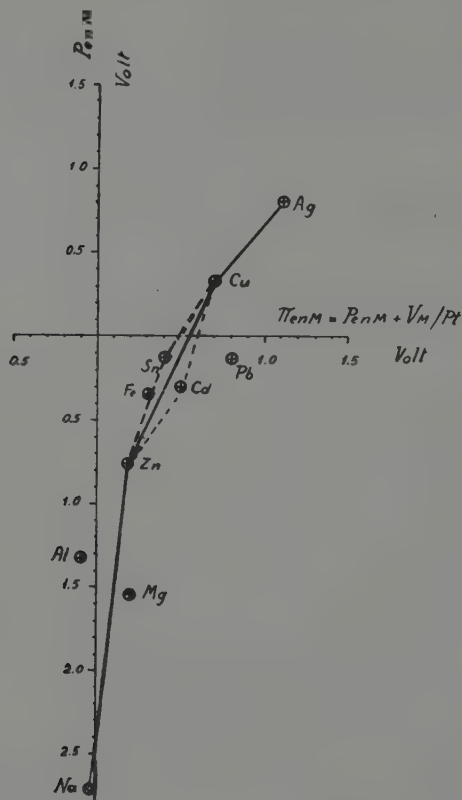
Coppia metallica	Effetti Volta dedotti dalla Tabella di Butler (in base a dati di Lang- muir e di Hughes)	Potenziali di contatto da me impiegati per i calcoli dei potenziali elettrochimici veri (<i>Cri- tical Tables</i>)
K/Pt	2.95	2.84
Na/Pt	2.6	2.39
Li/Pt	2.1	—
Ca/Pt	1.8	—
Mg/Pt	1.7	1.04
Al/Pt	1.4	1.01
Zn/Pt	1.0	0.95
Fe/Pt	0.7	0.38
Cd/Pt	0.9	0.91
Ni/Pt	—	0.43
Sn/Pt	0.6	0.66
Pb/Pt	1.0	0.74
Sb/Pt	—	0.49
Bi/Pt	—	0.41
Cu/Pt	0.4	0.19
Ag/Pt	0.3	0.04
Hg/Pt	—	— (*)
Au/Pt	—	0.07

(*) Come ho fatto più volte notare il valore 1.13 Volt per l'effetto Volta fra mercurio e platino è certamente errato. Ricerche ulteriori mi hanno mostrato che il valore più probabile dovrebbe essere più vicino a 0.2 che a 0.3 Volt.

2. Sommando ai valori dei potenziali elettrochimici normali relativi all'elettrodo normale a idrogeno, quali sono riportati nei trattati (e da me indicati con P_{enM}), i valori dei potenziali delle coppie M/Pt assegnati dalla tabella di BUTLER, si ottengono nuovi valori delle quantità da me indicate con Π_{enM} . Con questi ho disegnato il presente diagramma.

Da esso adottando il metodo di calcolo indicato nella Nota precedente, risulta che all'effetto Volta fra il platino idrogenato (in equilibrio con l'idrogeno gassoso alla pressione atmosferica e alla temperatura di

18° C) e il platino puro si deve attribuire un valore compreso fra $\pm 0,5$ e $\pm 0,6$ Volt (platino idrogenato elettropositivo) mentre il calcolo effet-



tuato con i dati di cui mi sono servito nella Nota precedente mi ha condotto al valore medio 0,52 Volt ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Ricordo che tanto in questo diagramma quanto in quello riportato nella Nota precedente, l'ascissa corrispondente a $P_{enM} = 0$ misura, per le ragioni che ho specificato nella Nota precedente, l'ordine di grandezza del potenziale Voltiano fra il platino idrogenato (nelle condizioni sopradette) e il platino puro. Infatti all'ordinata $P_{enM} = 0$ (cioè a quella che per la nota convenzione misura il valore fittizio dell'elettrodo normale a idrogeno) corrisponde l'ascissa di valore $\pi_{enM} = P_{enM} + V_H/Pt$ poichè il metallo M è in tal caso individuato dall'idrogeno

TABELLA II.

Metallo	Potenziali elettrochimici <i>reali</i>		Potenziale elettrochimico indicato nei trattati (C)	$A - C$	$B - C$
	Dal calcolo attuale (A)	Dal calcolo precedente (B)			
K	— 0.5 Volt	— 0.6 Volt	— 2.92 Volt	+ 2.4 Volt	+ 2.3 Volt
Na	— 0.5 »	— 0.8 »	— 2.71 »	+ 2.2 »	+ 1.9 »
Mg	— 0.3 »	— 1.0 »	— 1.55 »	+ 1.3 »	+ 0.5 »
Al	— 0.6 »	— 0.8 »	— 1.33 »	+ 0.7 »	+ 0.5 »
Zn	— 0.3 »	— 0.3 »	— 0.76 »	+ 0.4 »	+ 0.4 »
Fe	— 0.2 »	— 0.5 »	— 0.44 »	+ 0.2 »	— 0.1 »
Cd	— 0.02 »	— 0.01 »	— 0.40 »	+ 0.3 »	+ 0.4 »
Ni	—	— 0.3 »	— 0.23 »	—	— 0.1 »
Sn	— 0.1 »	+ 0.01 »	— 0.13 »	+ 0.01 »	+ 0.1 »
Pb	+ 0.3 »	+ 0.1 »	— 0.12 »	+ 0.4 »	+ 0.2 »
Sb	—	+ 0.07 »	+ 0.10 »	—	— 0.03 »
Bi	—	+ 0.1 »	+ 0.22 »	—	— 0.1 »
Cu	+ 0.2 »	+ 0.01 »	+ 0.34 »	— 0.1 »	— 0.3 »
Ag	+ 0.6 »	+ 0.3 »	+ 0.80 »	— 0.2 »	— 0.5 »
Hg ⁽¹⁾	—	+ 0.6 » + 0.5 »	+ 0.80 »	—	— 0.3 »
Au	—	+ 0.9 »	+ 1.36 »	—	— 0.4 »

(¹) Per quanto ho detto nella nota a pag. al valore 1.13 Volt per l'effetto Voltiano fra Pt e Hg ho qui sostituito non solo il valore 0.31 Volt (EXNER) ma anche quello più probabile: 0.2 Volt. Per quanto riguarda le anomalie presentate dal Piombo rimando a quanto ho detto nella Nota precedente.

4. È interessante eseguire il confronto fra i valori dei potenziali elettrochimici normali *reali* (¹) (relativi al potenziale *reale* dell'elettrodo

contenuto nel platino idrogenato; e siccome per convenzione $P_{\text{cH}} = 0$, si ha: $\Pi_{\text{enM}} = V_{\text{H/Pt}}$ ossia: $\Pi_{\text{enM}} = V_{\text{Pt idrogenato/Pt puro}}$.

Ricordo infine che allo stesso valore numerico del potenziale Voltiano fra il platino idrogenato e il platino puro, si giunge discutendo il diagramma che ha per ascisse i valori degli effetti Volta dei diversi metalli contro il platino puro, e per ordinate i valori dei potenziali elettrochimici indicati nei trattati.

(¹) Cioè depurati dell'effetto Volta esistente al contatto intermetallico M/Pt, e corretti per l'effetto Volta esistente fra il platino idrogenato e il platino

n. a idrogeno) calcolati come nella Nota precedente e quelli ricalcolati in base alla tabella di Butler. Di tutti espongo soltanto la prima cifra significativa poichè si debbono intendere come *ordini di grandezza* (Vedi tabella II).

Nella tabella riporto anche i valori dei potenziali elettrochimici ritenuti finora validi.

CONCLUDENDO.

1° Risulta confermato quanto ho esposto nella precedente Nota e cioè che le correzioni che si debbono apportare ai correnti valori dei potenziali elettrochimici sono fortissime per i metalli alcalini e generalmente grandi per gli altri. In nessun caso possono essere ritenute trascurabili.

2° Ne segue che per la retta conoscenza di numerosi fenomeni elettrochimici è indispensabile tener conto dei valori dei potenziali di contatto intermetallici (Penziali Voltiani).

3° Per calcolare con sufficiente esattezza i valori dei potenziali elettrochimici sarà necessario conoscere i valori dei potenziali di contatto fra i metalli eterogenei che costituiscono i circuiti, con una precisione molto maggiore di quella oggi raggiunta. Nella Nota successiva mostrerò come si può arrivare a questo risultato.

4° Sebbene per il calcolo della f. e. m. delle pile, intese come differenze di potenziale fra i reofori (p. es. di rame) saldati ai due elettrodi, è sufficiente la conoscenza dei valori dei potenziali elettrochimici finora noti (in quanto essi includono il contributo portato dagli effetti Volta ai contatti fra i reofori e i due elettrodi), tale conoscenza non è sufficiente (ove si accettino le moderne teorie elettroniche) per il calcolo dei potenziali elettrochimici assoluti, delle tensioni di soluzione dei metalli, dei calori di ionizzazione ecc.

* * *

Da quanto sopra risulta che si debbono considerare tre serie di valori dei potenziali elettrochimici e cioè:

a) *I valori dei potenziali elettrochimici finora noti.* — Questi sono sufficienti per il calcolo delle forze elettromotrici delle pile, per gli studi relativi alla separazione per elettrolisi dei diversi cationi ecc. Per questi scopi non è necessario apportare (vedi nella Nota precedente) alcuna

puro nell'elettrodo normale a idrogeno, rispetto al quale sono riferiti i valori convenzionali di tutti i potenziali elettrochimici.

correzione per gli effetti Volta nel circuito metallico, e ciò per la legge del contatto intermedio (2^a legge di Volta) (1).

Per ben contraddistinguere questi valori ho proposto di chiamarli: *Potenziali elettrochimici relativi* APPARENTI («*apparenti*» poichè sono quelli che risultano dall'esperienza diretta, non tenendo conto degli effetti Voltiani ai contatti intermetallici).

b) *I valori dei potenziali elettrochimici dedotti dai primi tenendo conto degli effetti Voltiani* (anche di quelli esistenti nel circuito metallico dell'elettrodo a idrogeno).

Ho proposto di chiamar questi: *Potenziali elettrochimici relativi* REALI. La loro conoscenza è necessaria per molti studi teorici.

c) *I potenziali elettrochimici* ASSOLUTI. — Questi si possono dedurre soltanto se si conoscono quelli: RELATIVI REALI.

Sono note le difficoltà inerenti alla esatta conoscenza dei valori veri dei potenziali elettrochimici assoluti. Dovendo tener conto degli effetti Voltiani, queste difficoltà divengono ancora più gravi.

Dei valori di questi potenziali assoluti e di quelli delle tensioni di soluzione, nonchè dei veri calori di ionizzazione, tratterò in Note successive.

(1) Soltanto nel caso di contatto fra metalli, in condizioni per cui sono possibili fenomeni di diffusione intermetallica, si dovrebbe, almeno teoricamente, tener conto delle f. e. m. di cui ho mostrato l'esistenza nei miei studi sulle *pile metalliche isoeimiche* (vedere in particolare la monografia pubblicata da HERMANN, Parigi 1933).

NOTE PRESENTATE DA ACCADEMICI
E DA AGGREGATI ALLA R. ACCADEMIA D'ITALIA

Astronomia (Astrofisica). — Lunghezze d'onda nello spettro della cromosfera nell'eclisse di Sole del 19 giugno 1936 ⁽¹⁾.
Nota di MARIO GIROLAMO FRACASTORO, presentata ⁽²⁾ da
GIORGIO ABETTI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

§ 1. — *Descrizione dello strumento.*

In occasione dell'eclisse totale di Sole del 19 giugno 1936 è stato fotografato dalla Missione italiana lo spettro della cromosfera da 5550 a 6670 Å, con una dispersione quasi costante di 5,1 Å/mm. Lo strumento adoperato, uno spettrografo montato in autocollimazione, cui il celostato e l'obiettivo Amici I fornivano sulla fenditura un'immagine solare avente 48,5 mm di diametro, è stato descritto dettagliatamente dal prof. G. GIOTTI nella relazione della Missione Astronomica Italiana ⁽³⁾.

§ 2. — *Condizioni di osservazione.*

La stazione della Missione italiana a Sara si trovava soltanto 8 km al sud della linea centrale della zona di totalità; poichè inoltre lo spettrografo adoperato era munito di fenditura che limitava l'osservazione soltanto alla regione centrale dell'arco cromosferico, non è stato necessario tener conto di questa circostanza nelle considerazioni che seguono. Con tale strumento furono presi da RIGHINI i seguenti spettrogrammi in prossimità del secondo e del terzo contatto.

Sulla lastra n. 2 sono stati fotografati a brevi intervalli l'uno dall'altro diversi spettri, tutti in prossimità del secondo contatto. In ognuno di essi si possono vedere, oltre alle righe di assorbimento, quelle di emissione,

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel R. Osservatorio Astrofisico di Arcetri-Firenze.

⁽²⁾ Nell'adunanza del 18 novembre 1939-XVIII.

⁽³⁾ G. GIOTTI, « Memorie della classe di scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia d'Italia », vol. IX, pag. 155.

sempre più numerose e più definite, man mano che la luna andava coprendo gli ultimi strati del disco solare. Infatti, nelle registrazioni dello spettro della cromosfera eseguite con la lastra mobile ⁽¹⁾, si vede appunto che l'inversione dello spettro solare comincia anticipatamente e finisce più tardi per le righe di più alto livello, mentre il fenomeno ha durata brevissima per le righe di media e debole intensità dello spettro solare. Perciò si è scelto fra i vari spettrogrammi quello contrassegnato nella Tabella I coi numeri 2-3, riprodotto quasi per intero in negativo nella relazione già citata. Esso mostra tutte le righe solari in emissione, fatta eccezione per una riga a λ 6455,573 identificabile forse con la 6455,613 del Ca I; oltre naturalmente alle righe di origine atmosferica.

TABELLA I.

Lastra	Spettro n.	Lembo	Inizio	Fine	Posa
2	3	E	« via »	3 ^s	3 ^s
	2	E	10	16	6
	1	W	63	110	47
3	3	W	113	117	4
	2	W	121	124	3
	1	W	126	128	2

La fenditura fu tenuta piuttosto larga, e cioè mm 0,20.

La lastra adoperata, una pancromatica di tipo « extra-rapido », lungo la regione fotografata mostra una densità abbastanza uniforme dalle più brevi lunghezze d'onda fino a circa 6150 Å; più verso il rosso — salvo un tratto stazionario fra 6340 e 6400 Å — ha inizio un notevole decremento nella sensibilità, la quale resta apprezzabile fino a poche decine di Angstrom oltre la H_α.

§ 3. — Misura delle lunghezze d'onda.

Come si vede nelle riproduzioni di cui si è fatto cenno sopra, le due parti più intense dello spettro prescelto sono separate da tre strisce più sottili, dovute ad altrettanti avvallamenti nella superficie lunare. Le righe

⁽¹⁾ D. H. MENZEL, *A study of the solar chromosphere*. Lick Obs. Publ., XVII, 1931.

di emissione appaiono notevolmente rinforzate in corrispondenza di queste strisce, per cui le puntate sono state fatte sulla più intensa di queste, e con essa si è serbato l'allineamento anche quando, nell'estremità rossa dello spettro, essa era ormai scarsamente visibile. Agli effetti della misurazione delle lunghezze d'onda questo accorgimento è stato necessario poichè, non ostante la presenza della fenditura, le righe hanno una forma leggermente arcuata.

Le misure sono state eseguite allo spettrocomparatore Mioni ⁽¹⁾, munito di una vite micrometrica di mm 0,5 di passo, con tamburo diviso in 500 parti, delle quali ognuna viene a corrispondere ad 1μ sulla lastra. Esse sono state ripetute due volte per ogni senso, alternatamente, e questo per avere la massima indipendenza da eventuali errori sistematici, per quanto la vite dello strumento sia esente da passo morto; per ogni riga sono state fatte almeno 4 misure. Come criterio generale, la media fra i valori ottenuti in un senso e quelli ottenuti nell'altro si è fatta soltanto quando essi differivano tutt'al più di 4μ ; in caso contrario si sono eseguite nuove puntate, in modo da limitare il più possibile gli errori di misura. In linea di massima però, e cioè se si eccettuano le righe troppo deboli, l'accordo fra le diverse misure è risultato soddisfacente.

Complessivamente la grana della lastra è apparsa piuttosto grossa, e di conseguenza l'esattezza delle misure non ha potuto superare, specialmente nel caso di righe deboli, un determinato limite di precisione. Inoltre la definizione delle immagini monocromatiche del bordo solare e il loro contrasto rispetto al fondo costituito dallo spettro continuo non si mantengono costanti lungo le diverse lunghezze d'onda fotografate; a questo fatto concorrono, da una parte la curvatura del campo e l'aberrazione cromatica dello strumento, dall'altra le variazioni di sensibilità dell'emulsione. Questi due fattori fanno sì che l'*optimum* si può stabilire attorno a 5750 \AA , dove, in linea di massima, è stato possibile misurare con sufficiente esattezza anche le righe di emissione di intensità — 1 nella scala di ROWLAND. In questa regione specialmente si è potuta constatare la presenza di righe cromosferiche non catalogate precedentemente.

A conferma delle considerazioni di cui sopra si è riportato nella figura 1 il numero n delle righe in emissione misurate di 50 in 50 Angstrom lungo lo spettro; la spezzata ottenuta riproduce molto da vicino la curva di annerimento della lastra e può servire a dare un'idea delle condizioni di visibilità delle righe col procedere della lunghezza d'onda nello spettro considerato.

⁽¹⁾ G. RIGHINI, *Lo spettrocomparatore Mioni del R. Osservatorio di Arcetri*. Osserv. e Mem. del R. Oss. di Arcetri, 47, pag. 31, 1930 e Mem. Soc. Astr. It., 5, p. 111, 1930.

Paragonando i numeri n con quelli ricavati dalla lista data da MITCHELL ⁽¹⁾ e facendo il rapporto fra le cifre corrispondenti nel senso MITCHELL/Arctetri, si ha la spezzata M/A , anch'essa riportata nella fig. 1, che sembra confermare un aumento effettivo delle righe visibili in corrispondenza delle regioni spettrali di massima sensibilità della lastra. In totale, fra 5550 e 6600 Å, si sono osservate e misurate 330 righe di emissione, delle quali 57 non catalogate precedentemente.

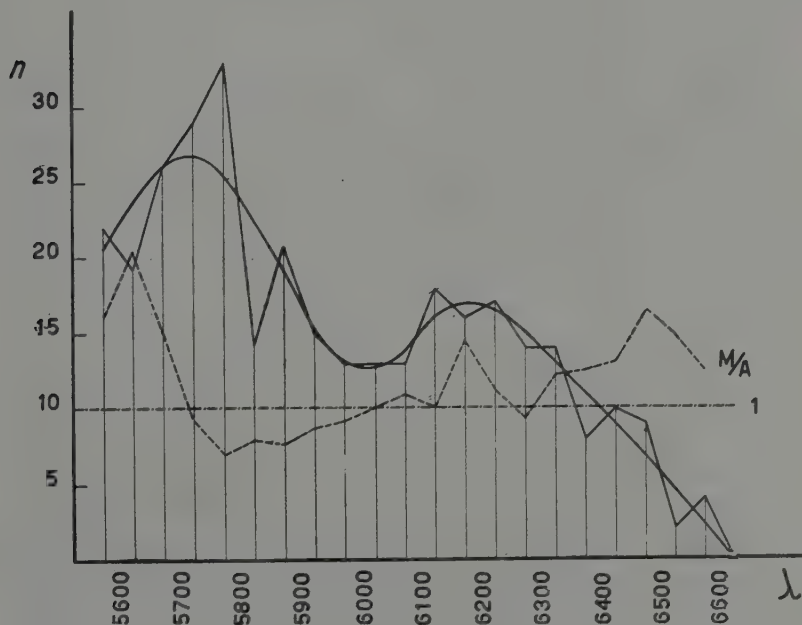


Fig. 1.

Non è privo d'interesse, dal punto di vista della misurazione delle lunghezze d'onda, il fatto che le righe assumano, compatibilmente con la presenza della fenditura, una forma sensibilmente arcuata, maggiormente apprezzabile per le righe più intense. Poiché un'eventuale variazione nella forma dell'arco avrebbe potuto avere un'influenza sulla posizione della riga nel punto considerato nel corso delle misure, si sono esaminate alcune righe di intensità e natura diverse, in sei punti dell'arco cromatico di cui sono formate. Tuttavia i risultati - riassunti nella Tabella II

⁽¹⁾ S. A. MITCHELL, *The spectrum of the chromosphere*. Ap. J, 38, 407 e Ap. J, 71, 1.

— non sembrano indicare qualche correlazione ben definita, nè le differenze di forma fra gli elementi considerati, per quanto leggermente superiori agli errori di misura, si prestano ad una sicura interpretazione in relazione all'intensità o alla natura delle righe stesse.

TABELLA II.

λ , elem., intens.	a	b	c	d	e	f
5853,69 Ba +, 5	172.228	+ .016	+ .035	+ .050	+ .071	+ .003
5889,98 Na, 25	165.138	+ .008	+ .022	+ .048	+ .054	— .010
5895,94 Na, 20	163.973	+ .014	+ .021	+ .044	+ .060	— .004
5900,01 ass, 2, 4	163.170	+ .018	+ .029	+ .049	+ .064	+ .003
5991,38 —, 5	145.276	+ .016	+ .024	+ .030	+ .051	— .013
6141,73 Ba +—Fe, 12	115.848	+ .008	+ .018	+ .027	+ .035	— .019
Medie . . .		+ .013	+ .025	+ .041	+ .056	— .007

La lunghezza d'onda delle righe, la loro intensità e l'elemento di appartenenza sono riportati nella prima colonna; mentre nella seconda si danno le letture allo spettrocomparatore riferite al centro dell'arco cromosferico (a), e nelle successive colonne le differenze relative agli altri punti misurati (b , c , d , e , progressivamente e ad uguali intervalli verso il basso; f , in alto, a distanza da a pari ad e).

§ 4. — Determinazione delle lunghezze d'onda.

Si sono scelte come righe di riferimento righe *semplici* di medio livello, con l'intensità corrispondente alle migliori condizioni di misurabilità, avendo cura, ove è stato possibile, che l'altezza sulla fotosfera di ciascuna delle tre righe adoperate nel calcolo per ogni gruppo fosse eguale o almeno dello stesso ordine di grandezza. Tuttavia nelle due zone spettrali più spinte verso il rosso, dove tali righe non erano tanto frequenti come sarebbe stato desiderabile agli effetti della determinazione delle lunghezze

d'onda, si è dovuto ricorrere ad una riga notevolmente più intensa delle due altre, non essendo stato possibile trovarne di più confacenti.

Le righe fondamentali sono state misurate con particolare esattezza, eseguendo almeno dieci misure in un senso e dieci nell'altro. Esse sono riportate nella seguente Tabella:

TABELLA III.

Riga	Int.	λ	ε_s	ε_d	Riga	Int.	λ	ε_s	ε_d
<i>a</i> 1	2 d	5554.902	1,6	1,5	<i>g</i> 1	1	5983.693	1,1	1,4
<i>a</i> 2	2	5588.766	2,7	2,3	<i>g</i> 2	1-2	6024.073	0,8	1,1
<i>a</i> 3	1	5638.274	3,7	0,0	<i>g</i> 3	1-2 d	6084.118	0,9	0,8
<i>b</i> 1	0-1	5633.956	1,1	1,2	<i>h</i> 1	2	6056.018	0,8	1,3
<i>b</i> 2	0-1	5675.437	1,4	0,5	<i>h</i> 2	1-2 d	6108.130	1,5	1,7
<i>b</i> 3	0-1	5717.844	1,0	0,6	<i>h</i> 3	1-2	6149.255	1,1	0,7
<i>c</i> 1	0-1	5703.590	1,1	1,5	<i>i</i> 1	1	6137.709	0,6	0,8
<i>c</i> 2	0-1	5752.043	0,8	1,2	<i>i</i> 2	0-1	6200.327	0,8	1,4
<i>c</i> 3	0	5783.870	0,9	1,4	<i>i</i> 3	1 d	6256.374	1,0	1,2
<i>d</i> 1	0-1	5762.426	1,0	1,2	<i>l</i> 1	2	6252.572	0,5	0,7
<i>d</i> 2	1 d	5806.736	1,4	2,5	<i>l</i> 2	2	6301.517	0,7	0,7
<i>d</i> 3	0-1	5852.232	0,7	0,7	<i>l</i> 3	1	6336.837	1,2	1,2
<i>e</i> 1	1-2 d	5816.384	0,9	1,1	<i>m</i> 1	1-2	6335.345	1,3	0,8
<i>e</i> 2	1-2	5866.464	0,9	1,0	<i>m</i> 2	3	6393.620	0,8	1,0
<i>e</i> 3	1 d	5916.262	0,9	0,9	<i>m</i> 3	2	6439.090	0,6	1,0
<i>f</i> 1	1	5905.684	0,8	0,8	<i>n</i> 1	1	6419.964	0,9	0,8
<i>f</i> 2	0-1	5948.552	1,2	0,8	<i>n</i> 2	1	6481.886	—	—
<i>f</i> 3	0-1	5997.743	0,7	0,9	<i>n</i> 3	6	6516.094	0,9	0,5
					<i>o</i> 1	1	6481.886	—	—
					<i>o</i> 2	6	6516.094	0,9	0,5
					<i>o</i> 3	1	6572.804	—	—

La somma degli errori medi ε_s e ε_d (espressi in μ), in un senso e nell'altro, dà all'incirca valori uguali (39,2 e 37,6).

Il calcolo è stato fatto in base alle formule ben note:

$$B = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{(s_2 - s_1)(s_2 - s_3)} - \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{(s_3 - s_1)(s_2 - s_3)}$$

$$A = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{s_2 - s_1} - B(s_2 - s_1) = \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{s_3 - s_1} - B(s_3 - s_1)$$

che si ricavano immediatamente assumendo valide le relazioni

$$\lambda_2 - \lambda_1 = A(s_2 - s_1) + B(s_2 - s_1)^2$$

$$\lambda_3 - \lambda_1 = A(s_3 - s_1) + B(s_3 - s_1)^2$$

la cui approssimazione si è dimostrata soddisfacente.

Per A si sono trovate, gruppo per gruppo, quantità poco oscillanti attorno al valore medio -5.105338 ; il coefficiente quadratico B si è mantenuto in valore assoluto dell'ordine di 10^{-4} Å/mm^2 , in altre parole lo spettro ottenuto è assai prossimo ad essere normale e si è potuto così trascurare di introdurre nei calcoli un coefficiente del terzo ordine.

Per l'identificazione delle righe servirono le tabelle date da S. A. MITCHELL ⁽¹⁾, oltre naturalmente alla *Rowland's Revision* ed alle Tavole di C. E. MOORE ⁽²⁾.

I risultati sono riassunti nella Tabella IV, ove si danno le lunghezze d'onda e le intensità osservate, i valori corrispondenti nella *Rowland's Revision*, e infine l'elemento cui appartiene la riga; le intensità cromosferiche sono ricavate attraverso una stima accurata, ma empirica, assumendo uguale a zero l'intensità delle righe più deboli, al limite di buona visibilità e di sicura misurazione. Con questa scala i valori numerici risultano generalmente minori di quelli della *Rowland's Revision*. Alcune righe che avevano un aspetto diffuso, in gran parte costituite da due o più componenti, sono state contraddistinte con la lettera d . Per le righe in assorbimento di origine atmosferica non si danno le intensità nè gli elementi di appartenenza.

⁽¹⁾ S. A. MITCHELL, loc. cit.

⁽²⁾ C. E. MOORE, *A multiplet Table of astrophysical interest*. Princeton, 1933.

TABELLA IV.

N.	λ_{oss}	λ_{RR}	i_{oss}	i_{RR}	El.
1	5553.619	.632	0—1	1,0	Fe—Ni
2	5554.902	.902	2 d	3	Fe
3	5557.943	.958	00	0,0	Fe—
4	5560.116	.222	00	2	Fe
5	5562.621	.718	00	2	Fe
6	5563.643	.627	0—1	3,0	Fe—Co
7	5565.713	.715	2 d	3	Fe
8	5567.410	.402	0—1 d	2	Fe
9	5569.634	.633	2	6	Fe
10	5572.890	.890	2—3 d	6,1	Fe—Fe
11	5576.126	.101	1—2	4	Fe
12	5578.727	.731	0	1	Ni
13	5584.993	.07	1 d	0, — 2, — 2	V—Fe—
14	5586.762	.773	2—3	7	Fe
15	5587.779	.774	0—1	1,0	Fe—Ni
16	5588.766	.766	2	6	Ca
17	5590.064	.128	0	3	Ca
18	5590.846	.823	0	— 1	Co
19	5592.277	.268	1—2	1	Ni
20	5593.714	.748	0 ::	0	Ni
21	5594.527	.512	2	4,1	Ca—Fe
22	5598.422	.456	2 d	4,1	Ca—Fe
23	5600.093	.167	00	— 1,0	Fe—
24	5601.279	.288	0 d	3	Ca—Ce ⁺
25	5602.910	.910	1—2	4, 3, 1	Fe—Ca
26	5603.773	.779	00	— 1	C ₂
27	5610.193	.253	0 d	— 2, — 2	Ce ⁺ —C
28	5615.632	.574	4	6,2	Fe—Fe
29	5618.627	.645	0	1	Fe
30	5619.527	.611	00 ::	0	Fe
31	5620.441	.500	0	0	Fe

segue TABELLA IV.

N.	λ_{OSS}	λ_{RR}	i_{OSS}	i_{RR}	El.
32	5622.961	.966	0 d	— 1	Ce ⁺ —C ₂
33	5624.499	.559	1 d	4	Fe
34	5625.496	.486	0 d	— 1, — 2, 0	Ni—(C)—
35	5627.474	.510	00	— 2	—
36	5633.974	.956	0—1	3	Fe
37	5637.228	.272	0—1 d	1,1	Fe—Ni
38	5638.271	.274	1	3	Fe
39	5640.944	.992	1	1+	Sc ⁺
40	5644.096	.114	0—1 d	— 1,0	Ti—
41	5649.842	.894	00 ::	0,1	Fe—Ni
42	5650.603	.697	00	1	Fe
43	5655.469	.502	1 d	2	Fe
44	5657.830	.883	3	2+	Sc ⁺
45	5658.719	.740	1	4, 1, 0	Fe—Cr—Fe
46	5659.659	.605	0—00	0	—
47	5660.720	.745	00	0,0	Fe—
48	5661.507	.408	00	0, — 3	Fe—
49	5662.875	.942	3 d	1	Y ⁺ —Ti—Fe
50	5663.958	.012	0—1	1	Ni—Cr
51	5667.186	.157	1—2 d	0+	Sc ⁺
52	5667.533	.526	0	2	Fe
53	5668.978	.043	1	1+	Sc ⁺
54	5669.805	.850	00	0,0	Ni—
55	5670.852	.859	0	0	V
56	5671.755	.723	0 d	— 1', 0	Sc—
57	5675.437	.437	0—1	2	Ti
58	5678.995	.034	1	3	Fe
59	5682.125	.211	0 d	2	Ni
60	5684.173	.201	2	1+	Sc ⁺
61	5686.495	.478	1 d	3,0	Fe—Fe
62	5688.292	.220	0 d	6	Na
63	5689.390	.480	00	0	Ti
64	5691.502	.508	0	2	Fe—Ni

segue TABELLA IV.

N.	λ_{OSS}	λ_{RR}	i_{OSS}	i_{RR}	El.
65	5693.600	.653	0	3	Fe
66	5694.947	.932	1	0,2	Ni—Cr
67	5698.400	.438	2 d	1,1	Cr—Fe—V
68	5700.193	.243	0—1 d	—1, —1	Sc—Ni
69	5701.561	.559	1	4	Fe
70	5702.403	.331	0—00	0	Cr
71	5703.567	.590	0—1	1	V
72	5704.664	.748	00	0	Fe
73	5705.415	.476	0—00	1	Fe
74	5705.996	.011	1	3	Fe
75	5707.002	.032	0	0,1	Fe—Cr+ ?
76	5708.274	.332	0	1,3	Fe—Si
77	5709.457	.473	1—2	5,5	Fe—Ni
78	5711.019	.098	0	6	Mg
79	5711.886	.887	1 d	3	Fe—Ni
80	5712.698	.782	00	0	Cr
81	5715.041	.097	1	5	Ni—Fe
82	5716.327	.400	0	—1, —3	V ?—Ti
83	5717.868	.844	0—1	4	Fe
84	5727.002	.060	0—1	2	V—Ti
85	5727.553	.597	00	—1, —2	—, V
86	5728.876	.884	00	—1+	Y+
87	5731.239	.275	0	—1, —1	— V
88	5731.782	.775	0—1	4	Fe
89	5737.012	.077	0 d	0	V
90	5738.177	.242	0 d	0	—, Mn
91	5739.940	.988	00	0	Ti
92	5740.875	.980	00	—2, —3	Ti ?—Ca ?
93	5741.840	.858	00	2	Fe
94	5743.214	.145	00 d	0, —1	—, —
95	5747.619	.672	0	1	—
96	5748.394	.364	0	2	Ni
97	5752.043	.043	0—1	4	Fe

segue TABELLA IV.

N.	λ_{OSS}	λ_{RR}	i_{OSS}	i_{RR}	El.
98	5753.090	.135	1	5	Fe
99	5753.668	.649	0—00	1	Cr
100	5754.624	.630	1—2	0,5	Fe—Ni
101	5755.376	—	0	...	—
102	5756.040	.200	00	— 3	—
103	5756.781	.831	0	2	Fe ?
104	5760.272	.362	0 d	1	Fe
105	5760.844	.843	0	2	Ni
106	5762.409	.426	0—1	1	Fe
107	5762.982	.985	3	0,6	Fe—Fe
108	5766.187	.337	0 d	0	Ti
109	5769.019	.084	00 d	— 2+	La+
110	5772.178	.152	0	3	Si
111	5774.002	.039	00	0	Ti
112	5775.032	.091	0	4	Fe
113	5778.406	.466	0	1	Fe
114	5780.676	.612	0—1 d	2	Fe—Ti
115	5782.063	.142	2—3	3,3	Fe—Cu
116	5783.029	.077	00	2	Cr
117	5783.888	.870	0	3	Cr
118	5785.090	.165	0—1 d	2,3	Fe—Cr
119	5785.810	.787	0—1 d	0,1	Cr—Ti
120	5786.940	.024	00	— 1	Cr
121	5787.919	.930	1	4	Cr
122	5789.591	.639	00	— 3	Fe ?
123	5790.282	—	00—0	...	—
124	5790.992	.993	1 d	4,3	Cr—Fe
125	5792.010	.955	0—00	— 2	Cr ? —
126	5793.053	.083	0—00	3	Si
127	5793.948	.926	00	2	Fe
128	5797.475	.577	0 d	— 2, — 2+	Cr—La+
129	5798.023	.050	0	4,3	Fe—Si
130	5804.164	.206	2 d	0, 0, 1	Fe—Ti—

segue TABELLA IV.

N.	λ_{oss}	λ_{RR}	i_{oss}	i_{RR}	El.
131	5805.140	.228	0	4	Ni
132	5805.728	.774	0	0+	La+
133	5806.736	.736	1	5	Fe
134	5807.917	.870	00	— 1, 0	Fe—Fe
135	5809.268	.228	0	4	Fe
136	5811.517	.611	0—00	— 2+	Nd+ ?
137	5811.982	.927	0—00	0	Fe
138	5813.853	.99	0	0, — 1	Ti—Ti
139	5816.351	.384	1—2 d	5	Fe
140	5819.995	.933	00 d	— 1	—
141	5831.572	.610	00	1	Ni
142	5847.020	.010	0—1	1	Ni
143	5848.079	.126	00	3	Fe
144	5852.238	.232	0—1	3	Fe
145	5853.675	.691	4	5+	Ba+
146	5855.122	.090	0—00	1	Fe
147	5856.088	.100	0	2	Fe
148	5857.585	.544	2 d	3, 8	Ca—Ni
149	5859.592	.600	1	5	Fe
150	5862.397	.371	1—2 d	6	Fe
151	5866.464	.464	1—2	3	Ti
152	5875.427	.62	50	...	He
153	5880.211	.118	0 d	— 1, 0	Fe ?—Ti—
154	5881.360	.288	00	0	Fe
155	5883.871	.816	00	4	Fe
156	5884.765	.858	00 ::	— 2, — 1	Cr—
157	5885.322	.384	0	— 2	—
158	5886.631	—	00	...	—
159	5888.313	.318	0 d	— 3, — 3	—, —
160	5889.856	.977	25	30	Na
161	5892.806	.860	0—1	— 1, 4	Fe—Ni
162	5895.850	.944	20	20	Na
163	5897.447	.351	0 d	— 1, — 2	—, —

segue TABELLA IV.

N.	λ_{OSS}	λ_{RR}	i_{OSS}	i_{RR}	El.
164	5899.368	.366	0 d	— 1, 1	Ti, —
165	5899.974	.006	ass.	2, 4	. . .
166	5901.530	.472	ass.	6	. . .
167	5903.810	.837	ass. †	— 1, — 1	. . .
168	5905.695	.684	1	4	Fe
169	5909.947	.985	1	1	Fe
170	5914.194	.123	2	4	Fe
171	5916.256	.262	1 d	3	Fe
172	5922.221	.127	0 d	0	Ti
173	5922.635	.561	ass.	0, 2	. . .
174	5923.070	.022	0—1 d	— 3	—
175	5927.756	.800	1 dd	2	Fe
176	5930.226	.194	2—3 d	6	Fe
177	5934.686	.669	1 d	5	Fe
178	5941.257	.238	ass.	2, 5	. . .
179	5941.653	.771	0—00	— 1	Ti
180	5942.602	.538	ass.	3, 1	. . .
181	5943.607	.602	0—1	— 1	Fe
182	5946.017	.010	ass.	3	. . .
183	5946.425	.472	0—1	— 2	Co
184	5947.008	.996	ass.	1, 2	. . .
185	5947.458	.517	0	— 1	—
186	5947.898	.862	00 d	— 3, — 3	†
187	5948.552	.552	0—1	6	Si
188	5952.985	.819	1 dd	1, 4	Fe—Ti
189	5956.780	.709	1 d	4	Fe
190	5965.895	.840	1 d	2	Ti
191	5975.388	.356	0 d	3	Fe
192	5976.696	.791	0—1	4	Fe
193	5978.538	.554	1 d	1	Ti
194	5983.716	.693	1	5	Fe
195	5984.840	.830	2	6	Fe
196	5987.104	.075	1 d	5	Fe

segue TABELLA IV.

N.	λ_{OSS}	λ_{RR}	i_{OSS}	i_{RR}	El.
197	5991.351	.383	5	2 ⁺	---
198	5996.798	.774	0—00	— 3 ⁺ , 1	Ce ⁺ , Ni
199	5997.739	.743	0—1	0,2	Fe—Ni
200	5999.015	.989	00	— 2	Ti
201	6003.046	.027	0—1	6	Fe
202	6007.282	.322	0—1	1	Ni
203	6007.940	.973	0—1	4	Fe
204	6008.522	.572	0—1	6	Fe
205	6012.241	.238	00	1	Ni
206	6013.545	.503	1	6	Mn
207	6016.602	.653	1—2 d	6	Mn
208	6020.146	.135	4	2,4	Fe ?—Fe
209	6021.813	.808	1	6	Mn
210	6024.108	.073	1—2	7	Fe
211	6027.067	.064	0	4	Fe
212	6042.187	.108	0—1	3	Fe
213	6043.381	.432	00	— 2 ⁺	Ce ⁺ ?
214	6056.033	.018	2	5	Fe
215	6065.506	.499	3	7	Fe
216	6078.487	.504	2 d	5	Fe
217	6079.028	.021	1	2	Fe
218	6081.392	.458	0—1	0	V
219	6082.581	.665	0 d	— 2, 1	Co—Fe
220	6084.087	.118	1—2 d	0	—
221	6085.272	.264	00	2	Ti—Fe
222	6086.328	.294	0 d	1	Ni
223	6089.478	.580	0 ::	1	Fe
224	6090.263	.222	0	2	V
225	6096.616	.675	00	3	Fe
226	6098.306	.259	00	0	Co ?
227	6102.178	.188	1—2	6	Fe
228	6102.574	.733	00	9	Ca
229	6103.221	.218	1—2 d	4,1	Fe, —

segue TABELLA IV.

N.	λ_{OSS}	λ_{RR}	i_{OSS}	i_{RR}	El.
230	6108.130	.130	1	6	Ni
231	6111.646	.668	0	0	V
232	6113.352	.334	0 d	0	—
233	6116.118	.205	1	1,4	Ni—Fe
234	6119.632	.614	0—1	0,1	V—Ni
235	6122.174	.231	4	10	Ca
236	6126.189	.230	00	1	Ti
237	6127.964	.918	00	3	Fe
238	6136.628	.631	2	8	Fe
239	6137.716	.709	1	7	Fe
240	6141.657	.733	12	7+	Ba+—Fe
241	6145.038	.030	0	2	—
242	6146.162	.244	00	— 2	Ti
243	6147.756	.802	1—2	2+, 3	Fe+—Fe
244	6149.227	.255	1—2	2+	Fe+
245	6151.577	.630	0	4	Fe
246	6155.108	.148	0—00	7	—
247	6157.668	.739	0 d	5	Fe
248	6162.196	.185	8	15	Ca
249	6163.536	.615	0	2, 1, 3	Ni—Ca—Fe
250	6165.370	.369	00	3	Fe
251	6166.497	.446	00	5	Ca
252	6169.299	.330	0 dd	6,7	Ca—Ca
253	6170.472	.522	2	6	Fe—Ni
254	6173.397	.348	1	5	Fe
255	6175.327	.376	0—1	3	Ni
256	6176.808	.822	0	5	Ni
257	6180.173	.216	0	5	Fe
258	6183.625	.573	00	0	—
259	6191.384	.423	9	6,9	Ni—Fe
260	6199.060	.195	00	0	V
261	6200.327	.327	0—1	6	Fe
262	6213.381	.443	1—2	6	Fe

segue TABELLA IV.

N.	λ_{oss}	λ_{RR}	i_{oss}	i_{RR}	El.
263	6215.114	.157	0—1	5	Fe—Ti
264	6216.382	.366	0—1	1	V
265	6219.247	.294	2	6	Fe
266	6223.939	.996	0—00	1	Ni
267	6229.189	.240	0 ::	1	Fe
268	6230.745	.742	4	8	Fe—V
269	6232.613	.655	1	3	Fe
270	6237.390	.334	0—1	3	—
271	6238.426	.396	3	2 ⁺	Fe ⁺
272	6239.424	.382	0	— 1	Sc
273	6240.610	.659	0	3	Fe
274	6242.994	.120	0 d	1	V
275	6245.634	.628	0—1	1 ⁺	Sc ⁺
276	6246.370	.333	0—1	8	Fe
277	6247.573	.569	6	2 ⁺	Fe ⁺
278	6252.603	.572	2	7	Fe
279	6254.250	.241	1	1,5	—, Fe
280	6256.344	.374	1 d	6	Fe—Ni
281	6258.149	.117	0	2	Ti
282	6258.758	.721	0	3	Ti
283	6261.096	.112	0 d	1	Ti
284	6265.172	.148	2	5	Fe
285	6270.214	.237	0—1 d	3	Fe
286	6276.671	.680	ass.	2,1	...
287	6277.411	.439	ass.	2,1, 1,1	...
288	6278.127	.101	ass.	4	...
289	6279.041	.016	ass.	2,3	...
290	6279.675	.744	0—1 d	0 ⁺	Sc ⁺
291	6280.308	.396	ass.	2	...
292	6280.686	.628	0—1	3	Fe
293	6281.100	.185	ass.	1	...
294	6290.947	.981	0—1	4	Fe
295	6296.626	.67	00	(3)	Ti

segue TABELLA IV.

N.	λ_{OSS}	λ_{RR}	i_{OSS}	i_{RR}	El.
296	6297.851	.808	1—2	5	Fe
297	6299.719	.601	00	0	—
298	6300.353	.331	00	— 2	—
299	6301.517	.517	2	7	Fe
300	6302.579	.508	0—1	5	Fe
301	6310.891	.643	ass.	1	...
302	6311.366	.445	00 :	1, — 1	Fe—Ti ?
303	6314.735	.675	0—1	4	Ni
304	6315.366	.343	0	2, — 1	Fe, —
305	6317.995	.036	2—3	6	Fe
306	6322.743	.701	0	4	Fe
307	6327.644	.613	0—00	2	Ni
308	6335.356	.345	1—2	6	Fe
309	6336.826	.837	1	7	Fe
310	6339.000	.006	1 d	2,2	Fe—Ni
311	6344.170	.162	0	4	Fe
312	6347.146	.104	6	2+	Si+
313	6355.050	.043	1	4	Fe
314	6358.698	.695	1	6	Fe
315	6364.531	.490	00	1,0	Fe—Fe
316	6366.459	.498	00	0	Ni
317	6369.489	.479	1—2	0+	Fe+
318	6371.428	.362	1—2 d	1+	Si+—Fe
319	6390.591	.509	0—00	— 2+	La+ ?
320	6393.620	.620	4	7	Fe
321	6400.118	.080	5	8,2	Fe—Fe
322	6408.080	.033	0	5	Fe
323	6411.695	.665	1—2	7	Fe
324	6416.960	.935	3	1+	Fe+
325	6419.933	.964	1	4	Fe
326	6421.368	.367	4	7	Fe
327	6430.837	.863	3	5	Fe
328	6432.670	.690	6	1+	Fe+

segue TABELLA IV.

N.	λ_{OSS}	λ_{RR}	i_{OSS}	i_{RR}	El.
329	6439.095	.090	2	8	Ca
330	6450.063	.890	0 d	6,0	Ca—Co
331	6455.573	.613	ass.	2	Ca
332	6456.348	.396	9	3+	Fe+
333	6462.617	.645	2	5,3	Ca—Fe
334	6469.136	.200	0—1 d	2	Fe
335	6469.650	.646	ass.	— 2	. . .
336	6475.092	.144	ass.	— 1, — 1	. . .
337	6475.908	.831	ass.	0	. . .
338	6480.030	.070	ass.	1	. . .
339	6481.886	.886	1	3	Fe
340	6482.748	.815	1	1	Ni
341	6483.222	.252	ass.	1	. . .
342	6490.755	.798	ass.	1	. . .
343	6491.510	.590	0—1	1+	Ti+
344	6493.766	.796	0—1	6	Ca
345	6494.964	.001	1	8	Fe
346	6496.836	.916	10	4+	Ba+
347	6508.581	.605	ass.	0	. . .
348	6512.099	.133	ass.	— 1, — 1	. . .
349	6514.756	.737	ass.	2	. . .
350	6516.094	.094	6	2+	Fe+
351	6516.570	.597	ass.	1,2	. . .
352	6519.450	.458	ass.	1	. . .
353	6523.762	.855	ass.	1	. . .
354	6532.378	.369	ass.	1	. . .
355	6543.930	.912	ass.	2	. . .
356	6546.269	.260	0	6	Fe—Ti
357	6548.626	.627	ass.	1	. . .
358	6552.654	.636	ass.	1	. . .
359	6562.500	.816	100	40	H
360	6569.235	.232	0—00	5	Fe
361	6572.182	.099	ass.	1	. . .

segue TABELLA IV.

N.	λ_{oss}	λ_{RR}	i_{oss}	i_{RR}	El.
362	6572.804	.804	1	1	Ca
363	6574.247	.243	1 d	1	Fe
364	6574.885	.854	ass.	1	

Note:

13 - Riga diffusa, composta di tre componenti, attribuite rispettivamente a V—C₂, Fe—C₂, Ti—C₂.

41 - Grana cattiva sul negativo.

101 - Riga non identificata.

158 - Riga non identificata.

197 - Riga di scintilla, fortemente rinforzata in α Persei.

295 - L'intensità data fra parentesi corrisponde allo spettro di macchia.

331 - Riga in assorbimento, possibilmente attribuibile a vapori di Calcio a basso livello.

§ 5. - Interpretazione e discussione dei risultati.

Come è noto, le differenze fra le lunghezze d'onda ottenute dallo spettro della cromosfera rispetto a quelle del disco solare, possono derivare: *a*) da differenze fondamentali dipendenti dalla distribuzione dei vapori nella cromosfera; *b*) dalla dispersione relativamente scarsa degli spettrografi adoperati nelle eclissi, nel caso di righe che nello spettro della cromosfera appaiono unite, mentre sono separate in due o più componenti nelle mappe dello spettro della fotosfera; *c*) da errori di misura.

Le differenze nelle lunghezze d'onda attribuibili alla prima di queste due cause sono dovute in parte ad una rotazione differenziale, con un effetto DOPPLER direttamente proporzionale all'altezza cui si forma la riga, ma principalmente ad un effetto geometrico, per il quale ad una maggiore altezza di un determinato gas sulla fotosfera corrisponde uno spessore più forte e di conseguenza uno spostamento del centro di luminosità dell'arco cromosferico che gli corrisponde nello spettro. Infatti, poichè fra la distanza focale f dell'obiettivo, il diametro apparente θ del sole e il diametro d dell'immagine fornita sulla fenditura vale la relazione ben nota:

$$f \tan \theta = d$$

e nel caso in questione si ha $f = 5300$ mm, $\theta = 31' 32''$, si ottiene $d = 48,5$ mm e infine ($D_{\odot} = 1.391.000$ km) che la larghezza della fenditura

(0,20 mm) equivale ad un'altezza $h = 5736$ km al di sopra del bordo solare; ora gli strati che contribuiscono a formare lo spettro di inversione sono progressivamente meno luminosi con l'aumentare dell'altezza, secondo una funzione $I(h)$, caratteristica di ogni elemento, la quale si aggiunge alla funzione che esprime il profilo strumentale degli archi cromosferici. Poichè le righe spettrali fotografate non sono altro che tante immagini monocromatiche del bordo solare al momento del fenomeno, assumendo come lunghezze d'onda di riferimento quelle delle righe di basso livello e tenuto presente che nel caso attuale lo spettrogramma si riferisce al lembo est del Sole, che risultava a destra dell'immagine formata sulla fenditura dello strumento, ne consegue che gli archi cromosferici dovuti ai gas più elevati appaiono nello spettro spostati verso sinistra e cioè verso il violetto. Questo effetto è progressivamente maggiore con l'aumentare del livello effettivo della riga e quindi della sua intensità, fino ad un massimo per la riga H_{α} , e quindi può servire a determinare l'altezza degli elementi stessi sullo strato invertente, facendo l'ipotesi che la puntata sia riferita al centro di luminosità delle varie righe, risultante dalla sovrapposizione delle due funzioni di cui sopra.

Nella scala lineare data dall'obiettivo Amici I e dallo schema ottico dello strumento, si trova che 1μ , tanto sulla fenditura che nello spettro, corrisponde a 28,7 km sul Sole. Da gli spostamenti osservati nelle righe più intense, si hanno i valori delle altezze dei loro centri di luminosità, trascritti nella terza colonna della Tabella V.

TABELLA V.

Riga	Spostam.	Altezza
H_{α}	— 62 μ	1780 km
D 3	— 38	1090
D 2	— 24	689
D 1	— 18	516
6497	— 16	459
6142	— 15	431
6456	— 10	287
6191	— 8	229
int. (1-2)	0	0

Una tale interpretazione degli spostamenti osservati è convalidata dall'esame delle larghezze delle righe spettrali più intense, lette sui micro-

fotogrammi ottenuti dallo stesso spettro nell'intento di determinare in una ulteriore ricerca le larghezze equivalenti e il profilo delle righe.

Riportando, come in fig. 2, in ascisse le semilarghezze delle righe ed in ordinate le differenze fra le lunghezze d'onda osservate nella cromosfera

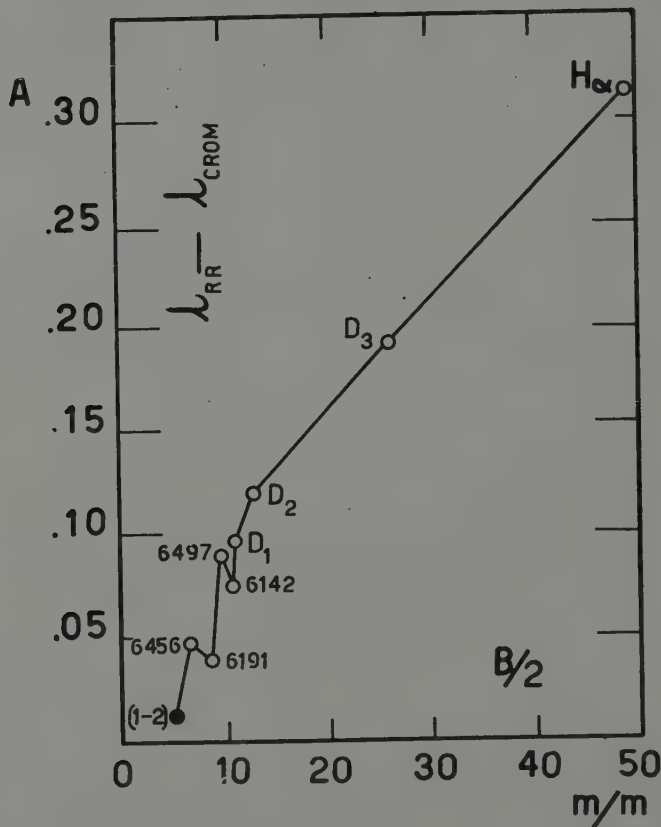


Fig. 2.

e quelle della *Rowland's Revision*, sempre per le righe più intense, si ottiene una curva dall'andamento assai probante, nella quale, quando le ordinate tendono a zero, le ascisse tendono al valore minimo strumentale della larghezza delle righe. La riga 6191, che scarta notevolmente da questa curva, ha un profilo particolare perchè è composta dei due elementi 6191.192-Ni-6 e 6191.577-Fe-9, che il reticolo non riesce a separare.

Naturalmente i valori dati nella Tabella V non esprimono le altezze massime dell'elemento sulla fotosfera, in primo luogo perchè si sono assunte come righe fondamentali nel calcolo quelle di elementi che si trovano già per loro conto ad un'altezza di circa 450 km; in secondo luogo perchè i valori ottenuti si riferiscono soltanto al centro di luminosità dell'arco cromosferico fotografato, la cui posizione risulta dal sovrapporsi delle due funzioni di cui si è accennato sopra. Le vere altezze di alcuni elementi si possono ricavare graficamente dalla Tabella V, riferendosi

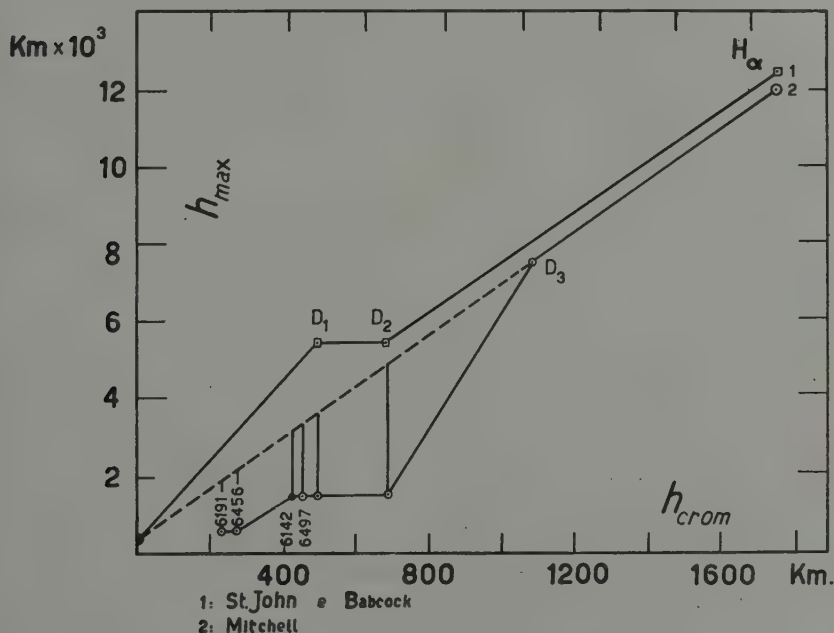


Fig. 3.

ai valori trovati con vari metodi da ST. JOHN, BABCOCK, MITCHELL⁽¹⁾, come nel diagramma della figura 3: secondo il coefficiente di proporzionalità che risulta assumendo come esatte le altezze delle righe D_3 ed H_α , per le quali i valori pubblicati sono meglio concordanti fra di loro, le altezze della D_1 e D_2 del Sodio risultano intermedie fra quelle date dai diversi autori, ed in particolare superiori a quelle ottenute da MITCHELL misurando l'ampiezza degli archi cromosferici.

Sono state misurate anche le lunghezze d'onda di molte righe di assorbimento, di origine atmosferica. Poichè le lunghezze d'onda sono date in

⁽¹⁾ G. ABETTI, *Solar Physics*; « Handbuch der Astrophysik »: Bd. IV, 170.

base alle posizioni delle righe in emissione, le quali sono invece spostate effettivamente verso il violetto di $0,04 \text{ \AA}$ – per una lunghezza d'onda media di 6000 \AA – per effetto della rotazione solare, tali righe di assorbimento risultano in media spostate verso il rosso, come in particolare si vede nella fig. 4 che dà in ascisse le intensità delle righe, in scala logaritmica, e in ordinate le differenze fra le lunghezze d'onda osservate nella cromosfera e quelle della *Rowland's Revision*.

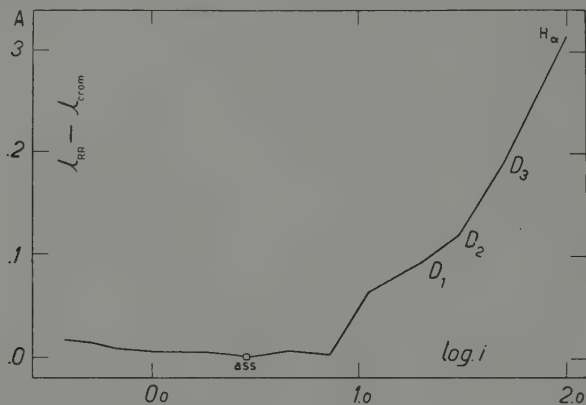


Fig. 4.

Per quanto riguarda l'intensità delle diverse righe, essa si sta studiando più rigorosamente attraverso i microfotogrammi, valendosi delle lastre di calibrazione eseguite sul luogo ed al momento dell'eclisse, e saranno pubblicate le larghezze equivalenti che risulteranno da questa ricerca. Su questo punto si può fin d'ora confermare ⁽¹⁾ che le intensità della cromosfera differiscono in modo fondamentale da quelle della fotosfera, non solo intrinsecamente, ma anche perchè lo spettro di inversione di alcune righe appare più presto e scompare più tardi, risultandone una posa maggiore rispetto alle altre, e quindi una maggiore intensità. Le immagini monocromatiche dell'arco cromosferico hanno nello spettro un diverso spessore a seconda dell'altezza dell'elemento cui appartengono, e questo porta ad uno spostamento del centro delle righe più intense, dal quale si possono ricavare, come si è visto, anche delle altezze quantitativamente probanti.

⁽¹⁾ S. A. MITCHELL, loc. cit. e A. D. THACKERAY, *Wavelengths and intensities in the flash-spectrum*, MN, 97, pag. 672.

Una differenza effettiva nella lunghezza d'onda fra lo spettro della cromosfera e quello del disco solare si può avere anche nel caso di righe che risultano formate da due o più componenti non sufficientemente separate e appartenenti ad un diverso livello; per cui, passando dallo spettro normale a quello della cromosfera, le variazioni di intensità sono in diversa misura; in tal caso il *baricentro* della riga stessa viene a spostarsi, e ne risulta un'alterazione nella lunghezza d'onda complessiva. Questo fatto, che assume particolare importanza con strumenti che diano una piccola dispersione, o anche quando una delle due componenti è una riga di scintilla, risulta anche dalle misure dello spettro-lampo fotografato a Sara. Queste righe multiple hanno necessariamente un profilo particolare, che sarà studiato più da vicino attraverso i microfotogrammi che sono stati ricavati in Arcetri dallo spettro in questione.

Per la parte generale si veda:

G. ABETTI, *Il Sole*, Hoepli, 1936.

S. A. MITCHELL, *Eclipses of the Sun*; Columbia Univ. Press, 1932.

Handbuch der Astrophysik; Bd. IV, pag. 275 e sgg.

Astronomia (Astrofisica). — *Fotometria della corona interna nell'eclisse di Sole del 19 giugno 1936* ⁽¹⁾. Nota di MARIA VIARO, presentata ⁽²⁾ da GIORGIO ABETTI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Allo scopo di determinare l'intensità della corona interna del Sole le lastre eseguite al coronografo dalla Missione italiana in U. R. S. S. durante l'eclisse totale di Sole del 19 giugno 1936 sono state da me nuovamente misurate e ridotte.

In un precedente lavoro ⁽³⁾ G. RIGHINI dà i risultati da lui ottenuti per la corona intermedia facendo passare al microfotometro autoregistratore dell'Osservatorio di Arcetri le lastre secondo direzioni parallele ad un diametro lunare. Le misure da lui eseguite, opportunamente interpolate secondo dodici direzioni radiali equidistanti partendo dal polo nord del Sole e ridotte con procedimento fotometrico rigoroso, servirono per il tracciamento delle isofote e per la deduzione dell'indice di colore nelle regioni della corona intermedia. Mentre RIGHINI dà la misura della intensità della corona a partire da 1' dal bordo del sole, qui si trattava di arrivare sino a pochi secondi dal detto bordo, quindi avendosi in quella regione densità piuttosto forti si presentava più adatto per le misure il microfotometro visuale di Hartmann. Da un esame preliminare risultarono più convenienti per queste nuove misure le due prime coppie di lastre cioè la 1 g, 1 v e 2 g, 2 v. Come risulta dalla relazione del RIGHINI i due obiettivi del coronografo muniti di filtro, l'uno giallo (K_3 di WRATTEN KODAK) e l'altro blu violetto (48 a o C_3 pure di WRATTEN) permisero di prendere contemporaneamente una coppia di lastre nelle due radiazioni col medesimo tempo di posa. Gli istanti dell'inizio e della fine, e i tempi di posa relativi alle due coppie di lastre in esame sono raccolti nel seguente prospetto.

	inizio	fine	posa
coppia n. 1	« via »	3 ^{se}	3 ^a
» » 2	13	19	6

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel R. Osservatorio Astrofisico di Arcetri - Firenze.

⁽²⁾ Nell'Adunanza del 18 novembre 1939-XVIII.

⁽³⁾ *L'eclisse di Sole del 19 giugno 1936 osservata nell'U. R. S. S.* Relazione della Missione Astronomica Italiana, parte IV. Reale Accademia d'Italia, vol. I X.

Il procedimento di riduzione usato nelle presenti misure è nelle linee generali uguale a quello di RIGHINI. Per la costruzione delle curve di calibrazione sono state da me usate le seguenti lastre:

Lastra	Filtro	Correnti di alimentazione della lampada campione			Posa
<i>C 1 g</i>	K_3	13.0	12,5	12.0	3 ^s
<i>C 1 v</i>	48 <i>a</i>	12.5	13.0	13.5	3
<i>C 2 g</i>	K_3	12.0	11.5	11.0	6
<i>C 2 v</i>	48 <i>a</i>	12.5	12.0	11.5	6

Le curve di calibrazione di ciascuna lastra sono state eseguite con il solito metodo portando in ascisse logaritmiche le trasmissioni del filtro graduale ⁽¹⁾ ed in ordinate le densità fotografiche. Per ogni lastra si ottennero 3 curve parallele, corrispondenti alle rispettive correnti di alimentazione della lampada campione e, presa la meglio determinata come riferimento, si sono portate le altre a coincidere con essa mediante opportuni spostamenti in ascisse. Per le densità più deboli si sono introdotte anche alcune curve delle seguenti lastre:

Lastre	Filtro	Correnti di alimentazione della lampada campione							Posa
1 arc <i>g</i>	K_3	9.75	10.40	10.65	11.20	12.00	12.31		3 ^s
1 arc <i>v</i>	48 <i>a</i>	13.02	12.00	11.18	10.65	10.38	9.72		3
2 arc <i>g</i>	K_3	11.20	10.65	10.40	9.72	8.88	8.53		6
2 arc <i>v</i>	48 <i>a</i>	12.02	11.20	10.62	10.37	9.75	8.88		6

Le curve complete così ottenute furono ridotte alla corrente di 12 ampère allo scopo di riportare le intensità determinate per mezzo di una curva qualsiasi a quella della curva assunta come riferimento, ottenuta appunto con la corrente di 12 ampère.

Il prospetto seguente dà insieme alla intensità di riferimento di ciascuna curva, il fattore *K* per il quale devono essere divise le intensità delle corrispondenti lastre per riportarle alle intensità ottenute con la corrente di 12 ampère.

Lastra	Filtro	Int. di riferimento	<i>K</i>	Posa
1 <i>g</i>	K_3	12.0	1.00	3 ^s
2 <i>g</i>	K_3	11.0	1.78	6
1 <i>v</i>	48 <i>a</i>	12.5	0.72	3
2 <i>v</i>	48 <i>a</i>	11.5	1.58	6

(¹) Loc. cit., pag. 180.

Tutte le misure furono eseguite al microfotometro di Hartmann mantenendo invariate le condizioni strumentali. Le misure della corona furono fatte secondo 12 direzioni radiali equidistanti a partire dal polo nord del sole, facendo due letture ogni decimo di millimetro, corrispondente a circa 8''. Le lastre furono orientate mediante le protuberanze tenendo conto dell'angolo di posizione dell'asse di rotazione solare.

Le intensità osservate, ridotte a 12 ampère nel modo suddetto, servono per la costruzione dei grafici che rappresentano l'andamento delle intensità lungo le 12 direzioni radiali equidistanti riportando in ordinata le intensità osservate ed in ascissa le distanze dal bordo solare. Nella tabella I diamo i valori osservati di 0'.5 in 0'.5 per le due lastre 1g, 2g (λ 5500) e nella tabella II i valori analoghi per le 1v, 2v (λ 4500). Le distanze in primi sono contate dal lembo del sole tenendo conto dello spostamento del centro della Luna nelle due pose e riducendo le osservazioni al mezzo della eclisse.

TABELLA I.

Intensità osservate. Filtro K_3 (λ 5500 Å circa).

ϑ	$h = 0'.5$			$h = 1'.0$			$h = 1'.5$			$h = 2'.0$			$h = 2'.5$		
	1 g	2 g	media	1' g	2 g	media	1 g	2 g	media	1 g	2 g	media	1 g	2 g	media
0	34	31	32	22	22	22	17	16	16	15	12	14	10.0	9.0	9.5
30	69	61	65	60	48	54	47	37	42	37	31	34	29.0	25.5	27.2
60	176	116	146	122	105	114	80	64	72	58	44	51	42.4	34.5	38.4
90	95	59	77	72	47	60	53	39	46	40	33	36	36.0	29.5	32.7
120	135	127	131	127	90	108	106	58	82	75	42	58	53.0	32.0	42.5
150	98	84	91	77	80	78	61	60	60	50	45	48	40.0	35.2	37.6
180	56	60	58	41	40	40	29	32	30	23	25	24	19.0	20.2	19.6
210	82	79	80	69	69	69	55	49	52	43	33	38	34.0	27.0	30.5
240	105	74	90	102	70	86	76	55	65	51	37	44	36.0	26.2	31.1
270	64	42	53	42	35	38	32	27	30	24	22	23	18.0	16.9	17.4
300	92	60	76	72	50	61	55	38	46	40	32	36	34.1	26.0	30.0
330	57	50	54	38	35	36	27	27	27	21	22	22	17.3	18.2	17.8

ϑ	$h = 3'.0$			$h = 3'.5$			$h = 4'.0$			$h = 4'.5$			$h = 5'.0$		
	1 g	2 g	media	1 g	2 g	media	1 g	2 g	media	1 g	2 g	media	1 g	2 g	media
0	9.0	6.9	8.0	6.2	6.0	6.1	5.3	5.2	5.2	4.0	3.8	3.9	3.4	3.0	3.2
30	24.1	22.1	23.1	20.2	18.1	19.2	17.4	14.2	15.8	15.0	11.2	13.1	13.2	11.0	12.1
60	25.4	26.1	25.7	23.9	20.2	22.0	19.0	16.2	17.6	15.7	13.1	14.4	12.0	10.4	11.2
90	30.0	25.0	27.5	24.1	21.0	22.5	20.4	17.8	19.1	16.2	15.0	15.6	14.3	12.2	13.3
120	37.8	24.2	31.0	28.3	20.0	24.2	22.4	16.0	19.2	17.5	12.5	15.0	13.8	10.0	11.9
150	32.0	26.9	29.4	25.8	22.8	24.3	22.2	18.8	20.5	19.2	15.3	17.2	18.0	13.2	15.6
180	16.2	16.0	16.1	14.0	12.4	13.2	12.1	10.8	11.4	10.1	8.4	9.2	8.2	7.9	8.0
210	28.3	22.6	25.4	23.4	18.0	20.7	18.1	14.6	16.4	14.5	12.1	13.3	12.3	10.6	11.5
240	24.9	19.7	22.3	18.0	14.0	16.0	13.1	10.2	11.6	9.5	9.1	9.3	7.6	6.2	6.9
270	16.4	15.2	15.8	14.1	12.0	13.0	11.9	10.1	11.0	10.1	9.3	9.7	8.8	7.3	8.0
300	27.4	23.1	25.2	20.8	19.9	20.4	18.3	16.9	17.6	15.5	14.2	14.8	13.1	10.9	12.0
330	14.3	15.6	15.0	12.4	12.5	12.4	11.0	10.3	10.6	9.4	9.4	9.4	8.1	7.8	8.0

Segue TABELLA I.

g	h = 5'.5			h = 6'.0			h = 6'.5			h = 7'.0			h = 7'.5		
	1 g	2 g	media	1 g	2 g	media	1 g	2 g	media	1 g	2 g	media	1 g	2 g	media
0	1.4	2.5	2.0	—	2.2	2.2	—	2.1	2.1	—	2.0	2.0	—	1.8	1.8
30	11.8	9.9	10.8	10.1	8.2	9.2	9.3	8.2	8.7	8.0	7.2	7.6	6.8	6.1	6.4
60	10.0	8.1	9.0	8.2	7.1	7.6	7.1	6.3	6.7	6.0	5.5	5.8	5.9	4.2	5.0
90	11.9	10.1	11.0	9.2	8.9	9.0	8.0	7.8	7.9	6.4	6.2	6.3	5.2	5.3	5.2
120	10.8	8.0	9.4	9.0	6.4	7.7	7.9	5.2	6.5	6.2	3.9	5.0	5.2	2.2	3.7
150	15.8	11.4	13.6	14.1	11.0	12.6	11.9	9.9	10.9	10.3	8.0	9.2	9.8	6.9	8.3
180	6.9	6.4	6.6	5.0	5.2	5.1	4.0	4.2	4.1	2.9	3.9	3.4	1.9	3.4	2.6
210	10.6	9.5	10.0	9.4	7.9	8.6	8.0	6.2	7.1	6.9	5.9	6.4	5.8	4.2	5.0
240	7.2	4.8	6.0	5.2	4.0	4.6	4.0	3.4	3.7	3.5	2.2	2.8	2.2	2.0	2.1
270	6.9	6.2	6.6	5.9	5.4	5.6	4.0	4.4	4.2	2.2	4.1	3.2	1.9	3.9	2.9
300	10.3	10.2	10.2	9.9	9.2	9.6	8.9	8.0	8.4	8.0	7.1	7.6	6.2	6.2	6.2
330	7.1	6.8	7.0	6.0	6.0	6.0	4.9	4.9	4.9	3.8	4.0	3.9	2.6	3.9	3.2

g	h = 8'.0			h = 8'.5			h = 9'.0			h = 9'.5			h = 10'.0		
	1 g	2 g	media	1 g	2 g	media	1 g	2 g	media	1 g	2 g	media	1 g	2 g	media
0	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
30	6.0	5.9	6.0	5.6	4.8	5.2	4.4	4.0	4.2	4.0	3.9	4.0	3.9	3.7	3.8
60	5.6	4.0	4.8	4.3	3.5	3.9	4.0	2.4	3.2	3.9	2.2	3.0	3.2	1.8	2.5
90	4.9	4.4	4.6	3.9	4.0	4.0	2.2	3.7	3.0	2.0	3.0	2.5	1.8	1.4	1.6
120	4.4	2.1	3.2	4.2	2.0	3.1	4.0	1.9	3.0	3.9	1.6	2.7	3.1	1.4	2.2
150	8.2	6.1	7.2	7.4	5.8	6.6	7.0	4.8	5.9	6.2	4.0	5.1	5.2	3.2	4.2
180	—	2.4	2.4	—	2.0	2.0	—	1.9	1.9	—	—	—	—	—	—
210	4.9	3.9	4.4	4.0	2.8	3.4	3.1	2.2	2.6	2.0	2.0	2.0	1.8	1.8	1.8
240	2.0	1.8	1.9	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
270	—	3.1	3.1	—	2.6	2.6	—	2.2	2.2	—	2.0	2.0	—	—	—
300	5.4	5.5	5.4	4.2	4.8	4.5	4.0	4.2	4.1	2.9	3.5	3.2	1.8	2.6	2.2
330	1.8	2.6	2.2	—	2.2	2.2	—	2.0	2.0	—	1.8	1.8	—	—	—

g	h = 10'.5			h = 11'.0			h = 11'.5		
	1 g	2 g	media	1 g	2 g	media	1 g	2 g	media
0	—	—	—	—	—	—	—	—	—
30	2.4	2.2	2.3	—	—	—	—	—	—
60	2.4	1.2	1.8	—	—	—	—	—	—
90	—	—	—	—	—	—	—	—	—
120	2.0	1.0	1.5	—	—	—	—	—	—
150	5.0	3.8	4.4	4.3	2.6	3.4	3.8	1.9	2.8
180	—	—	—	—	—	—	—	—	—
210	—	—	—	—	—	—	—	—	—
240	—	—	—	—	—	—	—	—	—
270	—	—	—	—	—	—	—	—	—
300	—	2.4	2.4	—	2.2	2.2	—	2.0	2.0
330	—	—	—	—	—	—	—	—	—

TABELLA II.

Intensità osservate. Filtro 48 a (λ 4500 Å circa).

ϑ	$h = 0'.5$			$h = 1'.0$			$h = 1'.5$			$h = 2'.0$			$h = 2'.5$		
	1 v	2 v	media	1 v	2 v	media	1 v	2 v	media	1 v	2 v	media	1 v	2 v	media
0	79	114	96	60	80	70	44	60	52	31	41	36	26	30	28
30	147	169	158	127	140	134	109	124	116	95	104	100	77	91	84
60	266	201	233	210	157	183	167	134	150	120	110	115	93	86	90
90	234	157	196	178	115	146	147	103	125	115	81	98	98	70	84
120	384	242	313	306	203	255	224	157	190	158	133	146	129	100	114
150	234	192	213	198	164	181	156	140	148	120	113	116	108	92	100
180	138	136	137	110	106	108	94	88	91	71	65	68	64	54	59
210	165	148	156	134	125	130	115	106	110	93	86	90	75	72	74
240	243	129	186	210	118	164	146	101	124	119	83	101	86	64	75
270	133	126	130	115	98	106	90	75	82	68	59	64	58	49	54
300	190	154	172	159	144	152	125	121	123	105	101	103	84	88	86
330	160	132	146	120	116	118	86	90	88	68	72	70	52	62	57

ϑ	$h = 3'.0$			$h = 3'.5$			$h = 4'.0$			$h = 4'.5$			$h = 5'.0$		
	1 v	2 v	media	1 v	2 v	media	1 v	2 v	media	1 v	2 v	media	1 v	2 v	media
0	20	24	22	13	19	16	11	15	13	9	13	11	7	10	8
30	66	75	70	60	65	62	48	51	50	43	44	44	39	39	39
60	79	71	75	61	55	58	51	45	48	42	37	40	38	29	34
90	84	62	73	72	52	62	62	44	53	53	37	45	46	32	39
120	105	80	92	84	61	72	68	49	58	56	38	47	44	31	37
150	90	78	84	77	64	70	68	53	60	58	46	52	54	40	47
180	52	44	48	45	36	40	39	32	36	35	26	30	26	21	24
210	68	59	64	55	47	51	47	38	42	39	32	36	33	27	30
240	63	53	58	45	46	46	33	38	36	26	20	28	21	22	22
270	50	40	45	43	36	40	34	30	32	29	25	27	25	22	24
300	71	72	72	62	60	61	53	50	52	43	42	42	34	35	34
330	44	47	46	37	39	38	31	32	32	27	27	27	24	21	22

ϑ	$h = 5'.5$			$h = 6'.0$			$h = 6'.5$			$h = 7'.0$			$h = 7'.5$		
	1 v	2 v	media	1 v	2 v	media	1 v	2 v	media	1 v	2 v	media	1 v	2 v	media
0	6	9	8	5	8	7	3	7	5	3.9	6.2	5.0	—	6.0	6.0
30	33	32	32	28	27	28	24	25	24	22.2	21.5	21.8	21.0	19.4	20.2
60	30	24	27	27	20	24	24	18	21	21.9	15.4	18.6	19.5	13.2	16.4
90	38	26	32	35	23	29	28	19	24	24.0	16.9	20.4	20.3	15.1	17.7
120	38	24	31	32	21	26	27	16	22	23.9	14.1	19.0	20.8	11.9	16.4
150	50	35	42	44	31	38	39	27	33	34.0	23.5	28.8	30.6	20.6	25.6
180	23	17	20	20	15	18	17	13	15	15.5	11.1	13.3	13.3	9.5	11.4
210	30	23	26	26	20	23	22	18	20	20.9	15.1	18.0	18.0	12.4	15.2
240	18	18	18	15	15	15	13	12	12	11.5	10.1	10.8	9.4	8.5	9.0
270	22	19	20	20	17	18	15	14	14	13.8	12.4	13.1	12.0	10.3	11.2
300	31	30	30	28	26	27	22	23	22	20.9	19.1	20.0	19.2	16.2	17.7
330	21	18	20	18	14	16	16	11	14	13.4	10.1	11.8	11.3	9.3	10.3

Segue TABELLA II.

ϑ	$h = 8'.0$			$h = 8'.5$			$h = 9'.0$			$h = 9'.5$			$h = 10'.0$		
	1 v	2 v	media	1 v	2 v	media	1 v	2 v	media	1 v	2 v	media	1 v	2 v	media
0	—	5.5	5.5	—	4.9	4.9	—	4.0	4.0	—	3.5	3.5	—	3.1	3.1
30	18.1	16.9	17.5	15.9	14.2	15.0	14.0	13.0	13.5	12.5	12.0	12.2	11.2	10.8	11.0
60	16.9	11.5	14.2	14.5	10.6	12.6	13.9	10.1	12.0	11.5	9.4	10.5	9.6	9.0	9.3
90	18.4	12.5	15.4	16.9	12.0	14.4	15.8	10.3	13.0	14.3	9.3	11.8	13.2	9.1	11.2
120	17.9	10.0	14.0	16.2	8.1	12.1	15.0	7.5	11.2	13.4	7.2	10.3	11.9	6.5	9.2
150	27.8	18.2	23.0	25.2	16.0	20.6	22.9	14.1	18.5	20.9	12.4	16.6	19.8	11.2	15.5
180	11.5	8.4	10.0	10.2	7.9	9.0	9.6	6.9	8.2	8.5	5.9	7.2	7.2	5.5	6.4
210	15.5	10.5	13.0	14.1	9.4	11.8	12.4	8.1	10.2	10.2	7.3	8.8	9.5	6.5	8.0
240	8.2	7.9	8.0	7.1	6.4	6.7	5.6	5.9	5.8	4.0	5.5	4.7	3.1	5.0	4.0
270	10.2	9.8	10.0	9.8	8.5	9.2	7.8	7.8	7.8	6.4	6.9	6.7	5.3	6.2	5.7
300	16.9	14.3	15.6	14.3	12.0	13.2	11.2	10.7	11.0	9.9	9.9	9.9	9.2	9.0	9.1
330	9.5	7.5	8.5	6.5	6.4	6.4	6.2	5.5	5.8	5.5	4.9	5.2	4.2	3.7	4.0

ϑ	$h = 10'.5$			$h = 11'.0$			$h = 11'.5$			$h = 12'.0$			$h = 12'.5$		
	1 v	2 v	media	1 v	2 v	media	1 v	2 v	media	1 v	2 v	media	1 v	2 v	media
0	—	2.9	2.9	—	2.8	2.8	—	—	—	—	—	—	—	—	—
30	11.3	9.9	10.6	8.6	8.2	8.4	7.0	7.9	7.4	6.9	7.8	7.4	5.9	7.0	6.4
60	8.7	7.2	8.0	8.5	6.9	7.7	7.2	6.5	6.8	7.5	6.2	6.8	7.0	5.9	6.4
90	12.3	8.0	10.2	11.5	7.4	9.5	10.4	6.4	8.4	9.8	6.0	7.9	9.1	5.8	7.5
120	10.6	5.5	8.0	9.5	4.6	7.0	8.5	4.2	6.4	7.0	3.9	5.4	6.1	3.4	4.8
150	18.0	10.1	14.0	16.2	9.1	12.6	14.9	8.0	11.4	13.6	6.9	10.2	12.2	6.4	9.3
180	6.5	5.2	5.8	5.6	3.5	4.5	5.8	3.2	4.5	4.8	2.9	3.9	3.0	2.5	2.8
210	8.8	6.0	7.4	8.0	5.5	6.7	7.5	5.1	6.3	6.9	4.2	5.6	6.8	3.3	5.0
240	2.1	3.0	2.5	—	2.7	2.7	—	2.3	2.3	—	2.1	2.1	—	2.0	2.0
270	4.0	5.6	4.8	3.9	5.2	4.5	3.2	4.7	4.0	2.4	4.2	3.3	—	3.9	3.9
300	7.5	7.8	7.6	6.5	7.9	7.2	5.6	6.3	6.0	3.9	5.9	4.9	3.5	5.0	4.2
330	3.5	3.5	3.5	3.4	2.1	2.7	—	2.0	2.0	—	1.9	1.9	—	—	—

TABELLA III.

Intensità corrette. Filtro 48a (λ 4500 Å circa).

ϑ	$h = 0'.5$			$h = 1'.0$			$h = 1'.5$			$h = 2'.0$			$h = 2'.5$		
	1 v	2 v	media	1 v	2 v	media	1 v	2 v	media	1 v	2 v	media	1 v	2 v	media
0	109	132	120	73	100	86	55	68	62	40	46	43	30	35	32
30	211	215	213	180	195	188	148	171	160	122	140	131	100	114	107
60	375	271	323	295	220	258	237	176	206	168	140	154	128	110	119
90	325	214	270	239	170	204	195	137	166	152	108	130	125	88	106
120	545	335	440	418	260	339	307	213	260	230	162	196	166	130	148
150	339	264	302	286	220	253	228	182	205	184	148	166	150	118	134
180	186	172	179	135	148	142	108	112	110	92	83	88	78	66	72
210	216	196	206	192	171	182	162	142	152	134	115	124	108	93	100
240	344	181	262	300	160	230	230	137	184	160	116	138	108	92	100
270	193	158	176	159	134	146	120	108	114	94	80	87	76	63	70
300	258	222	240	222	196	209	182	167	174	148	141	144	116	118	117
330	198	192	195	164	152	158	128	127	128	90	96	93	71	78	74

Segue TABELLA III.

9	$h = 3'.0$			$h = 3'.5$			$h = 4'.0$			$h = 4'.5$			$h = 5'.0$		
	1 v	2 v	media	1 v	2 v	media	1 v	2 v	media	1 v	2 v	media	1 v	2 v	media
0	24	26	25	16	20	18	11	15	13	8	12	10	5	9	7
30	88	95	91	74	79	76	63	66	64	52	53	52	44	44	44
60	96	86	91	73	63	68	63	53	58	50	43	46	40	33	36
90	104	75	90	87	63	75	69	52	60	56	43	50	47	35	41
120	126	100	113	101	75	88	78	58	68	62	43	52	49	29	39
150	122	95	108	99	76	88	84	63	74	73	54	64	65	45	55
180	66	54	60	53	42	48	44	34	39	36	28	32	28	23	26
210	85	74	80	70	59	64	55	46	50	42	37	40	34	31	32
240	76	70	73	51	57	54	35	47	41	27	35	31	21	25	23
270	63	52	58	50	43	46	40	36	38	32	31	32	26	26	26
300	91	97	94	76	78	77	64	64	64	53	53	53	44	44	44
330	57	62	60	45	48	46	37	38	38	32	31	32	27	24	26

9	$h = 5'.5$			$h = 6'.0$			$h = 6'.5$			$h = 7'.0$			$h = 7'.5$		
	1 v	2 v	media	1 v	2 v	media	1 v	2 v	media	1 v	2 v	media	1 v	2 v	media
0	4	7	6	4	5	4	2	4	3	0.0	3.9	2.0	—	3.0	3.0
30	39	37	38	34	32	33	26	27	26	23.0	23.3	23.2	20.8	19.9	20.4
60	33	25	29	28	20	24	23	17	20	19.9	14.5	17.2	17.3	11.9	14.6
90	40	27	33	33	23	28	27	17	22	21.0	15.3	18.2	16.6	13.2	14.9
120	38	17	28	28	14	21	22	12	17	18.3	9.9	14.1	15.6	7.8	11.7
150	59	38	48	51	32	42	45	27	36	38.0	22.8	30.4	31.3	19.8	25.6
180	22	18	20	18	14	16	15	11	13	12.8	8.8	10.8	10.9	7.5	9.2
210	32	26	29	29	22	26	24	18	21	19.6	14.3	17.0	16.8	11.4	14.1
240	16	20	18	12	15	14	9	11	10	6.2	7.0	6.6	4.5	5.9	5.2
270	23	20	22	21	16	18	16	13	15	12.0	10.2	11.1	9.5	8.5	9.0
300	38	35	36	32	29	30	26	23	25	23.2	19.7	21.4	19.0	16.9	18.0
330	23	19	21	19	15	17	15	11	13	12.0	7.1	9.6	9.2	6.1	7.6

9	$h = 8'.0$			$h = 8'.5$			$h = 9'.0$			$h = 9'.5$			$h = 10'.0$		
	1 v	2 v	media	1 v	2 v	media	1 v	2 v	media	1 v	2 v	media	1 v	2 v	media
0	—	2.1	2.1	—	1.4	1.4	—	1.2	1.2	—	0.9	0.9	—	0.7	0.7
30	18.0	16.9	17.4	15.9	14.4	15.2	14.0	13.8	13.9	12.0	11.4	11.7	9.9	10.2	10.0
60	14.5	9.5	12.0	11.8	7.1	9.4	9.3	6.2	7.8	7.1	5.5	6.3	6.0	5.0	5.5
90	14.7	11.4	13.0	13.4	9.8	11.6	12.2	8.9	10.5	10.9	6.9	8.9	9.4	6.1	7.8
120	12.8	5.3	9.0	11.0	3.6	7.3	10.1	4.1	7.1	8.4	4.5	6.4	6.9	3.2	5.0
150	29.1	17.2	23.2	26.0	14.9	20.4	23.8	13.4	18.6	21.8	11.8	16.8	19.8	10.1	14.9
180	8.8	6.2	7.5	7.2	5.9	6.6	6.0	5.1	5.6	4.9	4.5	4.7	4.1	3.0	3.6
210	14.6	8.9	11.8	13.5	6.6	10.0	12.0	5.5	8.8	9.1	5.2	7.2	7.2	5.0	6.1
240	3.4	5.2	4.3	2.4	3.9	3.2	1.5	3.2	2.4	0.0	2.0	1.0	0.0	1.9	1.0
270	7.2	7.5	7.4	5.9	6.9	6.4	5.0	6.5	5.8	3.0	4.9	4.0	2.5	3.5	3.0
300	15.9	14.8	15.4	13.2	12.8	13.0	10.4	11.1	10.8	7.5	9.9	8.7	5.0	8.3	6.6
330	7.5	5.0	6.2	4.5	3.3	3.9	3.2	3.2	3.2	1.8	2.0	1.9	1.5	1.9	1.7

Segue TABELLA III.

s	h = 10'.5			h = 11'.0			h = 11'.5			h = 12'.0			h = 12'.5		
	1 v	2 v	media	1 v	2 v	media	1 v	2 v	media	1 v	2 v	media	1 v	2 v	media
0	—	1.1	1.1	—	0.0	0.0	—	—	—	—	—	—	—	—	—
30	9.3	8.8	9.0	7.8	7.9	7.8	5.9	6.5	6.2	4.0	6.0	5.0	2.8	5.5	4.2
60	5.0	4.9	5.0	4.5	4.5	4.5	4.5	4.4	4.4	4.2	4.2	4.2	4.0	4.0	4.0
90	9.2	5.8	7.5	7.9	5.0	6.4	7.6	4.5	6.0	6.9	4.2	5.6	7.1	4.0	5.6
120	5.6	1.6	3.6	4.4	1.0	2.7	4.1	0.5	2.3	3.0	0.3	1.6	1.8	0.0	0.9
150	18.0	8.8	13.4	15.8	7.5	11.6	14.9	6.2	10.6	13.3	5.9	9.6	11.5	5.0	8.2
180	3.3	2.5	2.9	2.8	1.2	2.0	2.2	1.1	1.6	2.0	0.9	1.4	1.0	0.5	0.8
210	6.9	4.4	5.6	5.9	3.8	4.8	4.4	3.1	3.8	4.2	2.8	3.5	4.5	1.9	3.2
240	0.0	1.8	0.9	—	1.6	1.6	—	1.2	1.2	—	1.0	1.0	—	0.0	0.0
270	1.5	2.6	2.0	1.0	2.4	1.7	0.0	2.0	1.0	—	1.8	1.8	—	0.0	0.0
300	3.9	7.0	5.4	3.1	6.8	5.0	2.5	5.2	3.8	2.0	4.8	3.4	0.8	3.1	2.0
330	1.0	0.0	0.5	1.0	0.0	0.5	—	0.0	0.0	—	0.0	0.0	—	—	—

*
* * *

Nella Tabella III si trovano i valori della Tabella II corretti però per gli errori prodotti dalla diffusione che la luce della corona subisce attraverso l'atmosfera terrestre ed il sistema obiettivo filtro. Le lastre gialle sono esenti da tale errore come si rileva subito dall'esame delle misure eseguite sul disco della luna le quali danno valori uguali al fondo non impressionato delle lastre stesse. Ne sono invece affette le lastre ottenute con il filtro graduale 48a e per tale ragione si è misurata l'intensità della luce diffusa sul disco della Luna secondo i diametri nelle direzioni equidistanti anzidette.

Il metodo usato per la correzione di questa luce diffusa è quello seguito nel lavoro suddetto nel quale si suppone che la forma esponenziale sia la più adatta a rappresentare il fenomeno della diffusione. Detta $f(\rho)$ la funzione elementare della diffusione si ha:

$$f(\rho) = Ae^{-a\rho}$$

dove A ed a sono costanti relative alla quantità e qualità del mezzo.

Siccome qui interessava conoscere l'andamento dell'intensità vera nelle immediate vicinanze del lembo solare il processo del calcolo è stato opportunamente modificato. Lo spessore degli anelli concentrici è stato assunto di 1' soltanto, e la costante A che si calcola per mezzo dell'intensità S_e rilevata nel centro del disco lunare mediante la formula:

$$S_e = A \sum J e^{-aR} \Delta F^{(1)}$$

(1) Per tutte le notazioni e formule che uso vedere loc. cit., pag. 186 e segg.

fu ottenuta prendendo in considerazione i primi tre anelli e procedendo per successive approssimazioni. I valori di A ricavati nelle approssimazioni successive portarono ad altrettanti valori di δ ottenuti mediante la formula:

$$\delta = 1 - A \sum e^{-a_0 \Delta F}.$$

Le costanti che hanno servito alla riduzione delle due lastre sono riportate qui sotto:

	1 v	2 v
S_0	4.90	3.80
A	$1,342 \times 10^{-3}$	$1,278 \times 10^{-3}$
δ	0,6812	0,6964

Per ambedue le lastre la costante a è stata assunta uguale a 0,16 valore dato dalle esperienze di laboratorio per il vapor d'acqua, che accorda molto bene con i calcoli di RIGHINI.

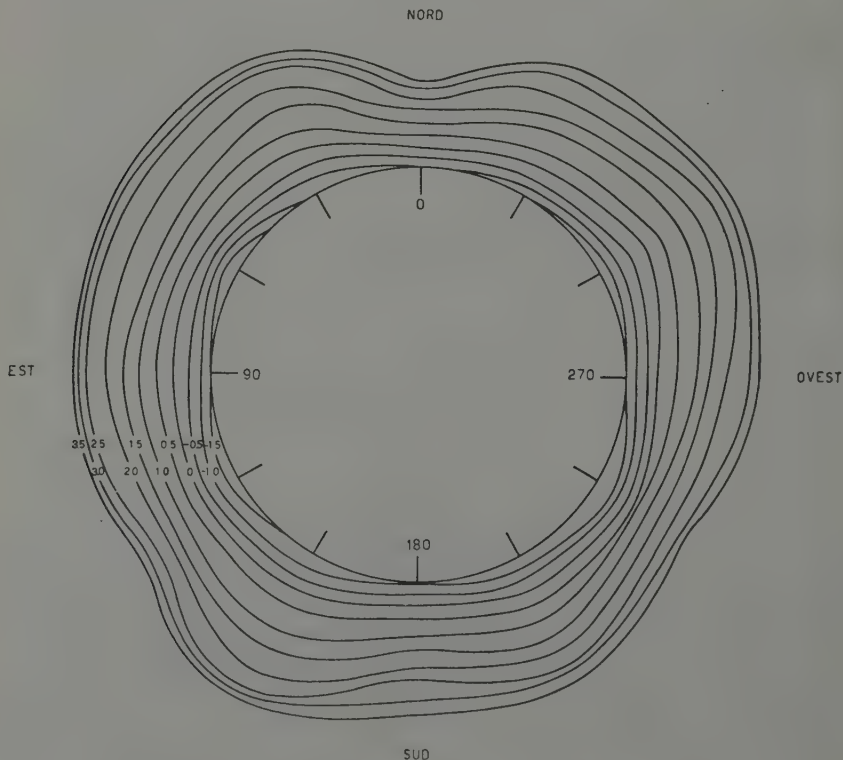


Fig. 1. - Isofote medie della corona (5500 Å).

* * *

L'accordo fra le intensità ricavate da lastre dello stesso colore è buono, forse anche qui migliore per le lastre gialle che per le violette. Le curve che rappresentano l'intensità della corona come funzione della distanza mostrano un decremento d'intensità col crescere della distanza dal bordo

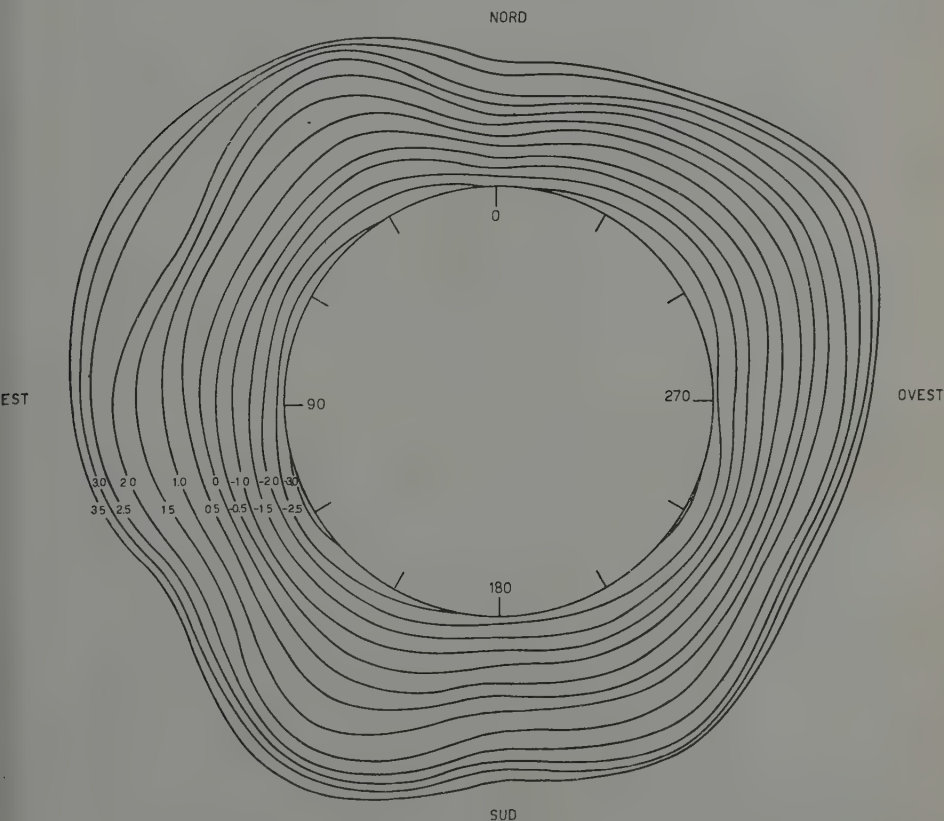


Fig. 2. — Isofote medie della corona (4500 Å).

del Sole, il decremento è molto rapido vicino al bordo specialmente per le corte lunghezze d'onda. La curva si spiana lentamente verso la corona media. Sui dati delle Tabelle I e III sono state costruite le isofote riportate nelle figure 1 e 2, corrispondenti a intensità decrescenti in progressione geometrica con ragione 1.58, ossia di mezza in mezza grandezza, avendo assunto per ambedue le radiazioni, come grandezza zero quella

corrispondente ad una intensità pari a 28.5, per poter paragonare i miei risultati direttamente con quelli già ottenuti da G. RIGHINI.

* * *

La distribuzione dell'intensità nelle varie parti della corona risulta pienamente confermata dalla nuova serie di misure poichè la corona intermedia presenta diminuzione più lenta di intensità verso l'esterno alle latitudini:

$$\varphi = +45^{\circ} \text{ E} \quad -60^{\circ} \text{ E} \quad -60^{\circ} \text{ W} \quad +30^{\circ} \text{ W}$$

specialmente nella radiazione blu violetta. Come è stato già notato a tali latitudini corrispondono gruppi di protuberanze visibili sulle lastre stesse. La presenza di questi gruppi di protuberanze dà luogo quindi ai pennacchi coronali per cui la corona risulta del tipo intermedio verso quello di massimo.

Interessanti sono i risultati che si possono trarre da queste misure sulla distribuzione della intensità della corona interna la quale è notevolmente diversa da quella della corona intermedia. In corrispondenza dei poli si ripetono nella corona interna i minimi di intensità assai accentuati specialmente al polo nord. In più qui si nota all'equatore diminuzione dell'intensità della corona rispetto all'intensità media, specialmente al lato ovest mentre al lato est il minimo risulta meno intenso. Alle rimanenti latitudini la luminosità della corona interna non offre variazioni notevoli e presenta un massimo abbastanza costante e piatto alla latitudine di circa 40° .

Il seguente prospetto nel quale riportiamo insieme alle latitudini, la distanza dal bordo solare espressa in primi e decimi di primo, alla quale si trova l'isofota corrispondente alla grandezza zero per la radiazione gialla, e l'isofota corrispondente alla grandezza -2 per la radiazione violetta, mette chiaramente in rilievo quanto abbiamo sopra notato.

	Distanza dal lembo del Sole della isofota gr. 0 (5500 Å)		Distanza dal lembo del Sole della isofota gr. -2 (4500 Å)	
N	1.3	Min. prin.	0	Min. prin.
+ 60 E	4.8		2.0	
+ 30 E	5.8		3.4	
E	5.7	Min. Sec.	2.6	Min. Sec.
- 30 E	6.3		4.3	
- 60 E	6.1		3.6	
S	3.2	Min. prin.	1.0	Min. prin.
- 60 W	5.5		2.1	
- 30 W	5.3		3.1	
W	3.2	Min. sec.	0.7	Min. sec.
+ 30 W	5.3		2.8	
+ 60 W	2.8		1.4	

Nel 1936, quando furono prese le presenti lastre le due zone di protuberanze si presentavano ⁽¹⁾ ad alta latitudine a $\pm 57^\circ$, a bassa latitudine a $\pm 25^\circ$, quindi si può considerare che da $\pm 20^\circ$ a $\pm 60^\circ$ si trovassero le zone più disturbate dalle eruzioni ad alto livello cromosferico; anche verso i minimi di attività solare le zone perturbate dalle protuberanze ad alta e bassa latitudine non cambiano molto, essendo distribuite fra 20° e 50° , cioè in media a circa $\pm 35^\circ$, valore molto vicino a quello del massimo. Si può quindi dire che la regione più perturbata del sole per la presenza del fenomeno delle protuberanze corrisponda alla latitudine di circa $\pm 40^\circ$ mentre sia ai poli che all'equatore, come si sa, non si presentano quasi mai fenomeni di perturbazione sia nella fotosfera, sia nella cromosfera. Il risultato delle nostre misure può quindi stare ad indicare, in accordo con l'ipotesi accennata da BERGSTRAND e sviluppata e confermata da ABETTI ⁽²⁾, che la distribuzione dell'intensità nella corona interna dovrebbe essere pressochè costante e stabile durante tutte le fasi del ciclo, senza notevoli perturbazioni dipendenti da perturbazioni locali e momentanee che invece hanno molta influenza sulla corona esterna con la produzione di pennacchi coronali. Questi seguendo da vicino la migrazione delle protuberanze danno luogo alla forma caratteristica della corona nelle diverse fasi del ciclo.

*
* * *

Raccolti nella Tabella IV riportiamo gli indici di colore $m_p - m_q$ calcolati in centesimi di grandezze di $0'.5$ in $0'.5$. L'indice di colore risulta sempre negativo, tuttavia bisogna tener presente che grandezze numericamente uguali differiscono per le due radiazioni di una costante. Per avere un'idea della precisione di ogni determinazione di tale indice di colore ho calcolato, nelle 12 direzioni radiali equidistanti, l'errore medio per i punti distanti $1'$ dal lembo solare, tenendo conto indipendentemente dei risultati ottenuti dalle 2 coppie di lastre. In media tale errore risulta inferiore a ± 0.1 gr. variando fra un minimo 0 e un massimo ± 0.2 . Si deve anche osservare che esclusi i punti distanti $0'.5$ dal lembo e quelli molto esterni per i quali le misure di densità fotografica sono più difficili, gli altri punti sono stati tutti misurati in condizioni di visibilità più favorevoli. Sui dati, di questa tabella, per ciascuna delle dodici direzioni radiali, sono state tracciate le curve che rappresentano l'andamento dell'indice di colore in funzione della distanza dal bordo solare. Queste curve complessivamente mettono in rilievo un andamento decrescente in valore

⁽¹⁾ V. BAROCAS, *Prominences and the sunspot cycle*. Ap. J., vol. 89 n. 4, 1939.

⁽²⁾ G. ABETTI, *Sulla forma della corona*. « Osser. e Mem. del R. Osser. Astr. di Arcetri », fasc. 56, 1938 e « Mem. Soc. Astr. It. », vol. XI, p. 161, 1938.

TABELLA IV.

	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°
0.5	- 1.43	- 1.28	- 0.85	- 1.37	- 1.22	- 1.32	- 1.22	- 1.02	- 1.17	- 1.20	- 1.22	- 1.39
1.0	- 1.47	- 1.36	- 0.86	- 1.32	- 1.22	- 1.27	- 1.36	- 1.07	- 1.06	- 1.45	- 1.33	- 1.59
1.5	- 1.47	- 1.43	- 0.99	- 1.39	- 1.25	- 1.32	- 1.40	- 1.16	- 1.17	- 1.46	- 1.43	- 1.55
2.0	- 1.24	- 1.44	- 1.20	- 1.37	- 1.33	- 1.35	- 1.41	- 1.27	- 1.22	- 1.43	- 1.48	- 1.55
2.5	- 1.32	- 1.49	- 1.21	- 1.26	- 1.34	- 1.36	- 1.44	- 1.28	- 1.26	- 1.52	- 1.49	- 1.55
3.0	- 1.23	- 1.49	- 1.35	- 1.28	- 1.39	- 1.41	- 1.40	- 1.23	- 1.29	- 1.41	- 1.42	- 1.50
3.5	- 1.20	- 1.50	- 1.24	- 1.31	- 1.38	- 1.38	- 1.40	- 1.22	- 1.32	- 1.37	- 1.42	- 1.42
4.0	- 1.00	- 1.51	- 1.29	- 1.25	- 1.38	- 1.40	- 1.37	- 1.20	- 1.39	- 1.36	- 1.39	- 1.40
4.5	- 1.05	- 1.48	- 1.26	- 1.26	- 1.34	- 1.41	- 1.34	- 1.20	- 1.30	- 1.29	- 1.49	- 1.32
5.0	- 0.75	- 1.42	- 1.27	- 1.24	- 1.32	- 1.36	- 1.28	- 1.12	- 1.35	- 1.25	- 1.42	- 1.28
5.5	- 0.94	- 1.49	- 1.26	- 1.25	- 1.19	- 1.39	- 1.20	- 1.16	- 1.20	- 1.30	- 1.36	- 1.20
6.0	- 0.50	- 1.37	- 1.25	- 1.24	- 1.10	- 1.32	- 1.21	- 1.20	- 1.21	- 1.30	- 1.24	- 1.13
6.5	- 0.30	- 1.20	- 1.20	- 1.12	- 1.13	- 1.32	- 1.25	- 1.15	- 1.05	- 1.26	- 1.12	- 0.90
7.0	- 0.00	- 1.22	- 1.20	- 1.20	- 1.08	- 1.26	- 1.07	- 1.04	- 0.90	- 1.29	- 1.12	- 0.97
7.5	- 0.50	- 1.29	- 1.16	- 1.13	- 1.24	- 1.21	- 1.33	- 1.12	- 0.80	- 1.25	- 1.15	- 0.86
8.0		- 1.16	- 1.03	- 1.14	- 1.05	- 1.27	- 1.15	- 1.07	- 0.80	- 0.87	- 1.18	- 1.00
8.5		- 1.16	- 1.01	- 1.16	- 0.86	- 1.25	- 1.12	- 1.10		- 0.90	- 1.11	- 0.49
9.0		- 1.26	- 0.89	- 1.26	- 0.85	- 1.27	- 1.00	- 1.21		- 0.90	- 1.05	- 0.45
9.5		- 1.17	- 0.70	- 1.23	- 0.85	- 1.28		- 1.25		- 0.60	- 1.00	- 0.15
10.0		- 1.03	- 0.76	- 1.57	- 0.75	- 1.36		- 1.26			- 1.05	

assoluto dell'indice di colore con l'allontanamento dal bordo, però tre manifestano un andamento dell'indice di colore quasi costante. Se si mettono in relazione le curve ottenute con la distribuzione delle protuberanze e dei pennacchi coronali disegnati per l'eclisse del 19 giugno 1936 da L. TAF-FARA (1) si vede che le nostre tre direzioni 90° , 150° , 210° coincidono con i pennacchi 4, 5, 7 che sono i tre casi in cui il pennacchio è normale alla superficie del sole e ben centrato sull'asse della protuberanza. Oltre al fatto già messo in rilievo da RIGHINI e da altri, che la parte interna della corona sarebbe la più violetta, si sarebbe indotti a credere che nelle parti direttamente perturbate della corona continuerebbe anche a notevole distanza dal lembo lo stato di eccitazione proprio della parte interna,

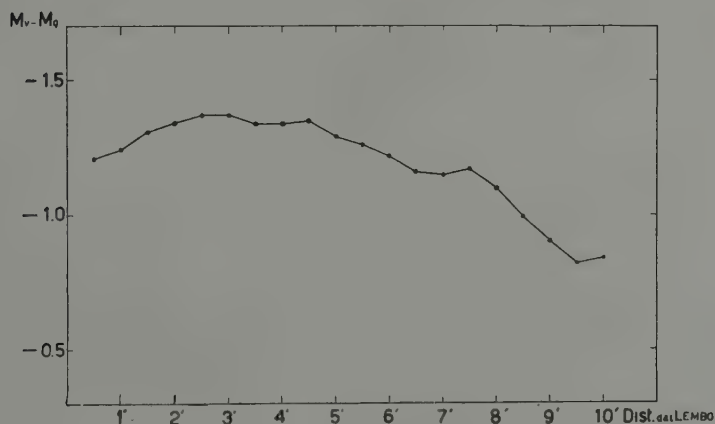


Fig. 3. - Indice di colore della corona in funzione della distanza dal lembo.

rimanendo la colorazione più violetta. Tenendo conto che nelle altre direzioni i pennacchi se esistono non sono centrati rispetto alle protuberanze, essendo forse involuppi di protuberanze già tramontate o sul disco, e perciò in condizioni di prospettiva a noi ignote, dalla Tabella IV si vede che anche in quelle si ha un andamento che convalida l'ipotesi fatta della diminuzione più o meno rapida dell'indice di colore in valore assoluto. La direzione nord per esempio che appare del tutto tranquilla mostra un indice di colore che si sposta rapidamente verso il rosso.

Diamo qui soltanto la curva (fig. 3) tracciata integrando i valori dell'indice di colore per ciascun anello della corona, che mostra una complessiva diminuzione dell'indice di colore in valore assoluto, la quale,

(1) Loc. cit., fig. 46.

come è stato notato anche da COHN ⁽¹⁾, può indicare differenti condizioni di radiazione, temperatura e luminosità nelle varie regioni della corona. Il diagramma della fig. 3 si accorda completamente con i risultati ottenuti da RIGHINI se si eccettua il valore — 1.81 che riguarda la parte più interna della corona per lo studio della quale è stata fatta appunto la serie di misure di cui si dà conto nella presente Nota.

* * *

Come è noto, recentemente è stato trovato da LYOT il modo di osservare la corona solare anche al di fuori delle eclissi. Nelle ricerche da lui eseguite al Pic du Midi ⁽²⁾, egli ha potuto così eseguire misure sulla distribuzione intorno al bordo solare della intensità di alcune righe di emissione. Nel luglio e nell'agosto 1931 la riga 5303 A presentava un massimo di intensità vicino all'equatore a latitudini sempre minori di 30°, mentre la riga 6574 A mostrava una distribuzione più uniforme. Nel 1934 il massimo di intensità della 5303 A era spostato verso più alte latitudini (38° circa) ed all'equatore questa riga era spesso invisibile. Per la riga rossa nella stessa epoca si aveva invece, una ripartizione più uniforme con un massimo largo e piatto che occupava anche punti, in cui la riga verde non si vedeva. Nel 1935 LYOT studiò la riga infrarossa 7892 A che fotografata il 27 settembre presentava una ripartizione molto regolare con quattro massimi presso a poco uguali a circa 25° di latitudine ⁽³⁾. Similmente WALDMEIER ⁽³⁾ dal gennaio all'aprile 1939 ha eseguito ad Arosa, mediante un coronografo LYOT munito di spettroscopio, una serie di misure sulla riga 5303 A della corona. In base ai risultati ottenuti egli deduce che le apparenze della riga coronale verde sono più strettamente legate al ciclo delle macchie solari, che alle protuberanze; la latitudine media da lui trovata per il massimo di intensità della riga verde coincide entro un grado con la latitudine media (13°.5) che compete alle macchie alle date di osservazione. Ai poli del sole si trovano due zone estese parecchi gradi che non mostrano mai la riga verde, mentre un minimo di intensità di tale riga, sebbene poco accentuato è evidente anche all'equatore. Di più da queste osservazioni risulta che le apparenze della riga coronale verde cambiano molto da giorno a giorno, e come risulta dalla tabella II del lavoro sopra citato, i

⁽¹⁾ *Distribution of brightness in the solar corona of 1934*. A. N. Band 267, pag. 205 e sg.

⁽²⁾ *Le spectre de la couronne solaire en 1935*. « Comptes rendus », 201, pag. 219.

⁽³⁾ *La couronne solaire en 1934*. « C. R. », 202, pag. 1259.

⁽³⁾ *Untersuchungen an der grünen Koronalinie 5303 A*. « Zeitschrift f. Astrophysik », 19 Band, 1 Heft.

massimi di intensità della 5303 Å raggiungono in qualche giorno anche latitudini abbastanza elevate.

Sebbene la distribuzione dell'intensità delle righe di emissione sia in generale diversa dalle isofote della corona solare fotografata durante le eclissi, e le misure sulle righe di emissione fatte fino ad ora siano poche, si è cercato in qualche modo di metterle in relazione con le isofote della corona determinate durante le eclissi. Infatti le isofote del 19 giugno 1936 che qui riportiamo si riferiscono alla corona interna, ed esse, per la distanza dal lembo solare inferiore ad 1', sarebbero direttamente paragonabili con le osservazioni di LYOT, e di WALDMEIER. Le nostre fotografie eseguite a 4500 Å e 5500 Å danno, come si è detto, un massimo di intensità a latitudini piuttosto alte cioè a circa $\pm 40^\circ$, risultato simile a quello che LYOT nel 1934 trovò per la riga verde 5303 Å. D'altra parte mentre le osservazioni di LYOT mostrerebbero per questa stessa riga dal 1931 al 1934 una variazione della latitudine della massima intensità che segue l'andamento della corona esterna e concorda con il ciclo, le misure di WALDMEIER, eseguite solo un anno e mezzo circa dopo il massimo di attività solare, presentano invece latitudini basse in relazione alle note variazioni undecennali. Tuttavia è da notare che se ulteriori osservazioni del tipo, di quelle di LYOT e WALDMEIER, confermeranno i massimi di intensità trovati nel 1934 dal primo di questi investigatori, non si potrà parlare di una stretta dipendenza della eccitazione di questa riga dalla zona delle macchie ⁽¹⁾ perchè le macchie non raggiungono di regola quelle elevate latitudini ($\pm 38^\circ$ circa), ma si dovrà confermare piuttosto la dipendenza della intensità e forma della corona dalle zone di protuberanze.

(¹) WALDMEIER, loc. cit., pag. 33.

Fisica. — *Variazioni del potere riflettente del Ni al variare della temperatura.* Nota di FRANCESCO CENNAMO, presentata ⁽¹⁾ da ANTONIO CARRELLI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia. •

Partendo dalla teoria elettromagnetica della luce di MAXWELL, HAGENS e RUBENS ⁽²⁾ hanno dimostrato che il potere riflettente R dei metalli è funzione della resistenza specifica ρ e della lunghezza d'onda secondo la formula:

$$R = 1 - 0,365 \sqrt{\frac{\rho}{\lambda}}.$$

La formula precedente comporterebbe, per λ costante, una diminuzione del potere riflettente col crescere della temperatura per il variare di ρ con T e, mantenendo la temperatura costante, un aumento di R all'aumentare della lunghezza d'onda.

Tale comportamento è in accordo con i dati sperimentali per le grandi lunghezze d'onda ⁽³⁾, ma in disaccordo con l'esperienza per le piccole lunghezze d'onda e, in particolare, nello spettro visibile.

In lavori precedenti ⁽⁴⁾, in cui si è proceduti ad una verifica della legge di WIEN per il Nichel, entro uno stesso campo termico, si sono riscontrate deviazioni regolari in base alle quali si giunge alla conclusione che $\frac{\partial \log a_{\lambda T}}{\partial \log \lambda}$ è una funzione della temperatura.

In base a tali risultati si è potuto procedere nel lavoro citato alla determinazione dell'andamento del potere riflettente del Nichel per varie temperature.

In questo lavoro procediamo invece alla verifica sperimentale diretta dell'andamento di $R_{\lambda T}$ per varie λ al variare della temperatura, determinando le isocromate del Nichel nell'intervallo termico 600°-1200° K e per le lunghezze d'onda comprese tra 1,5 μ e 5,5 μ : In questo intervallo

⁽¹⁾ Nell'Adunanza del 18 novembre 1939-XVIII.

⁽²⁾ HAGENS e RUBENS, « Annalen der Physik » 11, 1903, pag. 873.

⁽³⁾ HAGENS e RUBENS, loc. cit., e « Phys. Zts. », 11, 1910, pag. 139.

⁽⁴⁾ F. CENNAMO, *Sull'emissione spettrale del Nichel*, « Nuovo Cimento ».

sono state riscontrate da altri autori variazioni della legge di HAGENS e RUBENS per il potere riflettente ⁽¹⁾.

Il dispositivo sperimentale da noi adoperato è lo stesso di quello descritto nei lavori precedenti: le isocromate venivano ricavate dalle isocromate ottenute nel lavoro precedente per la verifica della legge di WIEN,

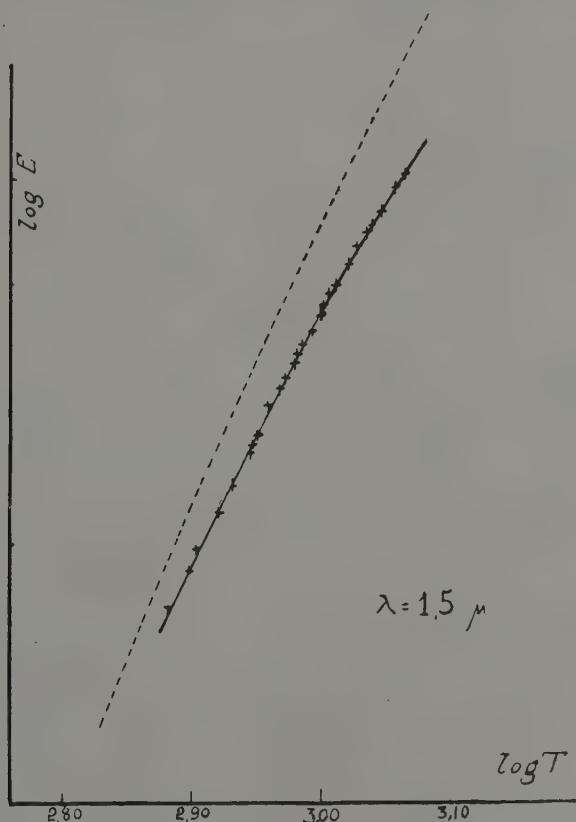


Fig. 1a.

misurando in corrispondenza della lunghezza d'onda, le ordinate delle curve rappresentanti la distribuzione spettrale dell'energia, ordinate che risultano evidentemente proporzionali ai rispettivi poteri emissivi.

⁽¹⁾ La legge di HAGENS e RUBENS è stata verificata per il Ni dal LOWE, (« Annalen der Physik », 25, 1936, pag. 213) con raggi restanti per le seguenti λ : $6,7 \mu$; $8,7 \mu$; 24μ e cioè per grandi lunghezze d'onda. Per lo studio dell'emissione

Per arricchire di punti le varie isocromate e nello stesso tempo per poter verificare i dati ottenuti con il su esposto procedimento, girando opportunamente il prisma di Salgemma, si faceva cadere sulla fenditura della termopila dello spettrografo la radiazione relativa alla lunghezza d'onda in esame; facendo variare la temperatura della laminetta di Nichel ad ogni temperatura si leggeva al galvanometro la corrispondente deviazione.

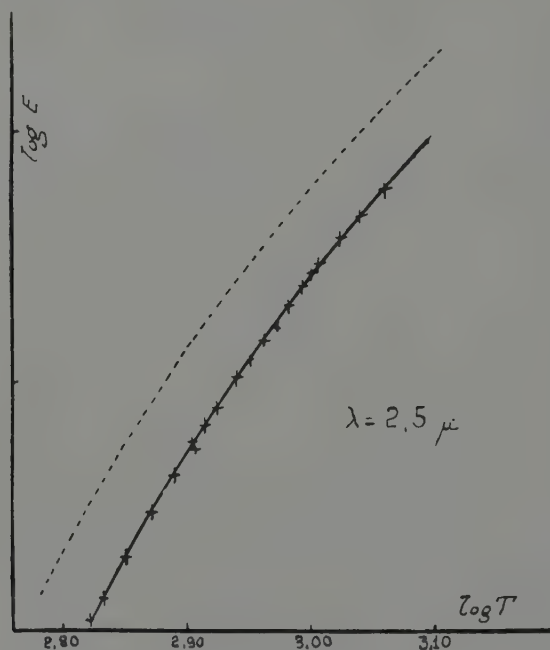


Fig. 1 b.

Si riportano nella fig. 1 le isocromate del Nichel per le lunghezze d'onda $\lambda = 1,5 \mu$; $2,5 \mu$; $3,5 \mu$; $4,5 \mu$; in cui sull'esame delle ascisse sono riportate i $\log T$ e sull'asse delle ordinate i $\log e_{\lambda T}$, in scala arbitraria, non avendo noi fatto misure assolute.

delle lunghezze d'onda più piccole egli frappone fra la lamina di Ni ed il radiometro una lastrina di quarzo che è opaco per le lunghezze d'onda maggiori di $4,5 \mu$. Tale procedimento però evidentemente dà solo l'andamento complessivo del poter riflettente del Ni per tutte le lunghezze d'onda $< 4,5 \mu$ e per le $\lambda > 20 \mu$ essendo il quarzo oltre questa zona completamente trasparente.

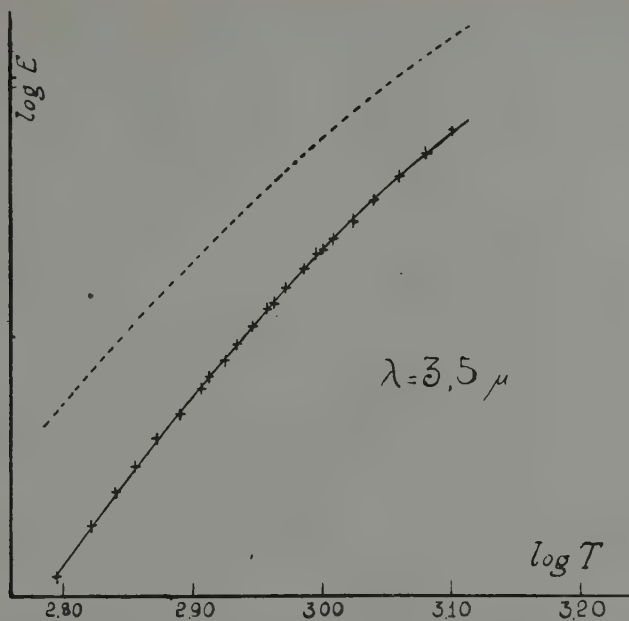


Fig. 1 c.

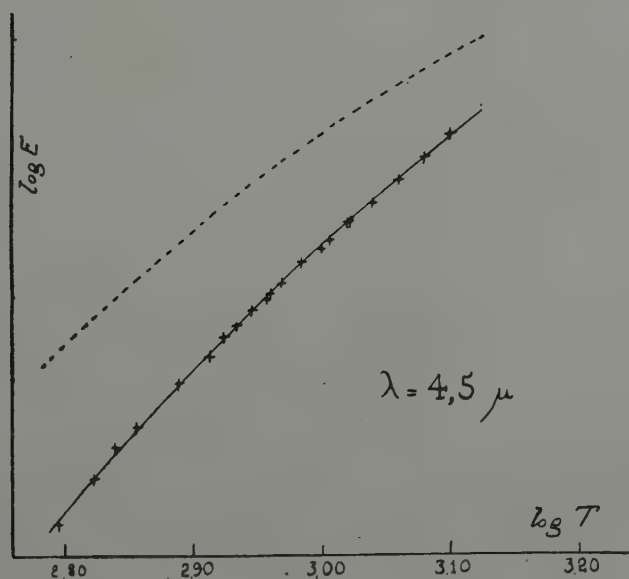


Fig. 1 d.

Dette isocromate sono tutte limitate inferiormente da temperature superiori a quella corrispondente al punto di CURIE, poichè, date le nostre condizioni sperimentali, non avevamo una sensibilità tale da poter indagare a temperature più basse, sicchè non si è in grado di verificare se, per queste lunghezze d'onda, ci siano variazioni del potere riflettente in dipendenza delle condizioni ferromagnetiche o paramagnetiche del Nichel.

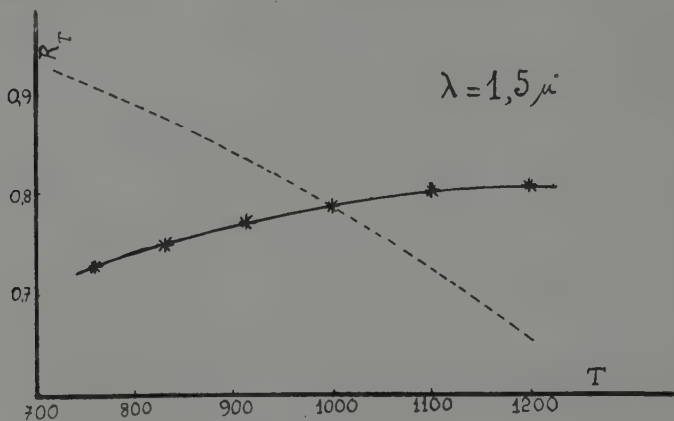


Fig. 2 a.

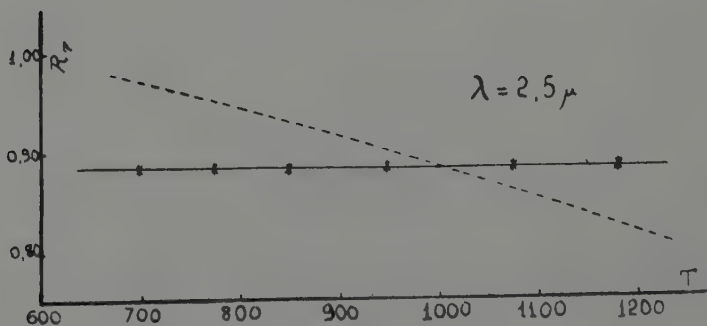


Fig. 2 b.

Le curve tratteggiate danno inoltre l'andamento delle corrispondenti isocromate del corpo nero ⁽¹⁾.

Dalle curve si può, a meno di una costante, calcolare l'andamento in funzione della temperatura del potere assorbente $a_{\lambda T}$ e quindi di

⁽¹⁾ *International Critical Tables*, volume 5, pag. 238.

$R_{\lambda T} = 1 - a_{\lambda T}$ per le quattro lunghezze d'onda in esame, dal rapporto delle $e_{\lambda T}$ relative al Nichel e delle $E_{\lambda T}$ relative al corpo nero.

Confrontando (Vedi fig. 1 b) per $\lambda = 2,5 \mu$ l'isocromata relativa al Nichel con quella relativa al corpo nero, risulta chiaramente che l'andamento del potere emissivo del Nichel è analogo a quello del corpo nero

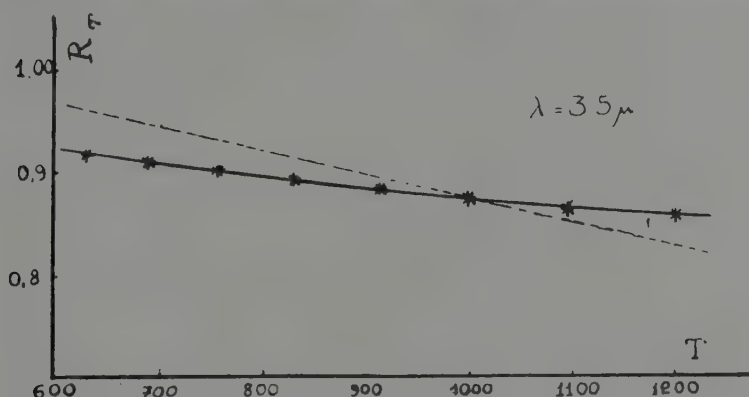


Fig. 2 c.

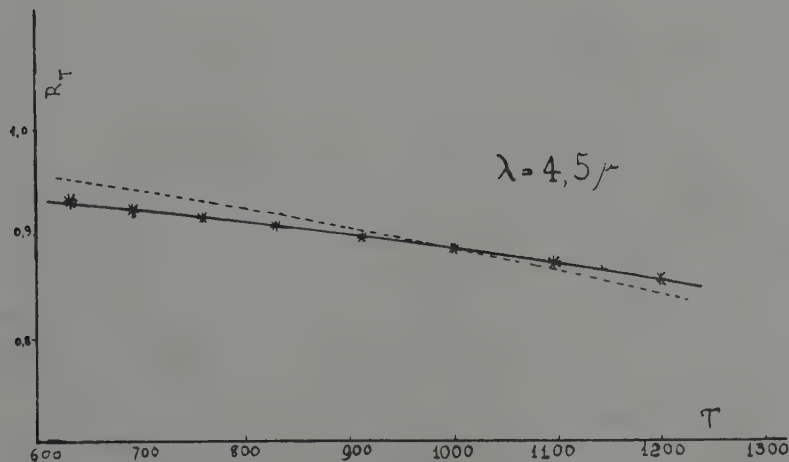


Fig. 2 d.

e cioè si ha senz'altro che per questa lunghezza d'onda il potere assorbente e quindi il potere riflettente $R_{\lambda T}$ del Nichel è indipendente dalla temperatura.

Ciò non si verifica invece per le altre lunghezze d'onda studiate.

Nella fig. 2; sono riportate, a meno di una costante, i poteri riflettenti del Nichel per le lunghezze d'onda $\lambda = 1,5 \mu$; $2,5 \mu$; $3,5 \mu$; $4,5 \mu$,

ricavati dalle curve precedenti; gli andamenti del potere riflettente del Nichel così come sono previsti dalla formula di HUGENS e RUBENS sono riportati con curve a tratteggio e si è fatto in modo che la curva teorica e la sperimentale avesse lo stesso valore per $T = 1000^\circ K$.

Nel calcolo di $R_{\lambda T}$ della formula di HAGENS e RUBENS i valori per la resistenza del Nichel sono stati presi dai lavori di DEL REGNO ⁽¹⁾ e del SUYDAM ⁽²⁾. I valori sperimentali ottenuti e precedentemente riportati per il potere riflettente del Nichel al variare della temperatura e per varie lunghezze d'onda sono in accordo con quelli ottenuti in base alle deviazioni della legge di WIEN, e riportati in un precedente lavoro ⁽³⁾. Come si vede dalle curve della fig. 2, contrariamente a quanto è previsto dalla formula citata di HAGENS e RUBENS per cui il potere riflettente del Ni dovrebbe diminuire con la temperatura per tutte le lunghezze d'onda si ottiene che il potere riflettente del Nichel si mantiene indipendente dalla temperatura all'incirca per $\lambda = 2,5 \mu$; cresce con la temperatura per $\lambda < 2,5 \mu$ e diminuisce con la temperatura per $\lambda > 2,5 \mu$; e tende, man mano che aumenta la lunghezza d'onda, ad avvicinarsi all'andamento previsto. In base alla moderna teoria elettronica dei metalli ⁽⁴⁾ si prevede per lo meno qualitativamente; una diminuzione di $\frac{\partial \log (1 - R_{\lambda T})}{\partial \log \lambda}$ al variare di T , la teoria però non è ancora in grado di spiegare tutte le particolarità riscontrate ⁽⁵⁾.

⁽¹⁾ DEL REGNO W, «Atti della Reale Accademia dei Lincei» 9, 989, 1930.

⁽²⁾ SUYDAM, «Physical Review» 34, 785, 1929.

⁽³⁾ F. CENNAMO, *Variazioni del potere assorbente del Ni colla temperatura*.

⁽⁴⁾ A. CARRELLI, *Sulle proprietà ottiche dei metalli*. «Atti della R. Acc. Lincei». In public.

⁽⁵⁾ WENIGER e PFUND («Phys. Rev.», 14, 1919, pag. 431) hanno trovato che il potere riflettente del Tungsteno aumenta con la temperatura per piccole lunghezze d'onda; è all'incirca stazionario per $\lambda = 1,3 \mu$, e per $\lambda > 1,3 \mu$, diminuisce con la temperatura, e cioè hanno ottenuto risultati perfettamente analoghi a quelli precedentemente ripartiti.

Chimica (Chimica-fisica). — *Ricerche sopra una particolare attivazione dei liquidi*. — I. *Determinazioni di costante dielettrica* ⁽¹⁾. Nota di GIORGIO PICCARDI e ULISSE TESEI, presentata ⁽²⁾ da LUIGI ROLLA, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Fra le grandezze, da prendere in considerazione per lo studio del nuovo fenomeno, ve n'è una che presenta un particolare interesse: la costante dielettrica. In che cosa consista il nuovo fenomeno e quali siano i suoi effetti chimico-fisici e biologici, è già stato detto più volte ⁽³⁾ e non ritorneremo ora sull'argomento. Vogliamo soltanto far notare che, se all'inizio delle ricerche, si poteva sperare un valido aiuto dallo studio di certe caratteristiche fisiche dei liquidi, sottoposti all'azione dei dielettrici polarizzati, oggi, questa speranza si è un poco dileguata, sia perchè il nuovo fenomeno non dipende, evidentemente, soltanto dalle azioni da noi provocate, sia perchè gli effetti biologici, che appaiono imponentissimi ⁽⁴⁾, sono assolutamente sproporzionati alla modestia delle variazioni che si riscontrano nelle caratteristiche fisiche. In ogni modo, crediamo non inutile, oggi, mostrare come i nuovi fenomeni si manifestino, modificando il valore della costante dielettrica di un liquido, ed in quale misura.

Il liquido, sul quale abbiamo preferito operare, per evidenti ragioni di comodità, è il nitrobenzolo. La sua stabilità dal punto di vista chimico è ottima (non scioglie e non attacca praticamente il vetro), possiede un alto momento dipolare ed una costante dielettrica di medio valore, cosa,

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica-fisica della R. Università di Genova.

⁽²⁾ Nell'Adunanza del 18 novembre 1939-XVIII.

⁽³⁾ G. PICCARDI, «Atti del III Congresso di Radiobiologia», Bologna, 1937; «Gazzetta Chim. It.», 68, 246 (1938); G. PICCARDI e M. L. CORSI, «Gazzetta Chim. It.», 68, 287 (1938); G. PICCARDI, M. L. CORSI e E. FABRINI, «Gazzetta Chim. It.», 68, 471 (1938); G. PICCARDI, «Atti del X Congresso Int. di Chimica», Roma, 1938, vol. II, pag. 426; ID., questi «Rendiconti» (6), 29, 84 (1939); ID., «La Chimica e l'Industria», 21, 455 (1939); G. PICCARDI e E. BOTTI, «Gazzetta Chim. It.», 69, 609 (1939); G. PICCARDI, «La Ricerca scientifica», 10, 813 (1939); ID., «Gazzetta Chim. It.», 69, 722 (1939).

⁽⁴⁾ A. MESSERI, «Atti del III Congresso di Radiobiologia», Bologna, 1937, F. GIOELLI, «Atti Acc. Scienze Ferrara», 1938; B. FERRANTI, A. MINELLI e G. SAVONUZZI, *Scritti it. di Radiobiologia Medica*, vol. 5^o, fasc. 4^o, 1938.

quest'ultima, che permette di usare, per le misure, celle di non grandi dimensioni e quindi di operare su modeste quantità di liquido.

Per una misura della costante dielettrica, abbiamo seguito il metodo dei battimenti, ⁽¹⁾ utilizzando un apparecchio della casa Splindler e Hoyer G. m. b. H. di Gottinga, munito di un condensatore di precisione di 1.500 mmF, n. 222, della General Electrical Company. Apparecchio e condensatore ci sono stati gentilmente favoriti dal prof. OCCHIALINI, dell'Istituto di Fisica della nostra Università, che qui vivissimamente ringraziamo.

La cella di misura, fatta costruire appositamente da noi, altro non è che una pipetta, nel cui rigonfiamento alloggiano due elettrodi di platino. Essa è munita di rubinetto di chiusura, nella parte superiore. Il riempimento si effettua per aspirazione.

Il nitrobenzolo, usato da noi, è quello purissimo di Erba.

L'attivazione è stata indotta, sul nitrobenzolo, mediante dei bulbi a mercurio; abbiamo escluso l'uso delle bottiglie di Leida ⁽²⁾, per timore, che le azioni chimiche, dovute a tracce di ozono, formatesi durante la carica, potessero falsare i risultati.

Poichè le nostre ricerche sono sempre di carattere comparativo e mirano a stabilire in che cosa, e di quanto, un liquido attivato differisca da un liquido normale, era necessario trattare il nitrobenzolo in via di attivazione e quello di controllo, in modo assolutamente identico. Piccole variazioni della costante dielettrica si riscontrano, infatti, quando si agiti o si sgoccioli il nitrobenzolo, o vi si faccia gorgogliare dell'aria, come abbiamo constatato prima di effettuare le nostre ricerche.

Allo scopo di mantenere il nitrobenzolo di controllo nelle stesse condizioni generali di quello attivato, abbiamo costruito un dispositivo meccanico, che permette di ruotare solidalmente due bulbi di vetro pirex, perfettamente uguali, uno vuoto ed uno contenente una grossa goccia di mercurio, entro due capsule emisferiche di porcellana. Nelle capsule si versano volumi uguali di nitrobenzolo. La figura qui unita da un'idea di questo semplice dispositivo. Il sistema dei bulbi, mosso da un motorino elettrico, munito di demoltiplicatori, ruota alla velocità di 34 giri al minuto primo ⁽³⁾.

Il liquido di controllo, bagna il bulbo vuoto ruotante, e viene, di conseguenza, agitato ed aereato; il liquido da attivare, bagna il bulbo contenente la goccia di mercurio, che è identico all'altro ed identicamente ruotante, agitandosi ed aereandosi all'istesso modo, ma subisce in più l'azione

⁽¹⁾ Secondo K. L. WOLF, « ZS f. phys. Chemie » (B), 2, 39 (1929).

⁽²⁾ G. PICCARDI, Questi « Rendiconti » (6), 29, 84 (1939).

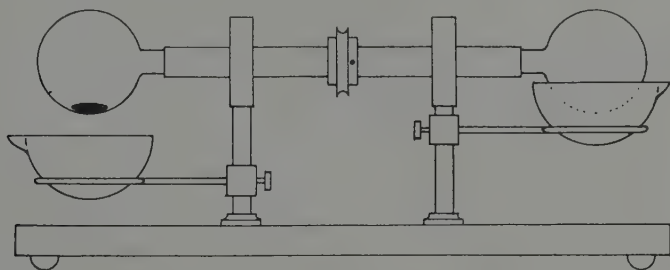
⁽³⁾ I bulbi sono stati costruiti appositamente per noi, seguendo particolari accorgimenti, dalla Ditta BDC, che ce ne ha fatto dono e che qui vivamente ringraziamo.

del vetro elettrizzato (internamente) dallo sfregamento della goccia di mercurio.

Coll'adozione di questo dispositivo, noi speriamo di aver ottenuto la perfetta comparabilità dei due liquidi, per quanto riguarda il trattamento meccanico; le differenze riscontrate nelle caratteristiche dei due liquidi, dovrebbero esser, perciò, attribuibili soltanto al nuovo fenomeno.

Abbiamo mantenuto l'apparecchio in rotazione a lungo, anche per qualche ora, arrestandolo solamente di quando in quando, per effettuare misure del potere induttore dei liquidi, contenuti nelle capsule, cosa che richiede, ogni volta, pochi minuti di lavoro.

Poichè si trattava di studiare le azioni indotte dai dielettrici polarizzati, si poteva sospettare che, in qualcuna delle due capsule, potesse esistere uno stato, diremo così, di tensione interna, capace di produrre delle



perturbazioni. Noi abbiamo provveduto ad eliminare questi effetti eventuali, scambiando sovente le capsule fra di loro, attivando il nitrobenzolo nella capsula dove era stato trattato il nitrobenzolo di controllo e viceversa. Ma, anche così facendo, i fenomeni non hanno per nulla mutato il loro corso, dimostrando che queste ipotetiche tensioni o non esistevano o non avevano alcuna influenza.

I risultati ottenuti sono riportati nella seguente tabella. Nella prima colonna figura la data dell'esperienza (precisazione per noi importantissima a causa della variabilità delle azioni esercitate dai vari dispositivi nel tempo); nella seconda colonna la temperatura; nella terza i tempi di rotazione; nella quarta la capacità della cella, piena di nitrobenzolo di controllo; nella quinta la capacità della stessa cella, piena di nitrobenzolo attivato; nella sesta le differenze fra queste capacità; nella settima il tipo di attivazione.

Poichè le capacità sono proporzionali ai poteri induttori specifici, e l'entità del fenomeno appare chiaramente anche dai valori riportati, non siamo stati ad effettuare la trasformazione delle capacità in costanti dielettriche.

TABELLA.

Data	Tempe- ratura in C.	Durata della rotazione in minuti primi	Capacità della cella, in m. m. F, piena di nitrobenzolo		Diffe- renze	Tipo di attivazione
			normale	attivato		
1939						
Giugno 27	23,0	0	92,5	92,5	—	R
		60	94,9	93,1	+ 1,8	
Giugno 27	23,0	0	90,0	90,0	—	R
		30	91,3	90,3	+ 1,0	
		120	91,3	90,7	+ 0,6	
		180	91,9	90,7	+ 1,2	
		420	91,9	90,7	+ 1,2	
Giugno 28	23,5	0	92,5	92,5	—	T
		60	93,0	92,5	+ 0,5	
		150	93,0	93,0	+ 0,0	
Giugno 30	24,5	0	92,0	92,0	—	R
		30	92,5	92,0	+ 0,5	
		60	95,0	93,5	+ 1,5	
Luglio 8	25,5	0	90,0	90,0	—	T
		50	90,5	90,0	+ 0,5	
Luglio 10	25,0	0	92,0	92,0	—	T
		60	93,0	93,0	0,0	
		120	93,5	93,0	+ 0,5	
		300	93,5	93,0	+ 0,5	
		360	95,5	95,0	+ 0,5	
		580	95,5	95,0	+ 0,5	
Luglio 24	25,0	0	93,0	93,0	—	R
		5	93,5	93,0	+ 0,5	
		10	96,0	95,5	+ 0,5	
		20	97,0	96,0	+ 1,0	
		30	98,0	96,0	+ 2,0	
Ottobre 31	14,0	0	92,5	92,5	—	R
		15	95,3	94,0	+ 1,3	
		35	95,3	94,2	+ 1,1	
		65	95,3	94,2	+ 1,1	

Vogliamo subito far notare, che i valori iniziali della capacità, non sono sempre gli stessi. Ciò è dovuto al fatto, che noi abbiamo usato diverse partite di nitrobenzolo e che, fra una partita e l'altra, si registrano sempre delle differenze nel valore della costante dielettrica.

Il risultato delle nostre esperienze, appare chiaramente dalla tabella. Fra nitrobenzolo di controllo e nitrobenzolo attivato, si stabilisce sempre, per effetto dell'attivazione, una differenza nel potere induttore specifico. Per il nitrobenzolo attivato, questo potere induttore risulta inferiore da 0,5 a 2 per cento, a seconda dei casi. Più precisamente si può dire che, per effetto della rotazione del bulbo, e conseguente agitazione, aereazione, ecc. la costante dielettrica del nitrobenzolo di controllo aumenta notevolmente, mentre quella del nitrobenzolo attivato, aumenta assai meno. Non abbiamo riscontrato eccezione a riguardo. Le differenze osservate sono al di fuori degli errori sperimentali.

Si deve ritenere con questo, che l'attivazione faccia realmente diminuire il potere induttore specifico del nitrobenzolo ? Non è possibile, per il momento, dare una risposta esauriente, causa l'estrema complicazione dei fenomeni in istudio e la scarsa conoscenza che ne abbiamo.

Dobbiamo aggiungere ancora un'osservazione, importantissima per il nostro lavoro e cioè, che le modificazioni imposte al nitrobenzolo, in virtù del nuovo fenomeno, sono tutte di un unico senso, sia che i vari dispositivi apportassero all'acqua la modificazione T, sia che apportassero la modificazione R.

Le ricerche continuano. Quella presente non è che una prima indagine di carattere orientativo.

Mineralogia. — *I minerali degli inclusi autigeni nel basalto di Conca de Janas (Orosei) (1).* — I. *L'olivina e lo spinello cromifero.* Nota di CARLO LAURO, presentata (2) da S. E. FEDERICO MILLOSEVICH.

In una recente Nota (3), nel descrivere i noduli peridotitico-pirossenici così frequenti nei basalti di Orosei e Dorgali, mi riservai di ritornare sull'argomento, desiderando studiare in modo particolare i componenti di questi noduli e per confrontare la composizione chimica di ciascun minerale con le rispettive proprietà fisiche, e per ottenere un qualche risultato a riprova della natura autigena degli inclusi stessi. Riprova non necessaria, in quanto ciò è ormai opinione generale, ma tuttavia sempre desiderabile, tanto più che questi inclusi nella lava di Orosei e Dorgali, sono stati da altri (4) ritenuti enallogeni.

Il componente in essi predominante è l'olivina: in granuli rotondeggianti per parziale riassorbimento, che rivelano spesso ancora un abito inizialmente prismatico; quasi sempre assolutamente fresca e limpida e trasparente solo talvolta è leggermente appannata e in tal caso di colore giallo-verdastro appena marcato, mentre abitualmente è quasi incolore.

Il risultato dell'analisi chimica su materiale scelto accuratamente al microscopio binoculare, frammento per frammento, ed essiccato in stufa elettrica a 110° si è:

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia e Petrografia della R. Università di Roma.

(2) Nell'Adunanza del 18 novembre 1939-XVIII.

(3) LAURO C., *Studio geologico-petrografico delle rocce vulcaniche post-mioceniche della Sardegna*. Nota III, « Periodico di Mineralogia », 1939 X, pag. 33.

(4) AMSTUTZ A., *Les roches éruptives des environs de Dorgali et Orosei en Sardaigne*. Bulletin Suisse de Minéralogie, 1935, pag. 261.

SiO ₂	40.99	0,6825			= 0.682 × 1
TiO ₂	tr.				
Al ₂ O ₃	ass.				
Cr ₂ O ₃	tr.				
Fe ₂ O ₃	0.38	0.0024	} 0.1246	} 1.3666 = 0.683 × 2	
FeO	8.58	0.1194			
MnO	0,20	0.0028			
NiO	tr.				
CoO	ass.				
MgO	50.00	1.2401	} 1.2420		
CaO	0.11	0.0019			
		100.26				

che ben risponde alla formula



e da cui si ricava per la partecipazione della forsterite e della fayalite



Col metodo dei liquidi pesanti (Soluzione di CLERICI) e successiva determinazione della densità di questo alla bilancia di WESTPHAL, ho ottenuto per il peso specifico del minerale: p. sp. 3.347.

Per gli indici di rifrazione, misurati a mezzo della linea di Becke immergendo il materiale nella α -monobromonaftalina od in una miscela di questa con ioduro di metilene, e per la luce gialla del sodio, ho ottenuto:

$$\alpha = 1,653 \quad \beta = 1,664 \quad \gamma = 1,686$$

Al tavolino universale ho trovato per l'angolo degli assi ottici: $2V = 87^\circ$. Segno della birifrazione positivo; $\gamma - \alpha = 0,033$.

Questi risultati sulle proprietà fisiche e quelli sulla composizione chimica centesimale riescono vicendevolmente in buon accordo come si può agevolmente controllare sui diagrammi preparati da BOWEN e SCHAI-
RER ⁽¹⁾ a conclusione del loro esauriente studio sul sistema MgO—FeO—
—SiO₂ e riportati anche recentemente da DEER e WAGER ⁽²⁾ che li hanno

⁽¹⁾ BOWEN N. L., SCHAIERER J. F., *The system MgO—FeO—SiO₂*. « American Journal of Sciences », 1935-XXIX, pag. 197, serie 5^a.

⁽²⁾ DEER W. A., WAGER L. R., *Olivines from the Skaergaard intrusion Kangerdlugssuak, East Greenland*. « The American Mineralogist », 1939-XXIV, pag. 18.

completati includendovi anche i valori per la densità, e per l'angolo degli assi ottici.

Rilevo subito, ciò che a mio parere è il risultato più interessante di questa Nota, che l'olivina degli inclusi ora descritta, si differenzia, sia pure di poco, ma sempre in modo netto, da quella che costituisce i fenocristalli nelle lave basaltiche della regione, avente pure angolo degli assi ottici sensibilmente vicino ai 90° , ma che, sia a me, che all'AMSTUTZ ⁽¹⁾ è sempre risultata otticamente negativa e con valore della birifrazione uguale a 0.035.

Quest'ultima quindi appare un termine leggermente più ricco in fayalite che non quello degli inclusi, il quale evidentemente rappresenta il prodotto di una segregazione anteriore nel tempo e, come è ovvio, corrisponde ad una diversa concentrazione del magma, inizialmente più basico e più ricco in MgO.

Hanno già del resto dimostrato alcuni studiosi, ad esempio lo STARK ⁽²⁾, l'EDWARDS ⁽³⁾, che quanto più il magma è basico tanto più si ha dei termini spiccatamente forsteritici, mentre di pari passo che il magma residuo si arricchisce in FeO, si generano termini olivini sempre più ricchi in fayalite.

Che ciò debba avvenire risulta anche dagli studi di BOWEN e SCHAIERER già ricordati; e che una progressiva differenziazione in senso acido si sia verificata è manifesto anche nelle colate laviche della regione, così come ho potuto dimostrare nella mia nota precedente sui basalti di Orosei e Dorgali.

È probabile pertanto che l'olivina degli inclusi, presenti, assai più di frequente di quanto non risulti dalla letteratura, delle caratteristiche analoghe a quelle del materiale ora in esame, nei confronti del peridoto della lava in cui si trovano gli inclusi stessi; una olivina molto vicina a quella ora studiata, è stata riscontrata ad esempio dal TOMKEIEFF ⁽⁴⁾ proprio nei noduli peridotitici di un basalto di Calton Hill, Derbyshire, e per essa quell'Autore ha calcolato una partecipazione molecolare in fayalite dell'otto per cento.

Concludendo, questo termine olivinic, per le sue caratteristiche pare corrispondere ad una concentrazione magmatica, per così dire, iniziale del processo di solidificazione in profondità, ed anteriore, oltrechè diffe-

(¹) Loc. cit.

(²) STARK H., *Olivine in Massengesteinen*. «Centralblatt f. Mineralogie», 1924, pag. 33.

(³) EDWARDS A. B., *The Tertiary volcanic rocks of central Victoria*. «Quart. Journal Geol. Soc.», London, 1938, 94, pag. 243.

(⁴) TOMKEIEFF S. I., *Zoned olivines and their petrogenetic significance*. «The Mineralogical Magazine», 1939-XXV, pag. 229.

rente, da quella stessa concentrazione in cui si segregarono i fenocristalli delle lave per prime effuse.

Meno sicuramente si può stabilire come queste olivine si siano conservate in un ambiente modificato rispetto a quello in cui si originarono, sino a che più tardi furono portate in superficie coinvolte nel movimento stesso di effusione del magma: ma per quanto possa apparire molto semplicistico è probabile che esse inizialmente costituissero in seno al magma stesso delle concentrazioni di grossa mole e che i noduli venuti a giorno non siano, per così dire, che il residuo (il nocciolo) di quelle masse peridotitiche, conservato a spese della parte periferica che, nel sopportare lo squilibrio dell'ambiente e quindi nell'atto stesso di subirne le conseguenze, costituì nel medesimo tempo come una calotta di protezione per la parte centrale, conservata infine definitivamente per il sopraggiungere della fase vulcanica effusiva.

Ciò faciliterebbe anche lo spiegare la presenza di quegli altri minerali che all'olivina si accompagnano nei noduli, e che non compaiono nelle lave anche nelle immediate vicinanze dei noduli stessi, perchè evidentemente non si ripeterono più le condizioni necessarie per la loro genesi, ormai superate nel tempo; ciò tanto più pare evidente per il fatto stesso che alcuni, come ad esempio lo spinello, sono sicuramente assegnabili ad un periodo di cristallizzazione anche anteriore a quello dell'olivina stessa.

Un altro componente di questi inclusi antigeni è uno spinello cromatico di colore bruno-nerastro in massa, bruno verdastro chiaro se in laminette sottili, mostrante frattura concoide vitrea ed avente di solito forma di granuli irregolari, o rotondeggianti.

Ha durezza sensibilmente vicina a quella del topazio (riga con una certa facilità il quarzo) è assolutamente insensibile all'azione di un elettromagnete ed ha indice di rifrazione nettamente superiore a quello di una soluzione satura di zolfo in ioduro di metilene ($n = 1,79$).

Il peso specifico misurato col metodo dei liquidi pesanti è risultato uguale a 4.023.

Per questo minerale però, durante la scelta del materiale al microscopio, non ho potuto eliminare dei piccoli frammenti di olivina saldamente associati allo spinello stesso; non ho potuto poi completare l'analisi determinando la percentuale di FeO presente, causa la esigua porzione di materiale a mia disposizione.

Ciò spiega, almeno in parte, il totale delle % sperimentali che risulta sensibilmente basso, visto che ho riportato per questo metallo, la % totale trovata, sotto forma di FeO.

SiO ₂	4.30
Al ₂ O ₃	31.43
Cr ₂ O ₃	19.50
Fe ₂ O ₃ } FeO	22.60
FeO }	
MgO	21.23
CaO	tr.
	<hr/> 99.06

Considerando allora, come è stato constatato, la silice presente dovuta all'olivina e togliendo quindi le quantità ad essa corrispondenti di FeO ed MgO per le proporzioni precedentemente riportate (SiO₂ 4.30, FeO 0.91, MgO 5.25) rimane per lo spinello:

Al ₂ O ₃	31.43	0.3083
Cr ₂ O ₃	19.50	0.1283
Fe ₂ O ₃ } FeO	21.69	0.3012
FeO }		
MgO	15.98	0.3995

Da questi risultati si ricava che ammettendo la presenza degli aggrupamenti FeO Cr₂O₃ ed MgO Al₂O₃ rimane un eccesso di FeO dal primo gruppo che evidentemente corrisponde alla % dell'ossido ferrico non potuta determinare sperimentalmente, e che pertanto unito al residuo MgO del secondo gruppo costituirà un terzo aggruppamento MgO Fe₂O₃.

Si ottiene allora riportando a 100 i valori sopra indicati:

Al ₂ O ₃	34.92	0.3426	} 0.5813 × 1
Cr ₂ O ₃	21.67	0.1426	
Fe ₂ O ₃	15.38	0.0961	
FeO	10.27	0.1426	
MgO	17.76	0.4440	} 0.3426 } 0.5866 × 1
	100.00		

cui ben corrisponde la formula (MgFe) (Al Cr Fe)₂ O₁₁, mentre considerando presenti i gruppi già ricordati si ottiene per la loro partecipazione percentuale:

FeO Cr ₂ O ₃	24.5
MgO Al ₂ O ₃	59.0
MgO Fe ₂ O ₃	16.5

Per altro, anche a causa della mancata determinazione dell'ossido ferroso, non riesce agevole nelle complesse e non sempre complete classifiche fino ad ora stabilite per gli spinelli, rintracciare quale posto a questo competa. Per di più, se si può senz'altro escludere un accoppiamento del tipo FeO Al₂O₃, MgO Cr₂O₃, MgO Fe₂O₃, in quanto rimarrebbe scoperto un forte eccesso di magnesia (in proporzione molecolare circa 0,27) non si può invece escludere quello del tipo MgO Cr₂O₃, MgO Al₂O₃, FeO Al₂O₃, FeO Fe₂O₃, anche se esso risponde non troppo bene ed appaia meno probabile.

Si avrebbe infatti rapportando i risultati sperimentali a 100.

Al ₂ O ₃	34.90	0.3424	$\left\{ \begin{array}{l} 0.2977 \\ 0.0447 \end{array} \right\}$	0.5859×1
Cr ₂ O ₃	21.65	0.1424		
Fe ₂ O ₃	16.15	0.1011		
FeO	9.55	0.1330	$\left\{ \begin{array}{l} 0.0883 \\ 0.0447 \\ 0.2977 \\ 0.1424 \end{array} \right\}$	0.5731×1
MgO	17.75	0.4401		
	100.00			

con un leggero eccesso quindi di ossido ferrico; e per la partecipazione % dei vari gruppi.

MgO Cr ₂ O ₃	24.31
MgO Al ₂ O ₃	51.39
FeO Al ₂ O ₃	7.03
FeO Fe ₂ O ₃	17.27

Ora seguendo le norme formulate dal SIMPSON⁽¹⁾ si arriverebbe comunque a classificare questo minerale nel gruppo degli spinelli e nel sottogruppo della magnocromite. I rapporti infatti fra MgO ed FeO, Al₂O₃ ed Cr₂O₃ e fra x ed y ⁽²⁾ corrispondono a quelli di questo termine

(¹) SIMPSON E. S., *The Mineralogical Magazine*, 1920-XIX, pag. 99.

(²) $x = \frac{100(m-f)}{m+b}$; $y = \frac{100(a-c)}{a+c}$ dove m, f, a e c rappresentano rispettivamente il numero di molecole di MgO, FeO, Al₂O₃ e Cr₂O₃.

anche se si considera l'ossido ferrico come allumina o come Cr_2O_3 a seconda dei casi.

È noto per altro che questa classifica presenta il grave inconveniente di non tenere conto dei ferrispinelli.

Seguendo invece fedelmente la classifica più recente ed esauriente del NIGGLI ⁽¹⁾ che ha cercato di dare un ordinamento sistematico alla infinita serie di spinelli dai nomi più svariati che s'incontrano nella letteratura, non si riesce comunque a trovare un posto ben definito per questo materiale, che risulterebbe ancora un termine del gruppo degli spinelli tipo ceylonite, ma in parte anche addirittura un cromo spinello (gruppo delle cromiti) di tipo beresovite.

Per questo, tenendo conto anche delle proprietà fisiche, ed in particolare per l'alto indice di rifrazione e per il colore, oltre che per il peso specifico stesso, preferisco continuare a chiamare questo spinello così come ho già fatto in altra sede ⁽²⁾ una picotite, aggiungendovi se mai l'attribuito ferri-cromifera a significare la presenza relativamente notevole dell' Fe_2O_3 a tutto scapito della allumina.

⁽¹⁾ NIGGLI P., « Zeitschrift f. Kristallographie », 1924, LX, pag. 323.

⁽²⁾ Loc. cit.

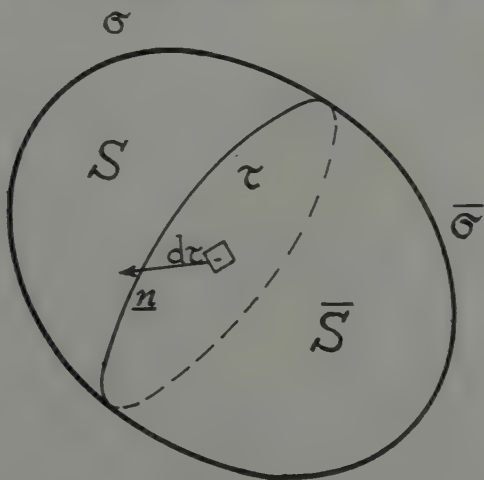
NOTE DI ACCADEMICI
E DI AGGREGATI ALLA R. ACCADEMIA D'ITALIA

Meccanica. — *Stati di tensione sulle sezioni interne dei solidi rigidi.* Nota ⁽¹⁾ di UMBERTO CISOTTI. Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

È ben noto che, in un solido rigido (indeformabile), sia in condizioni statiche quanto in movimento, sussiste indeterminatezza della distribuzione interna degli sforzi che caratterizza lo stato di tensione interno del solido.

Se, invece di preoccuparsi della distribuzione locale degli sforzi interni, si prendono in esame la risultante e il momento degli sforzi che si esplicano sugli elementi superficiali appartenenti ad una qualsiasi superficie interna, comunque prescelta, si possono cogliere questi elementi globali caratteristici ed esprimerli mediante le sollecitazioni esterne e, nel problema dinamico, facendo intervenire le caratteristiche cinetiche. Si ottengono delle formule espressive, abbastanza semplici e facilmente applicabili.

1. *Sollecitazioni in sistemi continui.* — Sia \bar{S} lo spazio occupato da un sistema materiale continuo; designi $\bar{\sigma}$ la superficie chiusa che limita \bar{S} (o il complesso se il contorno di \bar{S} è costituito da più superficie chiuse).



⁽¹⁾ Presentata nell'Adunanza del 16 dicembre 1939-XVIII.

Sia τ una sezione superficiale qualsiasi che attraversa \bar{S} e lo divide in due porzioni distinte: chiamiamo S una di queste porzioni, precisamente sia S lo spazio tra τ e σ , essendo σ quella parte di $\bar{\sigma}$ che resta a contatto con S .

Sia F la forza unitaria di massa e μ la densità di distribuzione della massa in S ; sarà $\mu F dS$ la forza agente su dS , per cui

$$[1] \quad R_S = \int_S \mu F dS, \quad M_S = \int_S \mu (P - O) \wedge F dS,$$

rappresentano rispettivamente la risultante e il momento, rispetto a un punto O comunque prescelto, delle forze di massa agenti su tutti gli elementi dS di S . Chiamiamo $f d\sigma$ la forza superficiale che viene esercitata sulla faccia esterna del generico elemento $d\sigma$ di σ ; colle posizioni

$$[2] \quad R_\sigma = \int_\sigma f d\sigma, \quad M_\sigma = \int_\sigma (P - O) \wedge f d\sigma,$$

risultano definite risultante e momento delle forze agenti su tutti gli elementi della superficie σ .

Designi n il versore normale al generico elemento $d\tau$ della superficie τ volto verso S ; chiamando Φ_n lo sforzo specifico che si esercita su $d\tau$, dalla parte esterna ad S , sarà $\Phi_n d\tau$ lo sforzo su $d\tau$, per conseguenza

$$[3] \quad \Phi = \int_\tau \Phi_n d\tau, \quad \Gamma = \int_\tau (P - O) \wedge \Phi_n d\tau$$

definiscono risultante e momento, rispetto al punto O , degli sforzi a cui sottostanno tutti gli elementi di τ . Pertanto saranno

$$[4] \quad R_S + R_\sigma + \Phi, \quad M_S + M_\sigma + \Gamma$$

risultante e momento di tutte le forze agenti sulla porzione S del sistema \mathcal{S} supposta isolata. Nel caso particolare in cui S coincide con tutto \bar{S} e quindi τ diviene evanescente e σ viene a coincidere con tutta $\bar{\sigma}$, si ha $\Phi = \Gamma = 0$, mentre R_S, M_S definite dalle [1], e R_σ, M_σ , definite dalle [2], diventano ordinatamente:

$$[5] \quad \left\{ \begin{array}{l} R_{\bar{S}} = \int_{\bar{S}} \mu F d\bar{S}, \quad M_{\bar{S}} = \int_{\bar{S}} \mu (P - O) \wedge F d\bar{S}; \\ R_{\bar{\sigma}} = \int_{\bar{\sigma}} f d\bar{\sigma}, \quad M_{\bar{\sigma}} = \int_{\bar{\sigma}} (P - O) \wedge f d\bar{\sigma}. \end{array} \right.$$

2. *Linee baricentriche*. — La massa materiale contenuta nell'elemento di volume dS è μdS , per cui

$$[6] \quad m = \int_S \mu dS$$

è la massa contenuta nel volume S del solido; in particolare la massa di tutto il sistema si ottiene dalla precedente relazione facendo coincidere S con \bar{S} ; sarà quindi

$$[6'] \quad \bar{m} = \int_{\bar{S}} \mu d\bar{S}.$$

Se G designa il baricentro di S si ha ⁽¹⁾

$$[7] \quad G = \frac{1}{m} \int_S \mu P dS.$$

Facendo variare S con continuità, mediante spostamento a variazione continua della superficie τ , pure G si sposta in modo continuo e, in generale, descrive una linea che è a dirsi *linea baricentrica* ⁽²⁾. Infinite sono le linee baricentriche, essendo infiniti i modi di far muovere e variare la sezione τ , tutte però mettono capo al punto

$$[7'] \quad \bar{G} = \frac{1}{\bar{m}} \int_{\bar{S}} \mu P d\bar{S},$$

che è il baricentro dell'intero sistema.

3. *Tensore d'inerzia*. — Assumiamo un terna di assi cartesiani trirettagoli coll'origine in un punto O , comunque prescelto; dette x, y, z le coordinate di un generico punto P . Poniamo:

$$\begin{aligned} s_x &= \int_S \mu x^2 dS, & D &= \int_S \mu yz dS, \\ s_y &= \int_S \mu y^2 dS, & E &= \int_S \mu zx dS, \\ s_z &= \int_S \mu z^2 dS, & F &= \int_S \mu xy dS; \end{aligned}$$

⁽¹⁾ CISOTTI, *Meccanica razionale*, Milano, Libreria Editrice Politecnica; III ed. (1939); pag. 169.

⁽²⁾ Per il caso piano: cfr. CESÀRO, *Geometria intrinseca*; Napoli, 1896, pag. 78; e ancora CISOTTI, *Distribuzione degli sforzi e dei momenti interni nelle verghe rigide*. Questi « Rendiconti », vol. I, pag. 102.

D, E, F sono i *momenti di deviazione* di S , rispetto al prefissato sistema di riferimento; i *momenti d'inerzia*, rispetto agli assi, sono definiti dalle relazioni:

$$A = s_y + s_z, \quad B = s_z + s_x, \quad C = s_x + s_y.$$

A, B, C, D, E, F definiscono completamente lo *stato d'inerzia* di S . In particolare, se S va a coincidere con \bar{S} le sei precedenti caratteristiche diventano $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}, \bar{E}, \bar{F}$; indicando in tal modo le caratteristiche dello stato d'inerzia di tutto il sistema \bar{S} .

4. *Determinazione di Φ e di Γ .* — Applichiamo alla porzione S del sistema continuo, supposto in movimento, le equazioni cardinali della dinamica dei sistemi: il teorema delle quantità di moto permette di scrivere la seguente relazione vettoriale

$$\dot{Q} = R_S + R_\sigma + \Phi,$$

e il teorema del momento delle quantità di moto, l'ulteriore relazione vettoriale

$$\dot{M}_q = M_S + M_\sigma + \Gamma,$$

avendo indicato con Q la quantità di moto e con M_q il momento relativo, il punto sovrapposto designando derivazione rispetto al tempo. Dalle precedenti relazioni si ricavano:

$$[8] \quad \begin{cases} \Phi = -R_S - R_\sigma + \dot{Q} \\ \Gamma = -M_S - M_\sigma + \dot{M}_q, \end{cases}$$

le quali definiscono esplicitamente Φ e Γ quando sieno note le sollecitazioni, di S nonchè il suo movimento.

5. *Applicazione ai solidi rigidi. Espressione di Φ .* — Se, in particolare, il sistema continuo è un solido rigido, il movimento non può essere che rigido. Immaginiamo allora la terna di riferimento rigidamente collegata col solido in movimento, essendo l'origine O un punto, del solido, arbitrariamente prescelto. Chiamando ω la velocità angolare del moto rigido, in generale funzione del tempo t , si ha ⁽¹⁾

$$Q = m\dot{G} = m[\dot{O} + \omega \wedge (G - O)],$$

essendo G il baricentro di S (n. 2). Derivando rispetto al tempo e tenendo presente che

$$\dot{G} = \dot{O} + \omega \wedge (G - O),$$

(¹) Cfr., ad es., loco primo citato, pag. 307.

si ottiene:

$$\dot{Q} = m \{ \ddot{O} + \dot{\omega} \wedge (G - O) + \omega \wedge [\omega \wedge (G - O)] \};$$

portando questa espressione di \dot{Q} nella prima delle [9] si ottiene:

$$[9] \quad \Phi = -R_S - R_\sigma + m \{ \ddot{O} + \dot{\omega} \wedge (G - O) + \omega \wedge [\omega \wedge (G - O)] \}.$$

Questa formula definisce la risultante degli sforzi che si esercitano sulla sezione τ e mette in rilievo come varia Φ con τ , essendo variabili con τ : m , G , oltre R_S e R_σ .

6. *Espressione di \mathbf{r}* . — Rammentiamo che la seconda delle relazioni vettoriali [8] presuppone che i quattro momenti che in essa figurano sieno, in generale, riferiti a un punto fisso, oppure al baricentro G , e che, se si assume come terna cartesiana di riferimento quella costituita dagli assi principali d'inerzia baricentrici, oppure relativi al punto fisso, si ha notoriamente ⁽¹⁾:

$$\dot{M}_q = [A\dot{\omega}_x - (B - C)\omega_y\omega_z]i + \dots$$

Conseguentemente la seconda delle relazioni [8] fornisce per il momento \mathbf{r} la seguente espressione:

$$[10] \quad \mathbf{r} = -\mathbf{M}_s - \mathbf{M}_\sigma + [A\dot{\omega}_x - (B - C)\omega_y\omega_z]i + \dots$$

Se facciamo $S = \bar{S}$ è [n. 1] $\mathbf{r} = 0$ e la precedente dà luogo alla nota equazione vettoriale euleriana

$$[11] \quad [A\dot{\omega}_x - (B - C)\omega_y\omega_z]i + \dots = \mathbf{M}_{\bar{S}} + \mathbf{M}_\sigma,$$

che serve a determinare ω , noti che siano A , B , C , $\mathbf{M}_{\bar{S}}$, \mathbf{M}_σ , nonchè lo stato cinetico iniziale. Col riferimento su accennato anche la [9] si semplifica nel modo seguente:

$$[9'] \quad \Phi = -R_s - R_\sigma + m\ddot{G}.$$

Per $S = \bar{S}$ è [n. 1] $\Phi = 0$ e la precedente, che diviene:

$$\bar{m}\ddot{G} = R_{\bar{S}} + R_\sigma,$$

⁽¹⁾ Cfr., ad es., loco primo citato, pag. 309.

esprime il principio del moto del baricentro. SÌ che, indicando con $v_{\bar{G}}$ la velocità di \bar{G} , è

$$\ddot{G} = \dot{v}_{\bar{G}} + \omega \wedge v_{\bar{G}},$$

per cui la precedente equazione può scriversi:

$$[12] \quad \bar{m} (\dot{v}_{\bar{G}} + \omega \wedge v_{\bar{G}}) = \bar{R}_{\bar{S}} + \bar{R}_{\bar{\sigma}}.$$

Questa relazione, unitamente alla [II], completa il gruppo delle equazioni euleriane che servono a determinare $v_{\bar{G}}$ e ω , noti: \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} , $\bar{R}_{\bar{S}}$, $\bar{R}_{\bar{\sigma}}$, $\bar{M}_{\bar{S}}$, $\bar{M}_{\bar{\sigma}}$, nonchè i valori iniziali di $v_{\bar{G}}$ e di ω .

Astronomia. — *Osservazioni sopra l'ipotesi cosmogonica di Laplace.* Nota ⁽¹⁾ di GIUSEPPE ARMELLINI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. — In una mia Nota, pubblicata nei « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei » (Seduta 1° marzo 1936—XIV), ho corretto un errore algoritmico, rimasto fin ad allora inavvertito, in cui era caduto il POINCARÉ nelle sue magistrali *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques*.

Come io scrissi allora, tale errore ha un'importanza così grande che, se il calcolo del POINCARÉ fosse stato esatto, esso avrebbe obbligato a rinunciare all'ipotesi di LAPLACE, almeno nella sua forma classica. E prova ne sia che lo stesso POINCARÉ — a causa appunto dell'errore in cui era incorso — si è trovato implicitamente costretto nelle sue « Lezioni », volendo ad ogni costo difendere l'ipotesi laplaciana, a modificarla grandemente, sostituendo alla nebulosa gassosa del LAPLACE una nebulosa pulvirolenta ed invocando anche in aiuto l'ipotesi mareale di DARWIN, per poter spiegare il fatto che i pianeti ruotano generalmente intorno al loro asse polare nello stesso senso in cui avviene il loro moto di rivoluzione intorno al Sole.

Ma, mentre tutti hanno accettato, come del resto era evidente, la correzione che io ho apportato al calcolo del POINCARÉ, non tutti si sono mostrati convinti dell'importanza essenziale che ha detta correzione per il mantenimento dell'ipotesi di LAPLACE, nella sua forma classica. Alcuni anzi hanno creduto che questa importanza essenziale fosse subordinata ad ipotesi sopra la condensazione centrale della nebula laplaciana.

Così per esempio il Prof. SILVA, in una sua relazione sopra le ricerche italiane nel campo astronomico, pubblicata negli « Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze » (Riunione XXV, vol. II, fasc. 2), scrive che: « L'interesse assai vivo di questa osservazione starebbe dunque nel fatto che la formazione del Sistema Solare potrebbe essere studiata anche partendo direttamente da una nebulosa senza condensazione centrale ». E le stesse idee ripete, sebbene in forma meno precisa, il NICOLINI in una sua rassegna sopra le principali ipotesi cosmogoniche, pubblicata in « Coelum » (vol. VII, p. 184, Bologna).

⁽¹⁾ Presentata nell'Adunanza del 16 dicembre 1939—XVIII

Forse tali opinioni sono dovute al fatto che nel citato libro del POINCARÉ, la cui redazione definitiva non è però dovuta al grande scienziato, si trovano alle volte collocati nel corso della trattazione dei teoremi generali di fisica-matematica, che — per togliere ogni equivoco — sarebbe stato preferibile collocare nell'introduzione, come premesse.

In ogni modo sta il fatto che, dopo corretto l'errore del POINCARÉ, non vi è più necessità — come ben dice il SILVA — di ammettere una condensazione centrale della nebula laplaciana ed anzi si è liberi di fare qualsiasi ipotesi sopra la sua costituzione interna; almeno prescindendo da altre considerazioni sopra la conservazione del momento della quantità di moto. Ma, d'altro lato, sta pure il fatto che — se detto errore non fosse stato corretto — anche ammettendo questa forte condensazione interna della nebula, l'ipotesi laplaciana diveniva insostenibile; almeno nella sua forma classica. Cosa che passiamo ora a vedere.

2. A tale scopo, immaginiamo con LAPLACE che il Sistema Planetario sia nato da un'antica nebulosa, la quale aveva — presso a poco — la forma di ellissoide rotondo schiacciato e ruotava intorno al suo asse polare. Come scrive lo stesso LAPLACE, nella sua *Exposition du Système du Monde*, tale nebulosa era *gassosa* ed anzi formata dall'atmosfera solare, che egli supponeva essere allora assai dilatata « en vertu d'une chaleur excessive », e che supponeva ruotare pure col globo solare come un tutto; vale a dire con la stessa velocità angolare. Per maggiore generalità, non facciamo ora *nessuna ipotesi* sopra la distribuzione delle densità nell'interno di questa nebula.

Inoltre, sempre secondo LAPLACE, la nebulosa si estendeva al di là dell'orbita del pianeta più lontano e cioè al di là di Nettuno; almeno considerando, per prudenza, Plutone — la cui orbita del resto è, in parte, interna a quella di Nettuno — come un pianeta eccezionale; forse come un antico secondo satellite di Nettuno, secondo alcune vedute moderne. Raffreddandosi la nebula si contrasse e quindi, per notissimi teoremi di Meccanica, crebbe la sua velocità angolare di rotazione ω ; onde — rottosi l'equilibrio — essa abbandonò successivamente vari anelli, dai quali nacquero i principali pianeti.

Ciò posto, consideriamo questa nebulosa *poco prima* che essa abbandonasse il suo anello più esterno; quello appunto che dette origine a Nettuno; la sua velocità angolare ω era allora presso a poco eguale a quella di rivoluzione di Nettuno ed il suo diametro poco maggiore di quello dell'attuale orbita di Nettuno.

Poichè la nebulosa — secondo LAPLACE — era *gassosa* ed essa si trovava ancora in *equilibrio relativo*, è evidente che la forza F applicata in ogni punto della sua superficie esterna S e risultante dall'attrazione di tutta la massa e dalla forza centrifuga, doveva essere *normale* alla superficie stessa e diretta verso l'interno.

Chiamando quindi con W il potenziale risultante dall'attrazione newtoniana e dalla forza centrifuga e scegliendo il senso positivo della normale diretto verso l'esterno, avremo:

$$[1] \quad \int_S F dS = \int_S \frac{dW}{dn} dS < 0$$

dove dn indica l'elemento di normale alla superficie S .

Ma si ha per noti teoremi di calcolo integrale:

$$[2] \quad \int_S \frac{dW}{dn} dS = \int_V \Delta^2 W dV$$

essendo sempre la normale diretta verso l'esterno ed indicando con V il volume della nebula. Inoltre, se si sceglie l'asse di rotazione come asse Z , abbiamo:

$$[3] \quad W = P + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2)$$

dove P è il potenziale newtoniano.

Ora si ha ovviamente:

$$[4] \quad \Delta^2 \left[\frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) \right] = \frac{\omega^2}{2} \Delta^2 (x^2 + y^2) = 2 \omega^2$$

mentre per il noto teorema di Poisson abbiamo pure:

$$[5] \quad \Delta^2 P = -4 \pi \rho$$

dove ρ indica la densità in un punto generico della nebula ed f il coefficiente attrattivo.

La [1] e la [2] ci danno allora sostituendo:

$$[6] \quad \int_V \Delta^2 W dV = \int_V (2 \omega^2 - 4 \pi f \rho) dV = 2 \omega^2 V - 4 \pi f \int_V \rho dV = 2 \omega^2 V - 4 \pi f M < 0$$

dove M indica la massa di tutta la nebulosa, e cioè quella dell'attuale Sistema Planetario, o presso a poco quella del Sole, ed ω è la velocità angolare di rivoluzione di Nettuno.

Dalla [6], indicando con ρ_m la densità *media* della nebulosa, si ha:

$$[7] \quad \rho_m = \frac{M}{V} > \frac{\omega^2}{2 \pi f}$$

$$[8] \quad \frac{\omega^2 V}{2 \pi f} < M$$

come appunto risulta dai dati astronomici, dopo corretto l'errore del POINCARÉ. Secondo POINCARÉ (Cfr. op. cit., deux. edit., p. 23) invece:

« lorsqu'on prend pour ω la vitesse angulaire de Neptune, on trouve pour ρ_m un chiffre tellement grand que, d'après ce chiffre, la masse totale de la nébuleuse serait très supérieure à celle du Soleil ».

3. Supponiamo ora che l'errore numerico, in cui è caduto l'illustre scienziato, non fosse stato corretto e che realmente il rapporto $\frac{\omega^2 V}{2\pi f}$ fosse maggiore di M , anzichè minore come deve risultare dalla [8]. Allora, poichè non abbiamo fatto nessuna ipotesi sopra la distribuzione delle densità nell'interno della nebula e quindi la [8] è completamente generale, non resterebbero che due vie di uscita, e cioè:

A) Supporre che la nebula laplaciana non si fosse mai estesa fino all'orbita di Nettuno e che questo pianeta fosse prodotto per esempio da una esplosione solare. La cosa è possibile; ma allora non si ha più l'ipotesi laplaciana, ma una teoria mista dell'ipotesi di LAPLACE e di quella esplosiva di MOULTON;

B) Oppure supporre che la velocità angolare ω non fosse la medesima per tutta la nebula; che è appunto l'ipotesi che avanza il POINCARÉ. Egli infatti suppone che ω cresca dalla periferia al centro, come se la nebula – anzichè gassosa – fosse pulvirolenta ed ogni granello di pulviscolo si muovesse liberamente intorno al Sole, come un microscopico satellite. Nasce però un inconveniente e cioè – essendo la velocità tanto minore quanto più ci allontaniamo dal centro – i pianeti, appena generati, hanno moto di rotazione di senso contrario al moto di rivoluzione. Notiamo che tale inconveniente non si aveva nell'ipotesi di LAPLACE, espressa nella forma classica, giacchè allora – essendo ω costante – la velocità risulta invece tanto maggiore quanto più ci allontaniamo dal centro. Il POINCARÉ rimedia a tale inconveniente ricorrendo all'ipotesi mareale del DARWIN e scrivendo in proposito pagine veramente brillanti.

Ma si deve osservare che siamo fuori dell'ipotesi di LAPLACE, propriamente detta, per tre ragioni e cioè:

α) Perchè LAPLACE suppone esplicitamente la nebulosa gassosa e non pulvirolenta;

β) Perchè LAPLACE, come dichiara lo stesso POINCARÉ (op. cit., pag. 7), suppone che questa nebulosa gassosa sia « animée d'un mouvement de rotation bien uniforme ». Ciò è tanto vero che anche il ROCHE, nei suoi studi sopra la forma della nebula di LAPLACE eseguiti pochi anni dopo la morte del grande astronomo, suppose sempre il moto di rotazione *uniforme*. Nell'ipotesi di POINCARÉ invece, ω varia da punto a punto nell'interno della nebula;

γ) Perchè, in ogni modo, si è obbligati a far ricorso alla ipotesi cosmogonica di DARWIN, che LAPLACE ovviamente non conosceva; onde

anche qui, come nel primo caso, si ha sempre una teoria mista LAPLACE-DARWIN.

Riepilogando sta il fatto che — qualunque sia la distribuzione interna della densità dentro la nebula — se la [8] non fosse soddisfatta, l'ipotesi di LAPLACE, nella sua forma classica, non potrebbe più matematicamente sorreggersi. Credo dunque dimostrato innegabilmente che la correzione dell'errore di POINCARÉ, ha importanza essenziale per la teoria cosmogonica laplaciana.

Elettrochimica. — *Potenziali elettrochimici ed effetto Volta* —
Nota III: *Deduzione dei valori più probabili degli effetti Volta
esterni e dei potenziali elettrochimici reali* ⁽¹⁾. Nota ⁽²⁾ di
OSCAR SCARPA, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Nelle conclusioni delle due Note precedenti ⁽³⁾ ho fatto rilevare la necessità di conoscere con maggior precisione di quella posseduta dai dati finora noti, i veri valori dei potenziali di contatto fra i metalli, o almeno quelli degli effetti Volta esterni. Nella presente Nota espongo il metodo che ho seguito per raggiungere questo ultimo scopo e le deduzioni che ho potuto trarre circa il calcolo dei valori « reali » ⁽⁴⁾ dei potenziali elettrochimici ⁽⁵⁾.

1. Poichè gli effetti Volta esterni dei diversi metalli (M) rispetto al platino, possono venir misurati dalla differenza fra i lavori di estrazione dell'elettrone rispettivamente dal metallo M e dal platino, mentre i potenziali elettrochimici normali *reali* corrispondono (se riferiti al potenziale dell'elettrodo normale a idrogeno) alla differenza fra i lavori di estrazione dell'ione metallico dal metallo M e dell'ione idrogeno dal platino idrogenato (lavori questi che sono accompagnati dalle reazioni di solvatazione dei detti ioni) ho pensato che fra le due grandezze debba esistere una relazione di dipendenza. Infatti tanto nel caso di estrazione di elettroni dalla superficie dei metalli, quanto in quello di estrazione di ioni metallici, il

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel Laboratorio di Elettrochimica e di Chimica-fisica del R. Politecnico di Milano.

⁽²⁾ Presentata nella seduta del 16 dicembre 1939-XVIII.

⁽³⁾ « Rendiconti R. Acc. Lincei », XXIX, serie VI, 1° semestre e « Rendiconti R. Accademia d'Italia », novembre 1939-XVIII.

⁽⁴⁾ Per la definizione e per il calcolo dei potenziali elettrochimici normali *reali* vedere le mie due Note precedenti.

⁽⁵⁾ Nella ipotesi per cui il valore degli effetti Volta interni coincidano con quelli esterni, secondo la teoria accettata da numerosissimi fisici moderni. Per la relativa discussione vedi nella Nota II (Questi « Rendiconti », novembre 1939-XVIII).

fenomeno fondamentale corrisponde alla separazione completa fra ioni (preesistenti nel metallo) e gli elettroni che ne equilibrano le cariche. Gli ioni restano nel primo caso entro al metallo, mentre nel secondo vi rimangono gli elettroni, e gli ioni, entrando nella soluzione, formano i rispettivi solvati.

Per lo studio teorico di questa relazione è da tener presente che mentre la estrazione degli elettroni viene prodotta (nelle esperienze fotoelettriche e termoioniche) mediante l'impiego di energia luminosa o termica, quella elettrochimica degli ioni è dominata da un contemporaneo fenomeno chimico, poichè l'estrazione dell'ione dal metallo e la sua entrata nella soluzione è fondamentalmente causata dalla affinità che si deve ammettere esistente fra l'ione metallico e il solvente ionizzante (reazioni di solvatazione). Ne segue che per dedurre teoricamente tale relazione, bisogna applicare le considerazioni che ho esposto nella Nota I.

Nella Nota presente mi limito a esporre il metodo che mi ha condotto a determinare graficamente la relazione sopradetta e, in base a questo grafico, a correggere dai probabili errori sperimentali i valori finora noti degli effetti Volta esterni, riferiti al platino.

La possibilità di rappresentare graficamente tale relazione portando su di un asse (per esempio sulle ordinate) i valori dei potenziali elettrochimici normali apparenti relativi all'elettrodo normale a idrogeno (cioè quelli dedotti dalle misure dirette) e sull'altro quello degli effetti Volta esterni, espressi rispetto al platino, è mostrata dalle seguenti figure.

La fig. 1 riproduce il diagramma che ho ottenuto assumendo per valori degli effetti Volta esterni quelli dedotti dalle differenze fra i lavori di estrazione degli elettroni (secondo la tabella di BUTLER ⁽¹⁾).

Per la discussione di questo diagramma è necessario tener presente che mentre la precisione con cui sono misurati i potenziali elettrochimici raggiunge il millesimo di Volt, quella con cui vengono misurati gli effetti Volta esterni raramente raggiunge il centesimo di Volt e generalmente si può assegnare dell'ordine dei decimi di Volt. Ne segue che gli scarti di alcuni punti rappresentativi (corrispondenti al Ferro, al Cadmio e al Magnesio) dalla linea continua si debbono ragionevolmente attribuire ad errori sperimentali inerenti alle misure fotoelettriche, e così forse anche per il piombo (del quale è nota la difficile detersione della superficie). Per gli scarti più notevoli presentati dal Calcio e dal Litio (che raggiungono ognuno otto decimi di Volt) non mi è stato possibile trovare una spiegazione soddisfacente, altro che pensando a un errore sperimentale costante in ambedue i casi.

⁽¹⁾ Vedere nella mia nota II pubblicata in questi « Rendiconti », novembre 1939-XVIII.

Molto interessante è riuscito l'esame del diagramma ottenuto quando i valori degli effetti Volta esterni sono ricavati mediante il metodo del condensatore nell'aria. Ho impiegato all'uopo (come già nella I Nota) i valori riportati nelle Critical Tables (vol. VI, p. 57) e ivi indicati come: Potenziali di contatto.

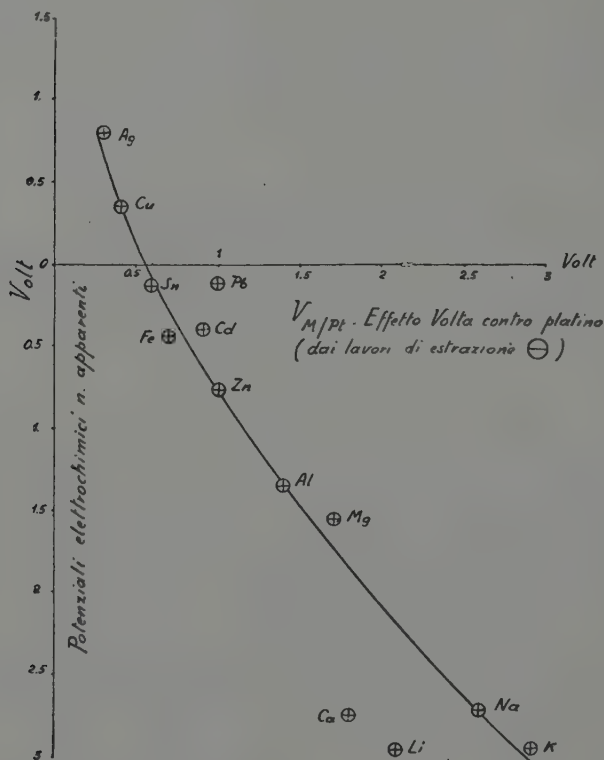


Fig. 1.

La rappresentazione è riportata nella fig. 2. In tal caso gli scarti dalla linea continua, che è stata disegnata in base al criterio per cui la somma degli scarti positivi deve eguagliare la somma degli scarti negativi (cosa possibile da effettuare poichè i valori dei potenziali elettrochimici si debbono ritenere esatti entro al millesimo di Volt e quindi gli scarti sono da attribuire soltanto a errori nelle misure degli effetti Volta) sono molto più sentiti che nel precedente. Fatto che evidentemente dipende dalla difficoltà di poter operare con elettrodi aventi molto grandi superfici non

alterate e ben deterse, mentre il metodo fotoelettrico richiede elettrodi di minima ampiezza facilmente detergibili in modo quasi perfetto ⁽¹⁾.

La somiglianza fra i due diagrammi, somiglianza che risulta in modo evidentissimo sovrapponendo i due disegni, è tuttavia notevolissima. Essa conferma la validità del metodo di studio qui adottato.

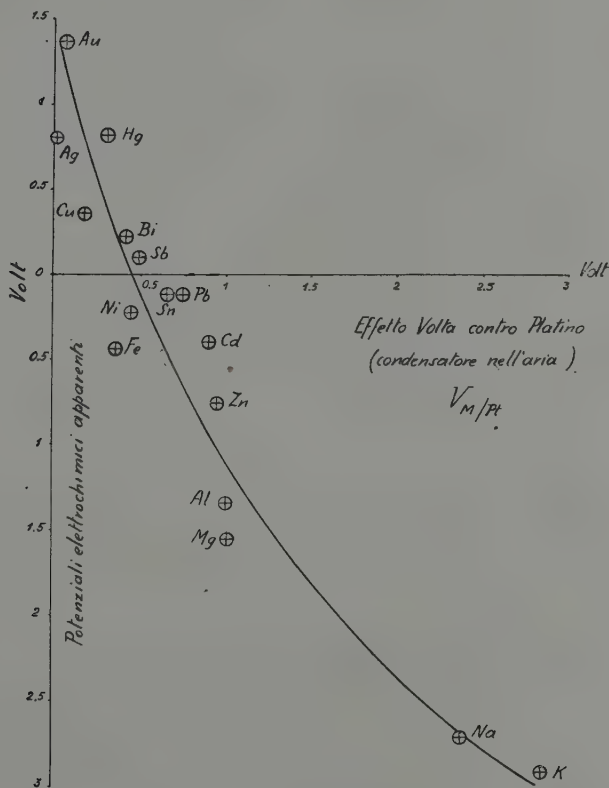


Fig. 2.

⁽¹⁾ Bisogna tener presente (fatto sul quale non si è fermata l'attenzione di coloro che si sono occupati dell'effetto Volta) che la pulitura meccanica dei metalli può causare notevoli alterazioni dello stato chimico-fisico di parte o di tutta la superficie sottoposta alle azioni meccaniche. Oltre alla generazione del cosiddetto strato amorfo di Béalby si possono generare cambiamenti altotropici nello straterello superficiale, è, ove si tratti di leghe, trasformazioni notevoli, constatabili mediante le osservazioni microscopiche. Fatti, questi, ben noti ai metallografi.

Particolare importanza ha l'osservazione che la massima differenza fra i valori degli effetti Voltiani del medesimo metallo, risultanti dai due diagrammi, corrisponde a circa due decimi di Volt, ed appare nella regione ove hanno sede i punti rappresentativi dei metalli Alluminio e Magnesio (cioè di metalli fra i più difficilmente detergibili ai fini dello studio) ed è compresa nell'ordine di grandezza dei possibili errori sperimentali.

Ciò posto, appare non soltanto possibile di dedurre dal diagramma 1, con sufficiente precisione, i valori dei potenziali Voltiani mancanti nella tabella di Butler, ma risulta razionale dedurre, mediante lo stesso diagramma, le piccole correzioni che si debbono apportare ai valori degli effetti Volta corrispondenti al Ferro, all'Alluminio, al Magnesio, e pur anche al Piombo, onde far rientrare nel diagramma i corrispondenti punti rappresentativi. Correzioni analoghe si possono fare (sia pure con minor sicurezza) operando con il secondo diagramma.

TABELLA I.

Effetti Volta esterni contro il Platino.

Metallo	Dalle esperienze con il condensatore nell'aria	Dai lavori di estrazione degli elettroni	Valore medio
K	2,7 ₄	2,7 ₅	2,7 ₄
Na	2,4 ₄	2,6 ₀	2,5 ₂
Mg	1,3 ₀	1,6 ₀	1,4 ₅
Al	1,1 ₅	1,4 ₀	1,2 ₇
Zn	0,8 ₂	1,0 ₀	0,9 ₁
Fe	0,6 ₆	0,8 ₀	0,7 ₃
Cd	0,6 ₄	0,7 ₆	0,7 ₀
Ni	0,5 ₆	(0,6 ₀) ⁽¹⁾	0,5 ₈
Sn	0,5 ₂	0,6 ₃	0,5 ₇
Pb	0,5 ₀	0,6 ₀	0,5 ₅
Sb	0,4 ₄	(0,5 ₀) ⁽¹⁾	0,4 ₇
Bi	0,3 ₈	(0,4 ₅) ⁽¹⁾	0,4 ₁
Cu	0,3 ₂	0,4 ₀	0,3 ₆
Ag	0,2 ₀	0,2 ₈	0,2 ₄
Hg	0,2 ₀	(0,2 ₈) ⁽¹⁾	0,2 ₄
Au	0,0 ₇	—	—

(1) I valori chiusi fra parentesi corrispondono a metalli per cui mancano i dati nella tabella di Butler. Questi valori sono dedotti per interpolazione dal diagramma 1.

È molto interessante osservare che da ambedue questi diagrammi risulta confermato quanto ho dedotto nei precedenti studi e cioè che il potenziale Voltiano fra il Platino idrogenato (saturato di idrogeno alla pressione e alla temperatura normale) e il platino puro è compreso fra $+ 0,49$ e $+ 0,51$ Volt, cioè in media vale $0,50$ Volt. Esso è infatti dato dal valore della ascissa corrispondente al valore dell'ordinata che caratterizza (per la nota convenzione) il potenziale apparente dell'elettrodo normale a idrogeno ($PenH = 0$).

Ove non si voglia attribuire *a priori* maggior peso ai valori dei potenziali Voltiani deducibili dalle misure fotoelettriche e termoioniche piuttosto che a quelli dedotti dalle esperienze eseguite con il metodo del condensatore variabile, si possono calcolare i valori medi dei potenziali Voltiani assegnati dal diagramma 1 e da quello di fig. 2. Si ottengono così i dati esposti nella tabella I.

È da tener presente che i valori medi così calcolati differiscono dai valori sperimentali di quantità che sono tutte largamente comprese entro i limiti degli errori sperimentali.

Sembra quindi possibile attribuire ai valori riportati nella ultima colonna di questa tabella un peso tale da doverli considerare come atti a misurare gli effetti Volta esterni con la maggiore precisione concessa allo stato attuale delle ricerche.

2. Disponendo ora di una serie di valori degli effetti Volta esterni che si debbono considerare più esatti di quelli risultanti dalle esperienze dirette, è possibile ricalcolare i valori dei potenziali elettrochimici normali *reali* dei diversi metalli, mediante le equazioni che ho esposto nella prima Nota.

I risultati sono esposti nella Tabella II nella quale, per facilitare i confronti, sono riportati anche i valori dei potenziali elettrochimici normali *apparenti* pubblicati nelle Critical Tables.

Dall'esame di questa tabella risulta anzitutto una grande regolarità nell'andamento dei valori dei potenziali elettrochimici reali ora calcolati. Risulta inoltre che l'inversione del segno dei potenziali elettrochimici reali riferiti al potenziale reale dell'elettrodo normale a idrogeno (che è stato assunto di valore zero per la Nota convenzione, alla quale si debbono aggiungere le osservazioni che ho esposto nelle mie due Note precedenti) avviene fra i potenziali elettrochimici normali del Piombo e dello Antimonio. Tale fatto coincide con quanto avviene nella Nota scala dei potenziali apparenti. È inutile insistere sulla importanza che ha questa conferma, rispetto agli studi relativi alla separazione elettrochimica dei cationi.

TABELLA II.

Potenziali elettrochimici normali relativi all'elettrodo n. a idrogeno.

Metallo	<i>apparenti</i>	<i>reali</i>
K	— 2,92	— 0,70
Na	— 2,71	— 0,71
Mg	— 1,55	— 0,62
Al	— 1,33	— 0,58
Zn	— 0,76	— 0,37
Fe	— 0,44	— 0,23
Cd	— 0,40	— 0,22
Ni	— 0,23	— 0,17
Sn	— 0,13	— 0,08
Pb	— 0,12	— 0,09
Sb	+ 0,10	+ 0,05
Bi	+ 0,22	+ 0,11
Cu	+ 0,34	+ 0,18
Ag	+ 0,80	+ 0,52
Hg	+ 0,80	+ 0,52
Au	+ 1,36	+ 0,91

Per quanto riguarda i valori dei potenziali elettrochimici reali del Potassio e del Sodio (il primo apparirebbe di 1 centesimo di volt inferiore al secondo) è da tener presente che la precisione delle misure dei Potenziali Voltiani effettuate con questi metalli non è certamente tale, nemmeno nel caso delle misure fotoelettriche, da permettere conclusioni in base a così piccole differenze.

Con i valori riportati nelle ultime colonne delle tabelle I e II ho disegnato il diagramma di fig. 3 il quale mostra con grande evidenza come fra i valori dei potenziali elettrochimici normali *reali* e quelli degli effetti Voltiani esterni passa una relazione di dipendenza la cui importanza è assai notevole in quanto sono appunto i valori dei potenziali

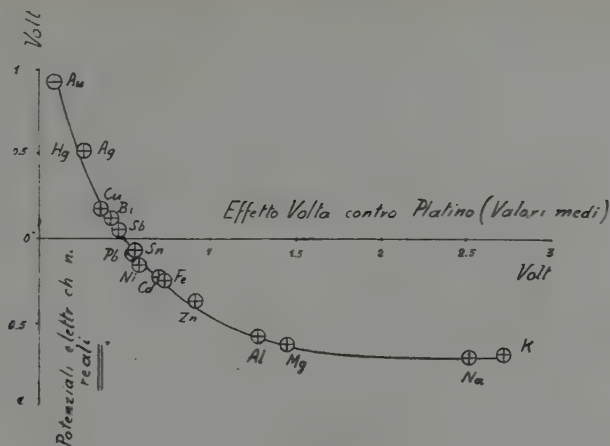


Fig. 3.

elettrochimici reali (e non già quelli degli apparenti) che corrispondono alle differenze fra i lavori di estrazione (con conseguente solvatazione) dell'ione metallico e dell'ione idrogeno rispettivamente dal metallo e dal Platino idrogenato, come ho esposto al principio di questa Nota.

Patologia. — *Prime ricerche sulla natura dell'agente della leucemia dei polli.* Nota ⁽¹⁾ di FRANCESCO PENTIMALLI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Per quanto la scoperta che la leucemia dei polli, come dovuta ad un agente filtrabile, sia stata fatta quasi alla stessa epoca di quella del sarcoma di Rous, pure essa ha attratto molto meno di questa l'interesse degli studiosi. Si tratta, invece, di una malattia sperimentalmente trasmissibile col filtrato, il cui studio eziopatogenetico può servire per i raffronti con la malattia spontanea dell'uomo e per la comprensione dell'essenza della entità morbosa tanto bene quanto lo è stato e continua ad esserlo, per il problema generale dei tumori, il sarcoma di Rous.

Come avvenne per i primi tempi dopo la dimostrazione della filtrabilità dell'agente del sarcoma, anche per la leucemia, fu concepita l'eziologia infettiva, come dovuta ad un virus vivente.

Scossa in questi ultimi tempi tale concezione per il sarcoma, in base a prove dirette (v. PENTIMALLI, nota precedente) e a induzioni tratte da altre malattie a virus filtrabili, che orientano verso una natura puramente chimica e non vivente dell'agente sarcomatoso, si è tentato da qualcuno un confronto del virus della leucemia con quello del sarcoma, tanto più che per alcune forme di leucemia trasmissibile degli animali è stata dimostrata la unicità eziologica potendo lo stesso virus causare una leucosi od un sarcoma. Considerazioni di natura puramente teoriche sono a tal proposito quelle recenti di ENGELBRETH-HOLM ⁽²⁾. Nessuna ricerca è stata finora diretta ad investigare la natura chimica dell'agente della leucemia e le presenti sono le prime in tal senso, per quanto condotte con criteri e con metodi finora soltanto di orientamento e non rappresentanti ancora l'isolamento e la purificazione del virus.

Gli esperimenti sono stati eseguiti con un ceppo molto virulento di eritroleucemia del pollo, inducente in un periodo medio di dieci giorni un grave, caratteristico quadro ematologico e corrispondenti alterazioni degli organi e in particolare del fegato, della milza e del midollo osseo. La milza raggiunge spesso il volume di un uovo di colombo ed è assai ricca di virus.

⁽¹⁾ Presentata nell'Adunanza del 16 dicembre 1939-XVIII.

⁽²⁾ ENGELBRETH-HOLM, « J. Klin. Wochs. », 17, 993, 1938.

Gli estratti erano allestiti con milza, fegato e talvolta midollo osseo triturati con sabbia di quarzo. Come liquido di estrazione si è adoperata soluzione fisiologica, tamponata con miscela di fosfati in concentrazione m/45 e più spesso m/60 ad un ph che in taluni casi era di 7,2 in altri di 7,4, in altri, infine, di 8,30. La triturazione dei tessuti e la estrazione si eseguiva a $+1^{\circ}$ C. in camera fredda.

Dagli estratti resi limpidi mercè centrifugazione e filtrazioni si ottenevano precipitati con solfato di ammonio in concentrazioni variabili (0,3-0,6 saturo); precipitati che lavati con solfato di ammonio in pari concentrazione, sciolti in fosfato neutro o lievemente alcalino, riprecipitati con solfato di ammonio, ridisciolti in fosfato ed infine dializzati, inducono, per introduzione endovena negli animali, un quadro eritroleucemico acuto, del tutto simile a quello che si ottiene col trapianto del ceppo originale. Il liquido supernatante ai precipitati è più o meno povero in agente a seconda della concentrazione raggiunta in solfato di ammonio. Così il supernatante del precipitato 0,3 saturo contiene ancora virus precipitabile da più elevata concentrazione di sale, il supernatante del precipitato 0,6 saturo è assolutamente inattivo.

La preparazione, pertanto, di precipitati proteici reversibili, cioè solubili per allontanamento del sale precipitante, e che sono attivi nel determinare il quadro morboso, costituisce la prima prova della natura proteica dell'agente relativo.

Un passo verso la identificazione della proteina specifica fu fatto nel ricercare, mediante precipitazione frazionata dei precipitati attivi ridisciolti, la quota proteica a capacità infettiva. Grandi difficoltà, finora solo in parte superate, si ebbero in queste ricerche perchè sperimentando con estratti notevolmente ricchi in virus i risultati sono scarsamente utilizzabili essendo che tutte le frazioni proteiche risultano attive; furono perciò adoperati, successivamente, estratti meno concentrati (5 %) con i quali si dimostra che l'agente precipita per una concentrazione 0,3 di solfato di ammonio.

Interessa far notare che è possibile talvolta osservare che mentre un precipitato 0,6 è biologicamente inattivo, le frazioni proteiche che si ottengono dalla precipitazione 0,2-0,3 di solfato ammonico di questo precipitato 0,6 ridisciolti sono capaci di generare la malattia. Ciò dimostra che nel precipitato 0,6 la proteina attiva era contenuta in debole concentrazione tanto da non raggiungere nelle piccole quantità usate per la inoculazione la soglia utile a determinare il processo patologico, concentrazione, invece, raggiunta nei riprecipitati 0,2-0,3 saturazione che corrisponde alla salatura meglio utile per gli estratti ordinari, i quali contengono ora in piccolo volume e perciò concentrata, tutta la proteina attiva dell'originario precipitato 0,6.

La proteina precipita, dunque, in prevalenza con una concentrazione 0,3 di solfato di ammonio. Anche quando ne resta in soluzione a tale con-

concentrazione di sale e si può precipitare perciò aumentando la quantità di solfato di ammonio, essa dimostra, se ridisciolta, le sue peculiarità in quanto è riprecipitabile ora per un contenuto in sale del 0,3-0,4, come la massa fondamentale inizialmente separata. Così, ad esempio, con un estratto al 10 %, il precipitato 0,3 e quello 0,6 sono stati entrambi attivi; sciogliendo e riprecipitando in varie frazioni questi due precipitati da quello 0,3 si ottengono due precipitati 0,2 e 0,3 saturi entrambi attivi, da quello 0,6 si ottengono quattro frazioni, due intermedie attive 0,3 e 0,4 e due estreme 0,2 e 0,6 inattive.

La inattività del precipitato 0,2, cioè il primo a formarsi è una buona prova della precipitazione specifica della proteina infettiva contro la supposizione di un trasporto puramente fisico dell'agente da adsorbimento alle masse precipitanti. Altra conferma si ha nel fatto che i precipitati acidi sono più attivi degli alcalini perchè la reazione acida favorisce la precipitazione proteica e non perchè favorisce i fenomeni di adsorbimento in quanto che anche un precipitato alcalino può diventare attivo se, aumentando la concentrazione del solfato di ammonio si ha una più abbondante precipitazione proteica. Così se si prepara un estratto a pH 7,1 il precipitato 0,3 saturo di solfato di ammonio è, naturalmente, infettivo. Il supernatante se acidificato (pH 5) dà un precipitato attivo, se alcalinizzato (pH 8) un precipitato inattivo. Portando il supernatante alcalino a concentrazione 0,5 di solfato ammonico si ha un precipitato alcalino attivo.

Da queste ricerche sono così indotto a ritenere, in prima approssimazione, che il problema della eritroleucemia dei polli è di natura chimica. La proteina costituente l'agente precipita prevalentemente ad una concentrazione 0,3-0,4 saturo di solfato di ammonio. La precipitazione è reversibile perchè la proteina ridisciolta per allontanamento del sale induce negli animali il tipico quadro morbosissimo.

Patologia. — *Sulla natura dell'agente del sarcoma dei polli.*

Nota ⁽¹⁾ di FRANCESCO PENTIMALLI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Il problema della natura dell'agente del sarcoma dei polli è stato investigato con metodi biologici, metodi chimici e metodi fisici, contribuendo tutti ad accrescere le nostre conoscenze. Il complesso dei risultati raggiunti non è stato però così soddisfacente, come in altri campi del vasto dominio dei virus.

Con i metodi della chimica analitica ed enzimatica si cercò di purificare gradatamente il filtrato per candela Berkefeld di un estratto di sarcoma; ma questi procedimenti non si dimostrarono sufficienti per la identificazione dell'agente esistente nel filtrato. Il filtrato di un tumore, anche dopo eliminazione di varie frazioni ottenute in modi diversi, rappresenta ancora un materiale troppo complesso. Tale enorme complessità del materiale di partenza costituisce il principale ostacolo, come io ritengo, che ha impedito fino ad oggi di giungere a risultati univoci e soddisfacenti.

Nel 1935 io comunicai ⁽²⁾ alla Leuuenoek Vereniging di Amsterdam che facendo circolare nei vasi di un tumore soluzione fisiologica, questa si carica di agente, tanto che la inoculazione di essa in un animale normale determina lo sviluppo di un tumore.

Precedenti mie ricerche ⁽³⁾ avevano dimostrato che lo stesso fenomeno avviene facendo circolare nella massa del tumore corpuscoli rossi normali; questi adsorbono l'agente, e non soltanto alla loro superficie, perchè la stessa molecola dell'emoglobina dimostra di contenerlo ⁽⁴⁾.

Noi abbiamo, nel liquido di perfusione di un tumore, limpido come acqua, un materiale che contiene l'agente, se non allo stato puro, accompagnato da una quantità di sostanze inattive di certo non paragonabile a quella degli estratti. Questa condizione favorevole è purtroppo accompagnata da una sfavorevole, e cioè dalla scarsa concentrazione dell'agente nel liquido, ciò che non impedisce, però, di profittare di questo materiale per scoprire alcune importanti proprietà fondamentali dell'agente.

⁽¹⁾ Presentata nell'Adunanza del 16 dicembre 1939-XVIII.

⁽²⁾ PENTIMALLI, Leuuenoek Vereniging, IV Conference, Amsterdam, 1935.

⁽³⁾ PENTIMALLI, « Bulletin Assoc. Franc. pour l'étude du Cancer », to. 24, 1935.

⁽⁴⁾ PENTIMALLI, « Verhandlungen Deut. Path. Ges. », 27. Tag. 1934

L'analisi chimica del liquido di perfusione dimostrò la presenza di una proteina, con un gruppo fosforato, nella quantità media di mgr. 0,70 per 100 cc. di liquido (nelle condizioni sperimentali adoperate). L'analisi spettrografica del liquido di perfusione mise in evidenza una banda di assorbimento nella regione dell'ultravioletto, intorno a $\lambda = 2800 \text{ \AA}$, banda spesso mascherata da altre sostanze che concorrono all'assorbimento, giacchè, come risulta dalle mie ricerche, la dialisi di un liquido che presenta una banda poco netta, allontanando le sostanze mascheranti, rende la banda oltremodo evidente. Tutti i possibili controlli indussero a mettere in relazione l'attività biologica del liquido di perfusione con la presenza in esso della proteina, di cui la banda è espressione, e che può ritenersi quindi come specifica. D'altra parte il comportamento spettrografico di questa proteina dimostra che si tratta di una sostanza con intensità di assorbimento tre volte maggiore delle proteine del plasma, e perciò non può essere identificata quale proteina plasmatica.

Fin dalle mie prime ricerche avanzai, però, la ipotesi che la specificità potesse non essere legata alla proteina stessa, ma ad un gruppo altamente reattivo, che sarebbe il quid veramente specifico, sorretto dalla proteina, che funzionerebbe semplicemente come un vettore colloidale.

Con gli esperimenti che riferisco nella presente Nota ho cercato di indagare se è la proteina, come tale, dotata della specifica attività biologica (produzione di un sarcoma), o se, trattandosi di un complesso, la sua costituzione di vettore colloidale rappresenti un aggruppamento inerte o un elemento indispensabile della sua attività biologica.

A questo scopo:

A) ho separato la proteina dal liquido di perfusione, precipitandola con solfato di ammonio;

B) ho adsorbito la proteina del liquido di perfusione con idrossido di alluminio;

C) ho fatto agire sulla proteina del liquido di perfusione una sostanza capace di idrolizzarla, come la pancreatina.

A

Il liquido di perfusione in tutte e tre queste serie di esperimenti fu ottenuto con il metodo descritto precedentemente in altro lavoro ⁽¹⁾, facendo circolare soluzione fisiologica, a pressione costante, attraverso l'alatutore del pollo separata dal corpo dell'animale; perciò non occorre qui ripetere i particolari di tecnica.

Il liquido di perfusione fu prima sottoposto a centrifugazione, e a filtrazione attraverso candela Berkefeld, ed una porzione (circa 20 cc.)

(¹) PENTIMALLI, *Tumori*. Vol. 22, fasc. 1^o, 1936.

inoculata nel muscolo pettorale di un animale per assicurarmi della sua attività a produrre il tumore. La precipitazione con solfato di ammonio fu fatta:

- 1) nel liquido di perfusione semplice;
- 2) nel liquido di perfusione concentrato su membrana di collo-dion, fatta usando un tubo da estrazione di alundum di media porosità (RA 360) impregnato di soluzione di nitroglicerina ottenuta sciogliendo 13 gm. di nitroglicerina secca, designata dalla Ditta Ch. Cooper e C^o. come « high temperature nitro-cellulose, 15°-30° viscosity » in 100 cc. di acido acetico glaciale.

In entrambi i casi, l'aggiunta di solfato di ammonio sino a 0,3-0,4 saturazione, determina la formazione di un precipitato che, dopo 24 ore di permanenza in ghiacciaia, è più o meno abbondante a seconda dei casi. Il precipitato, dopo separazione dal liquido originale, è lavato tre volte con solfato di ammonio 0,3 saturo, poi sciolto in tampone di fosfato m/60 Ph 8,30, riprecipitato con solfato di ammonio e ridiscioltto, infine, dializzato contro soluzione fisiologica con l'aggiunta di tampone di fosfato m/60 Ph 7,2. L'inoculazione di questo liquido nel muscolo pettorale del pollo normale produce sviluppo di tumore.

Il liquido di perfusione privato, con la precipitazione, della proteina, risulta costantemente inattivo.

Se, dopo la separazione del precipitato 0,3-0,4, si aggiunge al liquido residuale altra quantità di solfato di ammonio, in modo da portare la concentrazione a 0,6 saturazione, si ottiene un nuovo precipitato, ma in scarsa quantità, che non dimostra, con l'inoculazione, alcuna attività biologica.

Infine, la formazione di un precipitato attivo si ha tanto agendo sul liquido di perfusione originario, che ha reazione quasi neutra, quanto se si procede prima ad una leggera acidificazione, o ad una leggera alcalinizzazione di esso.

Talvolta si avvera il fenomeno che da un liquido di perfusione, che come tale dà luogo a sviluppo di tumore, si ottenga un precipitato 0,3 saturazione di solfato di ammonio biologicamente inattivo. Ciò non reca meraviglia in quanto è noto dalle ricerche di LORING ⁽¹⁾ che il trattamento della virus proteina del mosaico del tabacco col 10 % di solfato di ammonio determina una riduzione del 50 % della originaria attività e che cinque successive precipitazioni riducono l'attività biologica della proteina al 10 %. STANLEY ha trovato, a questo proposito, che la salatura al 30 % della proteina del Ring spot virus ne diminuisce l'attività del 50 %, mentre la permanenza in puffer di fosfato 0,01 M non produce alcuna attenuazione. Lo stesso STANLEY ⁽²⁾ in una recente disamina sulla natura delle virus

⁽¹⁾ H. S. LORING, « Journ. of biol. Chem. », vol. 126, 1938, p. 455.

⁽²⁾ W. M. STANLEY, « Physiological Reviews », vol. 19, 1939, p. 524.

proteine riferisce la interessante, per quanto inspiegata constatazione, che si hanno talvolta, mercè precipitazione con solfato di ammonio, preparati di virus proteina del mosaico aventi soltanto l'1 % della attività iniziale, il 99 % della proteina essendo inattivata. Tali preparati cristallizzano nella stessa identica maniera di quelli altamente attivi. Pertanto, il notevole numero degli esiti positivi ottenuti da me con i precipitati 0,3 dei perfusati di tumore costituisce così un risultato notevolmente vantaggioso.

B

Gli esperimenti di adsorbimento dell'agente, introdotti nell'oncologia sperimentale dalle mie ricerche comunicate alla *Deutsche pathologische Gesellschaft* nel 1927 ⁽¹⁾, furono, in seguito, da molti altri autori ripetuti, e confermati (MURPHY, CLAUDE). Quando, però, dall'adsorbimento biologico su materiale vivente (cellule embrionali) si passò a studiare il fenomeno sugli adsorbenti largamente in uso in enzimologia (caolino, carbone animale, idrossido di alluminio ecc.) i risultati degli Autori non furono concordi (FRAENKEL, MILONE, MASCHMANN, PIRIE e HOLMES, MURPHY e collaboratori, NAKAHARA ecc.).

Le questioni che possono sorgere dallo studio di un fenomeno chimico-fisico applicato ad un problema biologico non ricevettero cioè una chiara spiegazione principalmente per il solito fatto della estrema complessità del materiale di partenza, ma anche per la tecnica adoperata dai diversi autori. Dalle loro ricerche, infatti, risulta che una quantità di sostanze può adsorbire l'agente del sarcoma, che, in condizioni opportune, può essere anche eluito, ma non è stato possibile di assodare se l'agente è legato ad una determinata proteina ovvero è indipendente da ogni aggregato proteico. Anzi, MURPHY, STURM, CLAUDE e HELMER sostennero che l'adsorbimento della maggior parte delle sostanze proteiche di un estratto per mezzo dell'idrossido di alluminio, riesce piuttosto ad allontanare dall'estratto stesso un supposto inibitore, lasciando il supernatante, che ancora contiene però azoto proteico in discreta quantità, più attivo in potere oncogeno, anzichè separare l'agente insieme con le proteine, dal filtrato. Qua occorre notare, oltre il fatto che il punto di partenza è il solito materiale estremamente eterogeneo, che anche la tecnica non poteva corrispondere alle condizioni di un adsorbimento elettivo, perchè la maggior parte delle proteine dell'estratto venivano fissate insieme con aliquote del virus al gel di alluminio, mentre è condizione fondamentale di ogni ricerca di adsorbimento che il fattore che deve essere isolato o purificato si

⁽¹⁾ PENTIMALLI, « Verhandlungen d. Deutsche Pathologische Gesellschaft », 1927.

fissi precipuamente alle superfici adsorbenti, minimo essendo l'adsorbimento delle sostanze che l'accompagnano, escludendo cioè la concorrenza di fissazione superficiale. Più opportuno sembrava perciò lavorare con un liquido che pur contenendo l'agente in concentrazione sufficiente a dare l'effetto biologico, cioè lo sviluppo di sarcoma, fosse povero in sostanze estranee. A tali requisiti risponde quasi idealmente il liquido di perfusione del tumore il quale presenta anche il vantaggio che si possono usare piccole quantità di adsorbente su cui elettivamente si fissa l'agente tanto che l'eluato risulta infettivo mentre del tutto inattivo, almeno nella maggioranza dei casi, resta il liquido dopo l'adsorbimento.

MATERIALE E METODO.

In questi esperimenti fu sempre usato il liquido di perfusione. Quanto alla tecnica dell'adsorbimento, sono necessarie le seguenti brevi indicazioni:

a) *Adsorbente*. — Per ottenere un idrossido di alluminio che presenti limpida l'acqua di sospensione anche dopo molto tempo dalla preparazione, ho proceduto nel modo seguente: a 500 cc. di acqua distillata, leggermente riscaldata, si aggiungono 50 gr. di solfato di alluminio. Quando l'alluminio è tutto sciolto, si riscalda sino a ebollizione; durante l'ebollizione, si aggiungono, poco a poco, 50 cc. di ammoniaca concentrata, agitando il recipiente. Poi si fa bollire per 3 minuti circa. Si fa, quindi, raffreddare sino a circa 40°. Si filtra per filtro di porcellana; il residuo sul filtro si lava accuratamente con acqua distillata; si rifiltra per tre o quattro volte, sino a quando col reattivo di NESSLER non si dimostra più traccia di ammoniaca. Alla massa si aggiunge ancora acqua distillata in abbondanza. L'indomani si aspira l'acqua sovrastante al gel di alluminio, che è così pronto per l'uso;

b) *Tecnica dell'adsorbimento*. — A 100 cc. di liquido di perfusione si aggiungono goccia a goccia, ed agitando, 2 cc. di idrossido di alluminio, ottenuto come sopra, e si lascia per mezz'ora a temperatura ambiente, agitando ogni tanto la miscela.

Centrifugazione. Decantazione del supernatante. Rapido lavaggio con 50 cc. di acqua distillata dell'idrossido di alluminio, avendo cura di frammentare la massa del gel. Centrifugazione. Decantazione dell'acqua di lavaggio. Si aggiunge alla massa del gel 10 cc. di una soluzione di fosfato sodico bihasico, a concentrazione varia come è notato nei protocolli, e si lascia per mezz'ora anche alla temperatura del laboratorio, agitando di tanto in tanto.

Centrifugazione. Il liquido soprastante separato dal deposito, è usato per l'inoculazione nell'animale.

c) *Valutazione dei risultati*. — L'indice della potenza oncogena di una sostanza è di difficile determinazione, principalmente per il diverso

grado di suscettibilità individuale degli animali. L'insorgenza del tumore, stabilita dall'epoca in cui il tumore diventa sicuramente palpabile, è un dato fallace come dimostra l'esperienza; il peso raggiunto dal tumore dopo un determinato tempo dall'inoculazione, o a morte dell'animale, è egualmente in relazione con il grado di resistenza dell'animale stesso. Solo supponendo costante questo fattore, il peso del tumore può darci una idea della potenza oncogena della sostanza inoculata. E questo dato fu da me utilizzato.

Risultati. — Nella tabella seguente sono riassunti i risultati delle inoculazioni, facendo notare che il liquido di perfusione semplice, come controllo, fu inoculato in quantità di 20 cc. insieme con polvere di diatomee, nel muscolo pettorale. Ed una eguale quantità fu inoculata di liquido supernatante all'adsorbato, sempre con polvere di diatomee. Quanto alla eluizione, nei primi 2 esperimenti fu fatta successivamente, prima con fosfato M/30 e poi con fosfato M/15 sullo stesso gel di alluminio; negli esperimenti 3° e 4°, invece, il gel fu diviso in due porzioni e la eluizione fu fatta in una porzione con fosfato M/30 a ph 7,41 e nell'altra con fosfato M/15 a ph 8,43.

Numero esperimento	Liquido di perfusione semplice	Liquido supernatante dopo adsorbimento	Eluizione Fosfato M/30 ph = 8,43	Eluizione Fosfato M/15 ph = 8,43
1	gr. 120	negativo	gr. 5	gr. 130
2	72	negativo	negativo	9
3	34	negativo	negativo ph = 7,41	19
4	80	gr. 0,80	gr. 45 ph = 7,41	65
5	15	negativo		negativo
6	45	negativo		negativo
7	9	negativo		negativo
8	30	negativo		gr. 23
9	6	negativo		negativo
10	90	negativo		gr. 0,50
11	38	negativo		negativo
12	50	gr. 5		gr. 2
13	25	negativo		negativo

C

Gli esperimenti con la pancreatina MERCK, furono fatti egualmente sul liquido di perfusione originario il quale ha generalmente un $\text{ph} = 7$, e perciò si aggiungevano ogni volta piccole quantità di fosfato di SORESENSEN per ottenere quell'optimum di alcalinità, che è necessaria per l'azione enzimatica triptica. In generale, bastava l'aggiunta di 1 cc. di fosfato per portare l'alcalinità del liquido di perfusione a $\text{ph} = 7,45$.

La pancreatina fu aggiunta in quantità di gr. 0,05 in ogni recipiente che conteneva 20 cc. di liquido di perfusione.

Fu necessario un doppio ordine di controlli, cioè a temperatura ambiente e a temperatura di 37° , per il fatto che, durante l'incubazione, prolungata per 3 ore, può aversi una inattivazione dell'agente che GYE e PIRIE attribuiscono ad una ossidazione dell'agente stesso.

I risultati, vagliati in gr. di tessuto-tumore, anche in questa serie di esperimenti, sono riportati nella seguente tabella, dalla quale risulta che l'azione della pancreatina porta generalmente ad una inattivazione dell'agente, ed una sola volta l'attività di esso, per quanto assai ridotta, non fu spenta del tutto.

	1° controllo 20 cc. liq. perfusione ghiacciaia	2° controllo 20 cc. liq. perfusione termostato	20 cc. liq. perfu- sione + 1 cc. fo- sfato ghiacciaia	20 cc. liq. perf. + 1 cc. fosfato termostato	20 cc. liq. per- fusione + 1 cc. fosfato + pan- creatina termostato
1	gr. 42		gr. 37	gr. 6	negativo
2	50	gr. 35	36	25	negativo
3	9	3	negativo	negativo	negativo
4	56		gr. 53	gr. 40	gr. 2
5	6	negativo	negativo	negativo	negativo
6	5	gr. 4	negativo	negativo	negativo
7	35		gr. 40	negativo	negativo
8	38		negativo	gr. 45	negativo

Per una esatta valutazione del significato dei riferiti esperimenti a riguardo della già esposta questione se l'attività biologica del liquido di perfusione è dovuta alla proteina che esso contiene, e se questa proteina

è essa stessa l'agente del sarcoma o parte dell'agente medesimo, sono necessarie le seguenti considerazioni.

Non vi è dubbio che il liquido di perfusione privato della proteina mediante la precipitazione con solfato di ammonio, rimane spogliato della sua attività, la quale risulta ora appartenere soltanto al precipitato proteico. Sarebbe, quindi, naturale la supposizione che la sostanza proteica precipitata costituisca l'agente. Ma si potrebbe sempre avanzare l'ipotesi che l'agente, supposto invece di natura non proteica, aderisca al precipitato, e sia trascinato da esso; tuttavia, poichè si tratta di un precipitato reversibile, che può essere sciolto, riprecipitato e ridisciolto, tale ipotesi riesce sempre meno probabile.

L'adsorbimento con idrossido di alluminio della proteina contenuta nel liquido di perfusione egualmente spoglia il liquido della proteina e lo rende inattivo. Tranne che in due casi, su tredici esperimenti, il supernatante, infatti, inoculato nell'animale, non ha dimostrato potere oncogeno. Tale supernatante, nelle condizioni sperimentali usate, non ha mai presentato intorbidamento per l'aggiunta di acido solfosalicilico, neanche nei due casi in questione.

Perciò, se esso si è dimostrato attivo (ma non in eguale misura) come la proteina che conteneva e che è stata adsorbita, non rimangono che due spiegazioni possibili: o che una aliquota di agente si trovi già ancorato ad altri corpi, p. es. lipidi, che non vengono adsorbiti dall'idrato di alluminio, come risulterebbe da altre mie ricerche di ultracentrifugazione, o che l'acido solfosalicilico non riesce a svelare piccole quantità di proteine che sono assai meglio rivelate da un reattivo biologico straordinariamente sensibile quale è l'organismo dell'animale.

Dal complesso degli esperimenti risulta, inoltre, che l'eluato ha un potere oncogeno notevolmente ridotto, al punto che se il liquido di perfusione è poco ricco di agente, l'inoculazione dell'eluato riesce negativa. Questo fatto dimostra che il processo fisico di adsorbimento non riesce indifferente per le proprietà biologiche della proteina.

Altri esperimenti miei, di cui riferirò prossimamente, dimostrano che le proteine dell'eluato, indagate con l'ultracentrifugazione, presentano una curva di sedimentazione assai irregolare, da attribuirsi ad una parziale denaturazione. Essendo la loro struttura alterata, è spiegabile la diminuzione della loro attività biologica.

Come negli esperimenti di adsorbimento su materiale non biologico può aversi una parziale denaturazione dell'agente che porta ad una diminuzione della sua attività, così nelle ricerche di adsorbimento dell'agente su materiale biologico può aversi un esito negativo per alterazione delle superficie adsorbenti.

Come ho dimostrato precedentemente col filtrato, e come posso oggi confermare col liquido di perfusione, le cellule embrionali costituiscono un

ottimo materiale adsorbente per l'agente. Se esse, però, sono riscaldate per 20 minuti a 55°-56°, l'esito della inoculazione diviene incerto, e se riscaldate per 40 minuti alla stessa temperatura diviene negativo.

Ciò dimostra che la diretta azione dell'agente sulle superfici è impedita da una alterazione di esse.

Infine, l'azione della pancreatina riesce ad inattivare sicuramente l'agente contenuto nel liquido di perfusione, ciò che dimostra che esso deve avere la costituzione di una sostanza proteica, o che almeno una molecola proteica entra nella sua composizione quale elemento indispensabile della sua capacità biologica.

In conclusione, tutte e tre le serie di ricerche fatte sul liquido di perfusione si accordano per indurci a ritenere che la sostanza di natura proteica da me messa in evidenza con metodi chimici e spettrografici, sia dotata dell'attività biologica di produrre un sarcoma, sia cioè l'agente stesso di questo tumore, o comunque indispensabile alla sua attività.

NOTE PRESENTATE DA ACCADEMICI
E DA AGGREGATI ALLA R. ACCADEMIA D'ITALIA

Matematica. — *Contributi alla geometria analitica degli spazi di Hermite.* Nota di WILHELM BLASCHKE, presentata ⁽¹⁾ da ENRICO BOMPIANI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

I. *Lo spazio ellittico di Hermite.* Una matrice X (o un « vettore ») a una sola colonna (verticale) cogli elementi complessi x_k ; ($k = 0, 1, \dots, n$) definisce un punto x dello spazio hermitiano ellittico H_{2n} a n dimensioni complesse o a $2n$ dimensioni reali, se

$$\sum x_k \bar{x}_k > 0.$$

\bar{x}_k significa il numero complesso coniugato di x_k . Due vettori linearmente dipendenti X e fX ($f \neq 0$ scalare) determinano lo stesso punto. S'introduce il *prodotto scalare* di due tali vettori

$$(X Y) = \sum x_k \bar{y}_k.$$

La distanza di due punti x, y sarà data dalla formola

$$\cos^2 \vartheta = \frac{(X \bar{Y}) (Y \bar{X})}{(X \bar{X}) (Y \bar{Y})}$$

o

$$\sin^2 \vartheta = \frac{\sum_{j < k} |x_j \bar{y}_k - x_k \bar{y}_j|^2}{(X \bar{X}) (Y \bar{Y})}.$$

II. *Le catene normali.* Una *catena normale* dello spazio H_{2n} è definita da un insieme $\{X\}$ di vettori X colle seguenti *proprietà caratteristiche*.

1) X e X^* essendo contenute in $\{X\}$, $\{X\}$ contiene anche il vettore

$$\xi X + \xi^* X^*,$$

con ξ, ξ^* numeri *reali* arbitrari.

2) Il prodotto scalare $(X^* X)$ di due vettori di $\{X\}$ è sempre *reale*.

⁽¹⁾ Nell'Adunanza del 16 dicembre 1939-XVIII.

Allora esiste sempre una *base* di $s + 1$ vettori X_0, X_1, \dots, X_s ($s \leq n$), cosicchè

$$(X_j \bar{X}_k) = \delta_{jk}$$

e ogni elemento della nostra catena può essere combinata linearmente e realmente dalla base:

$$X = \xi_0 X_0 + \xi_1 X_1 + \dots + \xi_s X_s.$$

Una tale catena normale sarà chiamata N_s . La base è determinata salvo una sostituzione

$$X_i^* = e^{i\varphi} \sum_{k=0}^s \alpha_{jk} X_k; \quad j = 0, 1, \dots, s$$

dove la matrice A delle α_{jk} è reale e ortogonale: $A = \bar{A}$, $AA' = J$. Tutto questo è conosciutissimo ⁽¹⁾.

III. *Il problema.* Consideriamo il gruppo G dei movimenti hermitiani

$$X^* = CX,$$

dove la matrice quadratica C di $n + 1$ colonne soddisfa la condizione

$$C' C = J,$$

cosicchè i movimenti hermitiani conservino i prodotti scalari $(X \bar{Y})$. Cerchiamo *gli invarianti comuni di due catene normali* $N_s N_t$ per il gruppo G .

Siano $X_k; k = 0, 1, s$ e $Y_\alpha \dots \alpha = 0, 1, \dots, t$ due basi delle N_s, N_t . S'introduce la matrice R degli elementi

$$r_{k\alpha} = (X_k \bar{Y}_\alpha) \quad ; \quad \begin{array}{l} k = 0, 1, \dots, s \\ \alpha = 0, 1, \dots, t. \end{array}$$

Cambiando le due basi la matrice R cambia nel modo seguente

$$[1] \quad R^* = ARB',$$

⁽¹⁾ Cfr. per esempio le Note dello stesso autore sullo stesso argomento:

Densità negli spazi di Hermite. « Rendiconti Lincei » [6], 29, 1° sem. 1939-XVII, pp. 105-108.

Sulla geometria di Hermite. « Rendiconti Seminario Milano », 13, 1939-XVII, in corso di stampa.

e in collaborazione con H. TERHEGGEN: *Trigonometria hermitiana.* « Rendiconti Seminario Roma », 1. IV, 3, 1939-XVIII, in corso di stampa.

dove A, B sono matrici quadratiche di $s + 1$ e $t + 1$ colonne reali e ortogonali:

$$A = \bar{A} \quad , \quad AA' = J,$$

$$B = \bar{B} \quad , \quad BB' = J.$$

In secondo luogo abbiamo da considerare cambiamenti di questo tipo

$$X_k^* = e^{i\varphi} X_k \quad , \quad Y^* = e^{i\psi} Y,$$

[2]

$$r_{k\alpha}^* = e^{i(\varphi - \psi)} r_{k\alpha}.$$

Il nostro problema coincide colla classificazione delle matrici R sotto questi cambiamenti [1], [2]. Andiamo a considerare gli esempi più semplici.

IV. *Figura d'un punto con una catena normale* N_1 .

Prendiamo in primo luogo $s = 0$, $t = 1$. La matrice R contiene i soli elementi

$$r_0 = (X \bar{Y}_0) \quad , \quad r_1 = (X \bar{Y}_1).$$

Si trovano due invarianti reali essenziali della nostra figura:

$$\rho = r_0 \bar{r}_0 + r_1 \bar{r}_1,$$

$$i\omega = \begin{vmatrix} r_0 \bar{r}_0 \\ r_1 \bar{r}_1 \end{vmatrix}.$$

$\omega = 0$ è la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza d'una N_2 passante per il nostro punto e per la catena N_1 .

V. *Figura formata da due catene normali* N_1 .

In secondo luogo andiamo a considerare il caso $s = t = 1$ di due N_1 nello stesso spazio H_4 . S'ottengono 4 invarianti $\lambda, \mu; \sigma, \tau$ reali ed essenziali, indipendenti fra di loro:

$$\lambda = r_{00} \bar{r}_{11} - r_{01} \bar{r}_{10} + r_{11} \bar{r}_{00} - r_{10} \bar{r}_{01},$$

$$\mu = r_{00} \bar{r}_{00} + r_{01} \bar{r}_{01} + r_{10} \bar{r}_{10} + r_{11} \bar{r}_{11},$$

$$i\sigma = r_{10} \bar{r}_{00} + r_{11} \bar{r}_{01} - r_{00} \bar{r}_{10} - r_{01} \bar{r}_{11},$$

$$i\tau = r_{00} \bar{r}_{01} + r_{10} \bar{r}_{11} - r_{01} \bar{r}_{00} - r_{11} \bar{r}_{10}.$$

Mediante le espressioni

$$D = r_{00} r_{11} - r_{01} r_{10},$$

$$Q = r_{00}^2 + r_{01}^2 + r_{10}^2 + r_{11}^2$$

formiamo il quinto invariante:

$$iv = \bar{Q}D - Q\bar{D}.$$

La condizione

$$1 + D\bar{D} = \mu$$

è caratteristica per l'esistenza d'un H_1 contenente le due N_1 . v^2 è una funzione razionale delle $\lambda, \mu, \sigma, \tau$. Le $\lambda, \mu; \sigma, \tau; v$ caratterizzano completamente la nostra figura delle due catene normali N_1 nello spazio H_4 rispetto al gruppo G .

$$\sigma + \tau = 0$$

è la condizione per l'esistenza d'una catena N_2 , alla quale le N_1 sono simmetriche.

$$\sigma = \tau = 0$$

sono le condizioni per l'intersezione delle N_1 . Poi abbiamo

$$\sigma = \tau = v = 0$$

per due N_1 nella stessa N_2 , e

$$\sigma = \tau = 0, \quad \mu = 2$$

per due N_1 nello stesso H_2 . I quattro invarianti $\lambda, \mu; \sigma, \tau$ si possono esprimere mediante quattro altri aventi un significato geometrico immediato.

La ricerca degli invarianti d'una figura formata da una catena N_1 e da una N_2 nello stesso H_4 si riduce alla ricerca degli invarianti di due N_1 con $\sigma + \tau = 0$.

Particolarità darò altrove.

Matematica. — *Sulle superficie quasi-asintotiche della V_1^6 di S_8 che rappresenta le coppie di punti di due piani.* Nota di MARIO VILLA, presentata ⁽¹⁾ da ENRICO BOMPIANI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. La nozione di superficie quasi-asintotica (più in generale: di varietà quasi-asintotica) di una varietà è una spontanea estensione di quella di curva quasi-asintotica (BOMPIANI).

Mentre la teoria delle curve quasi-asintotiche ha già raggiunto un notevole sviluppo, ben poco è stato fatto sulle superficie quasi-asintotiche che pure appaiono destinate a prestare utilissimi servizi.

Un primo esempio di varietà quasi-asintotiche si è presentato al BOMPIANI nello studio di varietà rappresentanti certi sistemi di equazioni a derivate parziali ⁽²⁾.

Altro esempio interessante di V_3 che posseggono superficie quasi-asintotiche trovasi in un lavoro recente di BOGDAN che si può considerare come il primo lavoro sull'argomento ⁽³⁾. Un altro esempio di varietà che possiede superficie quasi-asintotiche è fornito dalla V_1^6 di S_8 di SEGRE (e più in generale dalle V_k di SEGRE), come si vedrà nella presente Nota.

Per definizione ⁽⁴⁾:

Una superficie di una varietà V_k ($k > 2$) è quasi-asintotica $\sigma_{r,s}$ ($0 < r < s$) per V_k quando l' $S(r)$ osculatore a V_k in un punto generico della superficie e l' $S(s)$ osculatore ivi alla superficie hanno uno spazio congiungente di dimensione d inferiore a quella che si avrebbe per una superficie generica di V_k .

⁽¹⁾ Nell'Adunanza del 16 dicembre 1939-XVIII.

⁽²⁾ E. BOMPIANI, *Sistemi di equazioni simultanee alle derivate parziali a caratteristica*. « Rend. dell'Accademia di Torino », vol. 49, n. 27, 1913-14.

⁽³⁾ C. BOGDAN, *Sopra una classe di V_3 che ammettono una infinità di superficie quasi-asintotiche dipendente da una funzione arbitraria*. « Rend. dell'Accademia dei Lincei », 1938, ser. 6^a, vol. XXVII, p. 62. Superficie quasi-asintotiche di una V_3 si presentano di necessità in un lavoro di P. BUZANO, *Varietà a tre dimensioni integrali di un sistema di equazioni a derivate parziali lineari e omogenee*. « Memorie dell'Accademia di Torino », 1939, ser. 2^a, vol. 69, pp. 15-16.

⁽⁴⁾ E. BOMPIANI, *Recenti progressi nella geometria proiettiva differenziale degli iperspazi*. « Proceedings of the fifth International Congress of Mathematicians ». Cambridge, 1912, vol. II, p. 24.

Si osserverà però subito che per le superficie quasi-asintotiche (e più in generale: per le varietà quasi-asintotiche) si presenta un fatto nuovo, che non ha l'analogo per le curve quasi-asintotiche. La dimensione d del predetto spazio congiungente può infatti avere valori diversi per gli stessi valori di k, r, s : i d di due $\sigma_{r,s}$ di V_k potendo benissimo avere valore diverso pur avendo ugual dimensione gli $S(s)$ osculatori di esse.

Corrispondentemente ai vari valori di d si hanno così vari tipi, proiettivamente distinti, di superficie quasi-asintotiche $\sigma_{r,s}$.

Altrettanto non avviene invece per le curve quasi-asintotiche $\gamma_{r,s}$ ($r < s$) di una V_k perchè si ha $S(s) \equiv S_s$ (se l' $S(s)$ non è indeterminato) e la dimensione dello spazio congiungente l' $S(r)$ osculatore a V_k e l' S_s ha un certo valore d_0 ; non può acquistare il valore $d_0 - 1$ perchè l' $S(s-1) \equiv S_{s-1}$ e l' $S(r)$ avrebbero uno spazio congiungente di dimensione $d_0 - 1$ e la curva sa rebbe una $\gamma_{r,s-1}$ (non una $\gamma_{r,s}$).

Se per una superficie quasi-asintotica $\sigma_{r,s}$ di V_k d ha il massimo valore μ la $\sigma_{r,s}$ si dirà di 1^a specie e s'indicherà con $\sigma_{r,s}^1$. Se invece $d = \mu - 1$, $\sigma_{s,r}$ si dirà di 2^a specie e s'indicherà con $\sigma_{r,s}^2$, e così di seguito...

Consideriamo, ad esempio, le superficie quasi-asintotiche $\sigma_{1,2}$ che ci interessano particolarmente nel presente lavoro.

Una superficie di V_k è $\sigma_{1,2}$ per essa quando l' S_k tangente a V_k in un punto generico della superficie e l' $S(2)$ osculatore ivi alla superficie hanno uno spazio congiungente di dimensione $d < k + 3$.

Si hanno quindi tre tipi di $\sigma_{1,2}$: le $\sigma_{1,2}$ di 1^a specie (le $\sigma_{1,2}^1$) per le quali $d = k + 2$; le $\sigma_{1,2}$ di 2^a specie (le $\sigma_{1,2}^2$) per le quali $d = k + 1$; le $\sigma_{1,2}$ di 3^a specie (le $\sigma_{1,2}^3$) per le quali $d = k$.

Come ora vedremo, la V_4^6 di S_8 di Segre possiede $\sigma_{1,2}$ di tutte e tre le specie⁽¹⁾: i risultati che otterremo sulle $\sigma_{1,2}$ della V_4 di SEGRE serviranno anche a lumeggiare le considerazioni precedenti.

2. Sussiste il teorema:

Le superficie quasi-asintotiche $\sigma_{1,2}$ della V_4^6 di S_8 che rappresenta le coppie di punti di due piani, sono tutte e sole le superficie che rappresentano corrispondenze (algebriche o no) degeneri fra i due piani⁽²⁾.

Più precisamente:

⁽¹⁾ Le $\sigma_{1,2}$ considerate da BOGDAN (loc. cit.) sono $\sigma_{1,2}^1$ mentre quelle che si presentano nel lavoro cit. di BUZANO sono $\sigma_{1,2}^2$.

⁽²⁾ Ci limitiamo alla V_4 di SEGRE perchè essa costituisce il caso significativo più semplice, ma il teorema si estende senz'altro alle $\sigma_{1,2}$ delle V_k di SEGRE, rappresentanti le coppie di punti di due spazi, sulle quali esistono anche varietà quasi-asintotiche (di dimensione > 2).

Tutte e sole le superficie della V_4 di SEGRE che rappresentano corrispondenze degeneri di I, II, III tipo sono rispettivamente quasi-asintotiche $\sigma_{1,2}$ di 1^a, 2^a, 3^a specie di essa.

Ricordiamo che una corrispondenza fra due piani π_1, π_2 è *degenere* quando il punto Q_1 di π_1 corrispondente del punto Q_2 di π_2 , al variare di Q_2 , non descrive tutto π_1 ma una curva C_1 di esso, oppure rimane fisso ⁽¹⁾. (E analogamente scambiando gli indici 1 e 2). Si hanno quindi tre tipi di corrispondenze degeneri:

Corrispondenze degeneri di primo tipo: Il punto Q_1 , al variare di Q_2 , descrive una curva C_1 , mentre, al variare di Q_1 sopra C_1 , Q_2 descrive tutto π_2 . In questa corrispondenza ad un punto Q_1 di C_1 corrispondono tutti e soli i punti di una curva F di π_2 ; le ∞^1 curve F , che corrispondono agli ∞^1 punti Q_1 di C_1 , compongono una famiglia $|F|$ (e analogamente scambiando gli indici 1 e 2).

Corrispondenze degeneri di secondo tipo: Il punto Q_1 al variare di Q_2 descrive una curva C_1 , e così, al variare di Q_1 sopra C_1 , Q_2 descrive una curva C_2 . In questa corrispondenza ad un punto di C_1 (di C_2) corrispondono tutti e soli i punti di C_2 (di C_1).

Corrispondenze degeneri di terzo tipo: Ad un punto fisso di uno dei piani corrispondono tutti i punti dell'altro piano.

3. Dimostriamo ora il teorema preannunciato.

Sulla V_4 di SEGRE $x(u_1, v_1, u_2, v_2)$ che rappresenta le coppie di punti $(u_1, u_2), (v_1, v_2)$ di due piani π_1, π_2 s'individuì una superficie ponendo

$$u_2 = f(u_1, v_1), \quad v_2 = \varphi(u_1, v_1) \quad \text{e sia} \quad \bar{x}(u_1, v_1) = x(u_1, v_1, f, \varphi) \quad (2).$$

Le x della V_4 di SEGRE sono:

$$u_1 v_1, \quad u_1 v_2, \quad u_2 v_1, \quad u_2 v_2, \quad u_2, \quad v_2, \quad u_1, \quad v_1, \quad 1$$

quindi

$$[*] \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u_2^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial v_1^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v_2^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial v_1 \partial v_2} = 0.$$

(1) Noi supponiamo che le corrispondenze fra π_1, π_2 , e quindi le superficie che le rappresentano sulla V_4 di SEGRE, siano *irriducibili*. Non intervengono quindi altri casi oltre ai predetti.

(2) I piani di V_4 non si possono rappresentare come nel testo avendosi $u_1 = \text{cost.}, u_2 = \text{cost.}$ (oppure $v_1 = \text{cost.}, v_2 = \text{cost.}$), ma essi sono manifestamente $\sigma_{1,2}$ di V_4 e nella dimostrazione del teorema possiamo prescindere da essi.

Segue $\left(f_1 = \frac{\partial f}{\partial u_1}, f_2 = \frac{\partial f}{\partial v_1}, \dots\right)$

$$[1] \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u_1^2} = 2 \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial v_2} \varphi_1 + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial u_2 \partial v_2} f_1 \varphi_1 + \frac{\partial x}{\partial u_2} f_{11} + \frac{\partial x}{\partial v_2} \varphi_{11} \\ \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u_1 \partial v_1} = \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial v_1} + \frac{\partial^2 x}{\partial v_1 \partial u_2} f_1 + \frac{\partial^2 x}{\partial u_2 \partial v_2} (\varphi_1 f_2 + f_1 \varphi_2) + \\ + \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial v_2} \varphi_2 + \frac{\partial x}{\partial u_2} f_{12} + \frac{\partial x}{\partial v_2} \varphi_{12} \\ \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial v_1^2} = 2 \frac{\partial^2 x}{\partial u_2 \partial v_1} f_2 + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial u_2 \partial v_2} f_2 \varphi_2 + \frac{\partial x}{\partial u_2} f_{22} + \frac{\partial x}{\partial v_2} \varphi_{22} \end{cases}$$

La dipendenza lineare di questi tre punti e dell' S_4 tangente in x equivale alla dipendenza lineare di S_4 e dei punti

$$[2] \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u_2 \partial v_2} f_1 + \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial v_2} \right) \varphi_1, & \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u_2 \partial v_2} \varphi_2 + \frac{\partial^2 x}{\partial u_2 \partial v_1} \right) f_2, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u_2 \partial v_2} (\varphi_1 f_2 + f_1 \varphi_2) + \frac{\partial^2 x}{\partial v_1 \partial u_2} f_1 + \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial v_2} \varphi_2 + \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial v_1} \end{cases}$$

Se $\varphi_1 = 0$, o $f_2 = 0$, o $f_2 = \varphi_1 = 0$ la dipendenza è evidente. Se $\varphi_1 f_2 \neq 0$ la matrice degli ultimi tre punti è

$$\begin{vmatrix} f_1 & 1 & 0 & 0 \\ \varphi_2 & 0 & 1 & 0 \\ \varphi_1 f_2 + f_1 \varphi_2 & \varphi_2 & f_1 & 1 \end{vmatrix}$$

e non possono essere nulli tutti i suoi minori del 3° ordine (poichè uno di essi è = 1). Quei punti sono fra loro indipendenti ed evidentemente anche da quelli dell' S_4 tangente (1).

Concludendo: perchè la superficie \bar{x} sia $\sigma_{1,2}$ è necessario e sufficiente che si presenti uno dei due casi

$$[1^\circ] \quad f_2 = 0, \quad \varphi_1 \neq 0 \quad (\text{opp. } f_2 = 0, \quad \varphi_1 = 0)$$

$$[2^\circ] \quad f_2 = 0, \quad \varphi_1 = 0.$$

Nel primo caso la corrispondenza fra π_1, π_2

$$u_2 = f(u_1, v_1)$$

$$v_2 = \varphi(u_1, v_1)$$

(1) Il procedimento ora esposto, che si fonda sull'osservazione che per la V_4 di SEGRE sussistono le [*], semplifica notevolmente la dimostrazione del teorema; esso mi è stato cortesemente suggerito dal prof. BOMPIANI.

che la superficie rappresenta è degenerare di primo tipo perchè essendo $f_2 = 0$, nella f manca v_1 e riducesi quindi a

$$[3] \quad \begin{cases} u_2 = f(u_1) \\ v_2 = \varphi(u_1, v_1) \end{cases}$$

(analogamente se $\varphi_1 = 0$, $f_2 \neq 0$).

Nel secondo caso la corrispondenza fra π_1, π_2

$$\begin{aligned} u_2 &= f(u_1, v_1) \\ v_2 &= \varphi(u_1, v_1) \end{aligned}$$

che la superficie rappresenta è degenerare di secondo tipo perchè essendo $f_2 = \varphi_1 = 0$, nella f manca v_1 e nella φ manca u_1 , e riducesi quindi a

$$[4] \quad \begin{cases} u_2 = f(u_1) \\ v_2 = \varphi(v_1) \end{cases}$$

Inversamente, se la corrispondenza che la superficie rappresenta è degenerare di primo o di secondo tipo può scriversi nella forma [3] o [4] e quindi è $f_2 = 0$, $\varphi_1 \neq 0$ (opp. $\varphi_1 = 0$, $f_2 \neq 0$) o $f_2 = 0$, $\varphi_1 = 0$. Si conclude (tenendo presenti anche i piani di V_4 che sono $\sigma_{1,2}^1$ e che provengono dalle corrispondenze degeneri di terzo tipo): le superficie $\sigma_{1,2}$ di V_4 sono tutte e sole quelle che rappresentano corrispondenze degeneri fra i piani π_1, π_2 .

Se la $\sigma_{1,2}$ rappresenta una corrispondenza di primo tipo allora uno solo dei punti [2] svanisce e lo spazio congiungente l' S_4 tangente a V_4 e l' $S(2)$ osculatore alla superficie ha esattamente dimensione 6: la $\sigma_{1,2}$ è cioè $\sigma_{1,2}^1$.

Se la $\sigma_{1,2}$ rappresenta invece una corrispondenza di secondo tipo allora due dei punti [2] svaniscono e lo spazio congiungente l' S_4 e l' $S(2)$ ha esattamente dimensione 5: la $\sigma_{1,2}$ è cioè $\sigma_{1,2}^2$.

1. Si ha:

Sulla V_4 di SEGRE, le superficie quasi-asintotiche $\sigma_{1,2}^1$ sono tutte e sole le superficie che posseggono uno ed un solo fascio ⁽¹⁾ di curve piane, i cui piani giacciono su V_4 e appartengono ad una stessa schiera ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Fascio di curve sopra una superficie è una totalità ∞^1 di curve tale che per ogni punto della superficie ne passa una sola.

⁽²⁾ Com'è ben noto la V_4 di SEGRE contiene due schiere ∞^2 di piani, provenienti dalle coppie costituite da un punto fisso di π_1 (di π_2) e dai punti di π_2 (di π_1). Per ogni punto di V_4 passano due piani rispettivamente delle due schiere; due piani di una stessa schiera sono sghembi e due piani di schiere diverse sono sempre incidenti. I piani di una schiera sono riferiti collinearmente (a π_1 od a π_2) da quelli dell'altra.

La condizione è necessaria: infatti, per il teorema del n. 2, la superficie $\sigma_{1,2}^1$ rappresenta una corrispondenza degenera di I tipo fra i piani π_1, π_2 . In questa corrispondenza il punto Q_1 di π_1 , al variare di Q_2 sopra π_2 , descrive una curva C_1 ; e ad un punto Q_1 di C_1 corrispondono tutti e soli i punti di una curva F di π_2 . Le ∞^1 coppie composte da un punto Q_1 di C_1 e dagli ∞^1 punti corrispondenti di F sono rappresentate su V_4 dai punti di una curva piana: il piano α della curva giace su V_4 , poichè rappresenta le coppie composte da Q_1 e dai punti di π_2 , e la curva stessa è la corrispondente di F nella collineazione determinata fra α e π_2 dai piani della schiera a cui α non appartiene.

Corrispondentemente agli ∞^1 punti Q_1 di C_1 , vi sono quindi su $\sigma_{1,2}^1$ ∞^1 curve piane componenti un fascio; e i piani di queste curve giacciono su V_4 e appartengono ad una stessa schiera.

La condizione è sufficiente: consideriamo sulla V_4 di SEGRE una superficie che possiede uno ed un solo fascio di curve piane, i cui piani giacciono su V_4 e fanno parte di una stessa schiera. Per il teorema del n. 2, basterà dimostrare che la corrispondenza rappresentata da tale superficie è degenera di I tipo. Infatti gli ∞^1 piani a cui appartengono le curve del fascio (e che, per fissare le idee, supporremo appartenenti alla seconda schiera) provengono da ∞^1 punti di π_1 , che compongono una curva C_1 . La corrispondenza rappresentata dalla superficie è quindi degenera perchè le coppie Q_1, Q_2 , che rappresentano i punti della superficie, sono tali che i punti Q_1 compongono la curva C_1 (la corrispondenza è poi degenera di I tipo perchè è unico il fascio di curve piane del tipo predetto che la superficie possiede).

Osservazione: Le $\sigma_{1,2}^1$ rigate della V_4 di SEGRE sono soltanto quelle per cui le curve piane del fascio sono rette; le corrispondenze degeneri di I tipo da esse rappresentate sono cioè tali che le curve della famiglia $|F|$ sono tutte rette.

Dal teorema del n. 2 segue:

Le superficie quasi-asintotiche $\sigma_{1,2}^2$ della V_4 di SEGRE che rappresenta le coppie di punti di due piani, sono tutte e sole le superficie che rappresentano le coppie di punti di due curve C_1, C_2 (algebriche o no) tracciate rispettivamente sui due piani.

Si ha:

Sulla V_4 di SEGRE, le superficie quasi-asintotiche $\sigma_{1,2}^2$ sono tutte e sole le superficie che posseggono due fasci di curve piane, i cui piani giacciono su V_4 : i piani relativi a uno dei fasci appartengono ad una schiera, i piani relativi all'altro fascio all'altra schiera.

La condizione è necessaria: infatti la superficie $\sigma_{1,2}^2$ rappresenta le coppie di punti di due curve C_1, C_2 tracciate rispettivamente su due piani π_1, π_2 . Le ∞^1 coppie composte da un punto $Q_1 (Q_2)$ di $C_1 (C_2)$ e dagli ∞^1 punti di $C_2 (C_1)$ sono rappresentate su V_4 dai punti di una curva

piana. Sopra $\sigma_{1,2}^1$ vi sono quindi due fasci di curve piane (i cui piani giacciono su V_4 : i piani relativi ad uno dei fasci appartengono ad una schiera, i piani relativi all'altro fascio all'altra schiera).

La condizione è sufficiente: consideriamo infatti sulla V_4 di SEGRE una superficie che possiede due fasci di curve piane, i cui piani giacciono su V_4 : i piani relativi ad uno dei fasci appartengono ad una schiera, i piani relativi all'altro fascio all'altra schiera. Gli ∞^1 piani della 2^a schiera (della 1^a schiera) a cui appartengono le curve del fascio, provengono da ∞^1 punti di π_1 (di π_2), che compongono una curva C_1 (C_2). La superficie rappresenta dunque le coppie di punti di C_1 , C_2 ed è quindi $\sigma_{1,2}^2$.

Osservazione 1^a: I due fasci di curve piane di una $\sigma_{1,2}^2$ della V_4 di SEGRE sono tali che due curve di uno stesso fascio si corrispondono nella collineazione determinata fra i loro piani dai piani dell'altra schiera.

Infatti, siccome $\sigma_{1,2}^2$ rappresenta le coppie di punti di due curve C_1 , C_2 tracciate rispettivamente sui due piani π_1 , π_2 , le curve piane di uno stesso fascio di $\sigma_{1,2}^2$ sono tutte collineari a C_1 (o a C_2) e quindi collineari tra loro, nella collineazione predetta.

Osservazione 2^a: Le $\sigma_{1,2}^2$ rigate della V_4 di SEGRE sono soltanto quelle che rappresentano le coppie di punti di una retta di uno dei piani e di una curva C dell'altro; per tali superficie le curve piane di uno dei due fasci sono rette.

Se anche C è una retta, la $\sigma_{1,2}^2$ è una quadrica dell' S_3 e le curve piane dei due fasci sono le rette delle due schiere di essa.

5. Si ha:

L'S (2) osculatore di una $\sigma_{1,2}^1$ della V_4 di SEGRE è regolare (cioè ha dimensione 5) salvo per le $\sigma_{1,2}^1$ rigate (per le quali ha dimensione 4). L'S (2) osculatore di una $\sigma_{1,2}^2$ della V_4 di SEGRE è regolare salvo per le $\sigma_{1,2}^2$ rigate (per le quali ha dimensione 4) e per le quadriche dell' S_3 .

Infatti l' S (2) osculatore alla $\sigma_{1,2}^1$

$$\begin{aligned} u_2 &= f(u_1) \\ v_2 &= \varphi(u_1, v_1) \end{aligned} \quad (\varphi_1 \neq 0)$$

è individuato dai punti \bar{x} , $\frac{\partial \bar{x}}{\partial u_1}$, $\frac{\partial \bar{x}}{\partial v_1}$ e dai punti [1] del n. 3 (in cui si ponga $f_2 = 0$). I punti \bar{x} , $\frac{\partial \bar{x}}{\partial u_1}$, $\frac{\partial \bar{x}}{\partial v_1}$, $\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u_1^2}$, $\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u_1 \partial v_1}$ sono, in ogni caso, lin. indep. fra loro e il punto $\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial v_1^2} = \frac{\partial x}{\partial v_2} \varphi_{22}$ è lin. indep. da essi.

Perchè l' S (2) abbia dimensione 4 è dunque necessario (e sufficiente) che sia

$$\varphi_{22} = 0.$$

La corrispondenza rappresentata da $\sigma_{1,2}^1$ è quindi della forma

$$u_2 = f(u_1)$$

$$v_2 = \psi(u_1) + v_1 \chi(u_1);$$

le curve della famiglia $|F|$ sono qui rette e la $\sigma_{1,2}^1$ è rigata (viceversa se $\sigma_{1,2}^1$ è rigata l' $S(2)$ osculatore ha dimensione 4!).

L' $S(2)$ osculatore alla $\sigma_{1,2}^2$

$$u_2 = f(u_1)$$

$$v_2 = \varphi(v_1)$$

è individuato dai punti \bar{x} , $\frac{\partial \bar{x}}{\partial u_1}$, $\frac{\partial \bar{x}}{\partial v_1}$ e dai punti [1] del n. 3 (in cui si ponga $f_2 = \varphi_1 = 0$). I punti \bar{x} , $\frac{\partial \bar{x}}{\partial u_1}$, $\frac{\partial \bar{x}}{\partial v_1}$, $\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u_1 \partial v_1}$ sono, in ogni caso, lin. indep. fra loro e i punti $\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u_1^2} = \frac{\partial x}{\partial u_2} f''$, $\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial v_1^2} = \frac{\partial x}{\partial v_2} \varphi''$ sono lin. indep. da essi (s'è posto $f_{11} = f''$, $\varphi_{22} = \varphi''$).

Segue che se le curve $u_2 = f(u_1)$, $v_2 = \varphi(v_1)$ non sono rette, cioè se $f'' \neq 0$, $\varphi'' \neq 0$, l' $S(2)$ osculatore è un S_5 . Se la $u_2 = f(u_1)$ è una retta mentre la $v_2 = \varphi(v_1)$ non lo è, cioè se $f'' = 0$ e $\varphi'' \neq 0$, la superficie è rigata e l' $S(2)$ osculatore è un S_4 .

Infine se le $u_2 = f(u_1)$, $v_2 = \varphi(v_1)$ sono entrambi rette, cioè se $f'' = \varphi'' = 0$, la superficie è una quadrica dell' S_3 .

6. Come si è visto, fra le superficie quasi-asintotiche $\sigma_{1,2}$ della V_4 di SEGRE vi sono le quadriche dell' S_3 di essa, provenienti dalle coppie di rette dei due piani π_1, π_2 . La ricerca delle $\sigma_{1,2}$ della V_4 di SEGRE mi fu appunto suggerita dalla presenza su tale V_4 di queste quadriche dell' S_3 (il cui carattere di $\sigma_{1,2}$ per la V_4 era manifesto), perchè mi parve interessante vedere, oltre a queste, quali fossero le $\sigma_{1,2}$ della V_4 .

Le quadriche dell' S_3 della V_4 di SEGRE sono ∞^4 (quante sono le coppie di rette dei due piani π_1, π_2) e l'esistenza di ∞^4 superficie appartenenti all' S_3 è proprietà caratteristica della V_4 di SEGRE poichè sussiste il teorema:

L'unica varietà V_4 , a quattro dimensioni, che possiede ∞^4 superficie appartenenti all' S_3 , che non sia un cono e che appartenga ad uno spazio di dimensione > 7 , è la V_4^6 di S_8 che rappresenta le coppie di punti di due piani. Quelle superficie sono le quadriche che rappresentano le coppie di punti di due rette tracciate sui due piani.

Il teorema si può dimostrare osservando dapprima che se una V_4 possiede ∞^4 superficie dell' S_3 possiede $\infty^8 E_2$ di quasi-asintotica $\gamma_{1,3}$ ⁽¹⁾, e applicando poi un mio teorema recente che determina tutte le V_4 che posseggono $\infty^8 E_2$ di $\gamma_{1,3}$.

Per la prima parte della dimostrazione: se una superficie σ di V_4 appartiene all' S_3 ogni elemento E_2 di curva tracciata sopra σ è E_2 di $\gamma_{1,3}$ per V_4 perchè l' S_4 tangente a V_4 in un punto P di σ e l' S_3 ambiente di σ (che coincide con l' S_3 osculatore di una curva qualunque di σ) hanno in comune un S_2 (il piano tangente in P a σ). Sopra σ vi sono dunque $\infty^4 E_2$ di $\gamma_{1,3}$ di V_4 e quindi: se V_4 contiene ∞^4 superficie dell' S_3 , possiede necessariamente $\infty^8 E_2$ di $\gamma_{1,3}$.

Le V_4 che posseggono ∞^4 superficie dell' S_3 appartengono quindi a uno dei 1 tipi di V_4 dotate di $\infty^8 E_2$ di $\gamma_{1,3}$ da me determinati (che comprendono tutte le V_4 dotate di $\infty^8 E_2$ di $\gamma_{1,3}$) ⁽²⁾.

Essi sono:

- 1) la V_4^6 di S_8 di SEGRE.
- 2) Ogni V_4 dell' S_8 situata sopra il cono di VERONESE dell' S_8 che sia incontrata dagli S_7 del cono in superficie (brevemente: le varietà Φ_4).
- 3) I coni V_4 proiettanti da un punto 0 una V_3 che possiede $\infty^4 \gamma_{1,3}$ (0 essendo fuori dello spazio ambiente di V_3).
- 4) Tutte le V_4 dell' S_7 i cui S_4 tangenti riempiono lo spazio ambiente. Esistono V_4 dotate di ∞^4 superficie dell' S_3 sia del tipo 3), che del tipo 4) ⁽³⁾, ciò che prova la necessità delle condizioni poste nell'enunciato. Per dimostrare il teorema basta ormai provare che una Φ_4 non può mai possedere ∞^4 superficie dell' S_3 , e ciò non offre difficoltà.

Osservazione 1^a: Alla precedente dimostrazione del teorema, che si basa su un risultato della teoria delle curve quasi-asintotiche, sarebbe desiderabile sostituirla una diretta. Essa lascerebbe anche intravedere la probabile estensione del teorema ad una qualunque V_k di SEGRE, che rappresenti le coppie di punti di due spazi S_p, S_q ($p + q = k$). Si noterà che una tale V_k possiede ∞^{2k-1} superficie dell' S_3 (una cioè per ogni punto e tangente ivi): le quadriche dell' S_3 che rappresentano le coppie di punti

⁽¹⁾ Un elemento del 2° ordine E_2 è E_2 di $\gamma_{1,3}$ per V_k quando per esso si possono condurre elementi di curve di V_k i cui S_3 osculatori incidono piani gli S_k tangenti nei loro centri a V_k ; o sono indeterminati.

⁽²⁾ Si veda: VILLA, *Ricerche sulle varietà V_k che posseggono $\infty^8 E_2$ di $\gamma_{1,3}$, con particolare riguardo al caso $k = 4, 8 = 8$* . « Memorie della R. Accademia dei Lincei, 1939, ser. 6^a, vol. VII, p. 374.

⁽³⁾ Per i coni V_4 , che posseggono ∞^4 superficie dell' S_3 , si veda l'Oss. 2^a. La proiezione sull' S_3 della V_4 di SEGRE fornisce poi un esempio di V_4 , del tipo 4) dotata di ∞^4 superficie dell' S_3 .

di due rette rispettivamente di S_p, S_q . Potrebbe così risultare una caratterizzazione delle V_k di SEGRE, per k qualunque, mediante le superficie (quadriche) dell' S_3 poste su di essa ⁽³⁾.

Osservazione 2^a: I coni V_4 che posseggono ∞^4 superficie dell' S_3 sono quelli proiettanti da un punto 0 una V_3 che possiede ∞^4 curve piane: le ∞^4 superficie dell' S_3 sono gli ∞^4 coni proiettanti dal vertice le ∞^4 curve piane della V_3 .

V_3 che posseggono ∞^4 curve piane sono: la V_3 dell' S_0 che rappresenta la totalità delle quadriche dell' S_3 (che possiede ∞^4 coniche immagini delle rette dell' S_3), o una sua proiezione; la V_3 sezione iperpiana della V_4^6 di S_8 di SEGRE (che possiede ∞^4 coniche sezioni con l'iperpiano delle ∞^4 quadriche dell' S_3 della V_4 di SEGRE), o una sua proiezione.

La V_4^6 di S_8 di SEGRE, in relazione alle V_3 che posseggono ∞^4 curve piane, gode della seguente notevole proprietà:

Una V_4 (appartenente ad uno spazio di dimensione > 7) tale che la V_3 sezione iperpiana generica possiede ∞^4 curve piane, è la V_4^6 di S_8 di SEGRE oppure un cono proiettante dal suo vertice una tale V_3 ⁽²⁾.

Questo teorema deducesi agevolmente da un altro che trovasi a p. 419 della mia Memoria lineea citata e che si riferisce a curve quasi-asintotiche $\gamma_{1,3}$ (di cui le curve piane sono caso particolare).

(¹) È già nota invece una caratterizzazione della V_k di SEGRE mediante gli spazi S_p, S_q situati su di essa. Si veda: TERRACINI, *Alcune questioni sugli spazi tangenti e osculatori ad una varietà*. Nota I. « Rend. dell'Accademia di Torino », 1914, vol. 49, n. 11.

(²) La V_3^u di S_9 che rappresenta le quadriche dell' S_3 possiede, come già si è detto, ∞^4 curve piane e quindi si ritrova una proprietà ben nota (G. SCORZA, *Sopra una certa classe di varietà razionali*. « Rend. del Circolo Matematico di Palermo », 1909, vol. 28, pag. 400).

Matematica. — *Sulla stabilità degli integrali delle equazioni differenziali lineari, omogenee e a coefficienti costanti* ⁽¹⁾.
Nota di TULLIO VIOLA, presentata ⁽²⁾ da MAURO PICONE,
Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. In una Nota dal titolo: *Sulle equazioni algebriche a coefficienti reali*, pubblicata nei « Rend. R. Accad. delle Scienze di Napoli » (Serie 4^a, vol. VIII, 1937-38), ho dimostrato il seguente TEOREMA (A). — *Condizioni necessarie e sufficienti affinché un'equazione algebrica a coefficienti reali*

$$[1] \quad c_0 z^h + c_1 z^{h-1} + c_2 z^{h-2} + \dots + c_{h-1} z + c_h = 0 \quad (c_0 > 0),$$

si possa spezzare nel prodotto di altre due, delle quali la prima

$$[2] \quad b_0 z^k + b_1 z^{k-1} + b_2 z^{k-2} + \dots + b_k = 0 \quad (b_0 > 0)$$

risulti del tipo di HURWITZ (abbia cioè tutte le radici con parte reale negativa), e la seconda contenga soltanto potenze pari:

$$[3] \quad z^{2n} + a_2 z^{2n-2} + a_4 z^{2n-4} + \dots + a_{2n} = 0, \quad (k + 2n = h),$$

oppure soltanto potenze dispari:

$$[3'] \quad z^{2n+1} + a_2 z^{2n-1} + a_4 z^{2n-3} + \dots + a_{2n} z = 0, \quad (k + 2n + 1 = h),$$

sono:

a) Che i primi k determinanti di HURWITZ dell'equazione proposta siano > 0 ;

b) Che la matrice indefinita, formata con le prime $k + 1$ colonne di quella di HURWITZ, abbia caratteristica $= k$.

Nel corso della dimostrazione di questo teorema, ho anche dato delle formule per il calcolo dei coefficienti delle [2], [3] o [3'], supposte verificate le condizioni a), b). Osservato ovviamente che $b_0 = c_0$, $b_1 = c_1$,

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

⁽²⁾ Nell'Adunanza del 16 dicembre 1939-XVIII.

s'introducano $k - 1$ incognite ausiliarie t_1, t_2, \dots, t_{k-1} e si scrivano le equazioni lineari seguenti:

$$[4] \quad b_i = c_i + \sum_{j=1,2,\dots,\left[\frac{i}{2}\right]} c_{i-2j} t_j, \quad (i=2,3,\dots,2k-1)$$

indicando con $\left[\frac{i}{2}\right]$ il massimo intero contenuto in $\frac{i}{2}$ e convenendo che sia $b_i = 0$ per ogni $i > k$. Le ultime $k - 1$ equazioni [4] hanno i primi membri nulli: esse costituiscono un sistema di CRAMER, atto a fornire univocamente i valori delle t_1, t_2, \dots, t_{k-1} . Tali valori, sostituiti nelle prime $k - 1$ equazioni [4], danno poi esplicitamente i coefficienti della [2]. Infine si scriva il sistema di equazioni

$$[5] \quad c_i = \sum_{j=0,1,\dots,\left[\frac{i}{2}\right]} b_{i-2j} a_{2j}$$

(con $i = 0, 1, 2, \dots, h$; $a_0 = 1$; $b_s = 0$ per $s > k$; $a_t = 0$ per $t > 2n$), lineari nei coefficienti della [3] o [3'] considerati come incognite. Si dimostra che il sistema [5] è univocamente risolubile rispetto a queste incognite ⁽¹⁾.

Da questo teorema trarrò qui due diverse conseguenze relativamente al problema della stabilità degli integrali delle equazioni differenziali lineari, omogenee e a coefficienti costanti. Senza pregiudizio alla generalità del problema, considererò la [1] come equazione caratteristica dell'equazione differenziale:

$$[6] \quad c_0 y^{(h)} + c_1 y^{(h-1)} + c_2 y^{(h-2)} + \dots + c_{h-1} y' + c_h y = 0.$$

2. È ben noto che la condizione necessaria e sufficiente affinché la [6] abbia tutti gli integrali stabili (cioè questi siano funzioni limitate nell'intervallo $0 \rightarrow \infty$), è che l'equazione algebrica [1] abbia tutte le radici con parti reali non positive; e inoltre le eventuali radici immaginarie pure siano semplici. Orbene la prima conseguenza è l'enunciazione della condizione a cui devono soddisfare i coefficienti della [6] affinché tutti gli integrali risultino stabili. Ma premetto che tale conseguenza si deduce non dal solo teorema (A), ma da questo in unione con un altro dimostrato dal prof. C. MIRANDA, cioè:

TEOREMA (B). — *Condizione necessaria e sufficiente affinché tutte le radici della [3] o [3'] siano immaginarie pure e semplici, è che i determinanti*

⁽¹⁾ Naturalmente sarebbe facile trovare le espressioni esplicite per i coefficienti delle [2] [3] o [3'] in funzione dei coefficienti della [1]. Ma tali espressioni (almeno nella loro forma generale) si presentano molto complicate e non offrono interesse ai fini di questo lavoro.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} n & 1 \\ (n-1)a_2 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} n & 1 & 0 \\ (n-1)a_2 & a_2 & n \\ (n-2)a_4 & a_4 & (n-1)a_2 \end{vmatrix}, \dots$$

$$\dots, \Delta_{2n} = \begin{vmatrix} n & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ (n-1)a_2 & a_2 & n & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (1-n)a_{n-2} & a_{n-2} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \end{vmatrix}$$

siano tutti positivi ⁽¹⁾.

Se dunque si tiene presente che la proprietà per la [1] di possedere tutte le radici con parte reale non positiva, equivale precisamente alla possibilità di spezzare la [1] nel prodotto di altre due come [2], dotata di sole radici con parte reale negativa, e [3] o [3'], dotata di sole radici immaginarie pure, dai due teoremi enunciati discende immediatamente il seguente

TEOREMA. — *Condizione necessaria e sufficiente affinché un'equazione differenziale omogenea a coefficienti costanti*

$$[6] \quad c_0 y^{(h)} + c_1 y^{(h-1)} + c_2 y^{(h-2)} + \dots + c_{h-1} y' + c_h y = 0$$

abbia tutti gli integrali stabili per $t \rightarrow \infty$, è l'esistenza di un intero positivo $k \leq h$ tale che:

a) I primi k determinanti di HURWITZ dell'equazione caratteristica siano positivi;

b) La matrice indefinita, formata con le prime $k+1$ colonne di quella di HURWITZ, abbia caratteristica $= k$;

c) I determinanti $\Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_{2n}$, formati (come al teorema (B)) coi coefficienti $a_2, a_4, a_6, \dots, a_{2n}$ tratti dalle [5], siano tutti positivi.

Quando un tale intero k esiste, l'equazione [6] possiede un sistema fondamentale contenente precisamente k integrali particolari smorzati. I rimanenti $h-k$ integrali particolari hanno tutti andamento oscillatorio semplice, se $h-k$ è pari, tutti meno uno (che è una costante) se $h-k$ è dispari.

3. — La seconda conseguenza si riferisce all'eventualità in cui i coefficienti della [6] siano funzioni razionali intere (a coefficienti pure reali) di un certo gruppo di p parametri reali:

$$c_i = c_i(u_1, u_2, \dots, u_p) \quad , \quad (i = 0, 1, 2, \dots, h).$$

(²) C. MIRANDA, *Complementi al criterio di stabilità di HURWITZ e al teorema di STURM sulle equazioni algebriche a coefficienti reali*. «Rend. del Semin. Matemat. della R. Università di Roma», serie IV, vol. I, fasc. III, gennaio 1937-XV.

Il caso più semplice che possa pensarsi è quello in cui tali parametri s'identifichino coi coefficienti stessi della [6] ($p = h + 1$). Ha poi particolare interesse pratico, nelle applicazioni, il caso $p = 1$ ⁽¹⁾. Infatti molti problemi tecnici conducono, per vie diverse, a porre il problema analitico seguente: è nota una certa equazione differenziale [6], i cui coefficienti c_i sono funzioni razionali intere di un parametro u ; si chiede un valore u_0 di questo parametro (generalmente il più piccolo valore positivo) tale che gli integrali della [6] siano tutti stabili per u in u_0 e per u immediatamente a sinistra di u_0 , non siano tutti stabili per u immediatamente a destra di u_0 . Per esempio in problemi riguardanti la meccanica del volo, il cercato valore del parametro u è semplicemente la velocità (velocità critica) al di sopra della quale l'aereo perde l'equilibrio.

Indichiamo con Ω l'insieme dei punti $U \equiv (u_1, u_2, \dots, u_p)$ nello spazio reale S_p , in corrispondenza dei quali tutti gli integrali della [6] risultano stabili; con $\bar{\Omega}$ l'insieme dei punti U in corrispondenza dei quali la [1] non ha radici con parti reali positive. Si vede molto facilmente che non soltanto Ω , ma anche $F\Omega$ appartiene ad $\bar{\Omega}$. Sia infatti Σ la trasformazione che, ad ogni punto U , fa corrispondere il gruppo delle h radici della [1] nel piano complesso. Tale trasformazione Σ è certo continua: ciò significa che, assegnati arbitrariamente un punto U_0 in S_p e un numero reale $\varepsilon > 0$, e indicate ordinatamente con $\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_h^0$ le h radici della [1] corrispondenti ad U_0 , è possibile trovare un $\delta > 0$ tale che, ad ogni U in S_p per cui $\overline{U_0} U < \delta$, corrispondono h radici della [1] tutte contenute, una per ciascuna, negli h intorni circolari di centri rispettivamente $\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_h^0$ e di egual raggio ε . Dicendo «una per ciascuna», non escludiamo l'esistenza di radici multiple, nel qual caso due o più delle radici s'intendono ripetute. Se U percorre, in S_p , una retta qualsiasi, ciascuna delle h radici della [1] percorre, nel piano complesso, una corrispondente curva algebrica.

Sia ora U_0 un punto qualunque di $F\Omega$ estraneo ad Ω . Se ad esso corrispondesse una radice con parte reale positiva, indicheremmo con ε un numero reale positivo minore di questa parte. Trovato allora il corrispondente numero δ come sopra, ad ogni U in S_p tale che $\overline{U_0} U < \delta$, quindi anche ad ogni U di Ω soddisfacente a questa condizione (esistono di tali U , essendo U_0 punto d'accumulazione per Ω), corrisponderebbe almeno una radice a parte reale positiva, il che è contraddittorio.

Con analogo ragionamento si vede che Ω è un insieme chiuso.

⁽¹⁾ Mi è anzi grato dichiarare che a questo studio sono giunto in un primo tempo, precisamente in virtù delle quotidiane esperienze numeriche fatte nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

Può accadere che $\Omega + F\Omega$ non coincida con $\bar{\Omega}$: tale per esempio è il caso che si ha ponendo, per la [1], l'equazione

$$(z^2 + u^2)^2 = 0,$$

le cui quattro radici sono tutte immaginarie pure e multiple; comunque vari il parametro u sull'asse reale. D'altro lato, mentre nella generalità dei casi deve ammettersi che Ω sia dotato di punti interni in S_p , non si può escludere che abbia a presentarsi l'eventualità opposta, come per esempio accade quando si ponga, per la [1], l'equazione

$$[(z - u_1)^2 + u_2^2] [(z + 2u_1)^2 + 4u_2^2] = 0:$$

l'insieme Ω dei punti $U = (u_1, u_2)$ nel piano S_2 , in corrispondenza dei quali tutti gli integrali della [6] risultano stabili, è qui costituito dall'asse $u_1 = 0$ privato dell'origine, e la frontiera $F\Omega$ è costituita da questo stesso asse, origine inclusa.

4. - Noi però fermeremo la nostra attenzione all'ipotesi che Ω sia effettivamente dotato di punti interni, ed anzi supporremo addirittura, per semplicità, che $\Omega + F\Omega$ sia un dominio e coincida con $\bar{\Omega}$. Questa ipotesi è assai naturale, perchè corrisponde alle effettive esigenze di problemi pratici qual'è quello cui abbiamo accennato al principio del n. 3: problemi in cui ci si propone in sostanza la ricerca delle frontiere di quelle certe regioni di punti U , entro le quali tutti gli integrali della [6] si mantengono stabili.

Siano

$$D_1 = c_1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} c_1 & c_0 \\ c_3 & c_2 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} c_1 & c_0 & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 \\ c_5 & c_4 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \dots$$

$$\dots, \quad D_h = \begin{vmatrix} c_1 & c_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{2h-1} & c_{2h-2} & c_{2h-3} & \dots & \dots & \dots & c_h \end{vmatrix}$$

i determinanti di HURWITZ dell'equazione [1]. Prendiamo in considerazione, in S_p le singole varietà $D_1 = 0, D_2 = 0, \dots, D_h = 0$, le cui equazioni supponiamo ordinate e scritte riducendo i termini simili nei parametri u_1, u_2, \dots, u_p . Dimosteremo il seguente

TEOREMA. - Sia $\bar{\Omega}$ l'insieme dei punti $U \equiv (u_1, u_2, \dots, u_p)$ di S_p , in corrispondenza dei quali le radici dell'equazione [1] hanno le parti reali tutte negative o nulle, e sia Ω l'insieme che si ottiene da $\bar{\Omega}$ togliendone tutti quei punti (eventuali), in corrispondenza dei quali alcune delle dette radici risul-

tano immaginarie pure e multiple. Nell'ipotesi che $\Omega + F\Omega$ coincida con Ω e sia un dominio, $F\Omega$ è interamente contenuto nella varietà $D_k = 0$ d'indice più elevato $k \leq h$ che non invade l'intero spazio S_p , cioè la cui equazione non possiede tutti i coefficienti nulli.

Questo teorema permette una essenziale semplificazione quando se ne faccia applicazione alla risoluzione dei problemi sopra indicati. Per restare per esempio nel caso più semplice, che i coefficienti c_i della [6] siano funzioni razionali intere di un solo parametro u , ammesso (come avviene in generale) che nessuno degli h polinomi D_1, D_2, \dots, D_h sia identicamente nullo, occorrerà, in base al teorema di HURWITZ, prendere in considerazione (se esiste) un intervallo dell'asse reale u , nel quale i detti polinomi si mantengono tutti positivi ⁽¹⁾. Ciascun estremo di un tale intervallo è un valore u_0 di u , in corrispondenza del quale tutti o alcuni degli integrali della [6] perdono la stabilità. Orbene, mentre il teorema di HURWITZ dice soltanto che u_0 è radice di una delle h equazioni $D_1 = 0, D_2 = 0, \dots, D_h = 0$, il teorema ora enunciato precisa che u_0 è radice dell'ultima di queste equazioni. Questo risultato è prezioso, non appena h sia un poco elevato.

5. — Sia U_0 un punto interno ad Ω . Scritta la [1] corrispondente ad U_0 , se essa stessa non è del tipo di HURWITZ, se ne constaterà lo spezzamento nel prodotto di due equazioni come [2] e [3], quest'ultima contenendo tutte e sole le radici immaginarie pure della [1]. Se tali radici sono in numero di $h - k$, si avrà dunque in U_0 (come mostra il Teorema A):

$$D_1 > 0, D_2 > 0, \dots, D_k > 0, D_{k+1} = 0, D_{k+2} = 0, \dots, D_h = 0,$$

con $0 \leq k \leq h$. Sia I un intorno di U_0 , tutto costituito di punti di Ω . Comunque si prenda U in I , dev'essere corrispondentemente

$$D_{k+1} \geq 0, D_{k+2} \geq 0, \dots, D_h \geq 0,$$

ed anzi, se in una di queste relazioni vale il segno inferiore, lo stesso segno deve valere in tutte quelle che lo seguono, mentre, se vale il segno superiore, lo stesso deve valere in tutte quelle che lo precedono. Dunque devono essere verificate le due seguenti proprietà:

a) Ciascuna delle varietà

$$[7] \quad D_{k+1} = 0, D_{k+2} = 0, \dots, D_h = 0$$

deve possedere in U_0 un punto isolato, oppure deve invadere tutto lo spazio S_p (cioè i coefficienti della sua equazione devono essere tutti nulli).

⁽¹⁾ In generale accadrà che di tali intervalli ne esisteranno più d'uno. Ma i dati fisici del problema imporranno di prenderne in considerazione uno ben determinato: per esempio, nell'indicati problemi d'aeronautica, si deve considerare un intervallo che contiene l'origine.

b) Se una qualunque delle varietà [7] soddisfa alla prima delle proprietà enunciate in a), alla stessa devono soddisfare anche tutte le varietà che la precedono, mentre, se soddisfa alla seconda proprietà, a questa stessa devono soddisfare anche tutte le varietà che la seguono.

Supponiamo ora che non tutte le varietà

$$[8] \quad D_1 = 0, \quad D_2 = 0, \dots, \quad D_h = 0$$

invadano l'intero spazio S_p e sia $D_k = 0$, fra queste varietà, quella d'indice più elevato $k \leq h$, che non invade l'intero spazio S_p . I punti di S_p , che non appartengono a nessuna delle varietà

$$[9] \quad D_1 = 0, \quad D_2 = 0, \dots, \quad D_k = 0,$$

o che, pur appartenendo a qualcuna di queste, ne sono punti isolati, si ripartiscono in un certo numero di regioni (R).

In corrispondenza di U_0 la [1] possiede $h - k$ radici immaginarie pure ed eventualmente anche altre: ma, in corrispondenza di tutti gli altri punti U di un intorno sufficientemente ristretto di U_0 , la [1] possiede *esattamente* $h - k$ radici immaginarie pure, mentre le rimanenti k sono tutte a parte reale negativa. Ciò significa che U_0 appartiene necessariamente ad una delle regioni sopra indicate con R . Donde si riconosce intanto che punti interni ad Ω non possono trovarsi in regioni R contigue, cioè limitate da falde di varietà in comune. Infatti, in simili coppie di regioni, non possono i primi membri delle [9] conservarsi tutti sempre positivi.

Poichè $h - k$ radici della [1] restano immaginarie pure, comunque U varia in un intorno sufficientemente ristretto di U_0 , esse resteranno tali anche quando U esce da tale intorno, allontanandosi quanto si vuole da U_0 (n. 3). Ma, finchè U si mantiene in R , i primi membri delle [9] si mantengono positivi (fatta eccezione di punti isolati) e d'altra parte ancora si osserva che la matrice indefinita di cui al teorema (A) comma b), mantiene caratteristica $= k$ in tutto R . Si deduce che le k rimanenti radici conservano in R le proprie parti reali tutte negative (fatta eccezione dei soliti eventuali punti isolati) e quindi tutti i punti di R sono interni ad Ω , ed FR risulta interamente costituito da punti della varietà $D_k = 0$.

Meccanica (Meccanica celeste). — *Sulla determinazione della forma d'un pianeta, nota la gravità in superficie* ⁽¹⁾. Nota di LUCIANO CHIARA, presentata ⁽²⁾ da CORRADINO MINEO, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Il problema di dedurre la forma d'un pianeta dai valori della gravità in superficie è stato posto recentemente nei suoi veri termini dal prof. MINEO, che ne ha fatto dipendere la soluzione da un sistema di due equazioni integro-differenziali. In particolare, il prof. MINEO dà la soluzione formale per approssimazioni successive, in vicinanza di una sfera in riposo, assegnando le condizioni di possibilità del problema ⁽³⁾. Poichè queste condizioni consistono in relazioni cui, nell'approssimazione d'ordine n , devono verificare certe due funzioni, dipendenti dalle precedenti approssimazioni, delle quali funzioni però non è facile darsi la forma esplicita, è sorto il dubbio al prof. MINEO, che, almeno in parte, le dette relazioni possano essere identicamente soddisfatte. E allora mi consigliò di ritornare sul problema per completare l'analisi; e, per girare la difficoltà, mi suggerì di servirmi di un altro sistema ⁽⁴⁾, che, invero, si è prestato bene allo scopo.

Nella presente Nota, quindi, partendo dal sistema iniziale dal quale si può far dipendere la soluzione del problema, determino il sistema di due equazioni integro-differenziali dal quale dipende l'approssimazione di ordine n . Discutendone poi la possibilità, pervengo alle condizioni, cui deve verificare la gravità g assegnata, perchè il problema abbia una ed una sola soluzione. Determino inoltre le condizioni per la g , nel caso in cui non si chieda la unicità della soluzione, e assegno sempre la soluzione formale del problema.

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Osservatorio Astronomico di Palermo.

⁽²⁾ Nell'adunanza del 16 dicembre 1939—XVIII.

⁽³⁾ Cfr. C. MINEO, *Forma d'un pianeta, dedotta dai valori della gravità in superficie*. « Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei », vol. XXIX, maggio 1939—XVIII, 529—535.

⁽⁴⁾ Di questo sistema si sono recentemente serviti GARCIA e ROSENBLATT, ma per altra ricerca. Cfr. « Comptes rendus », 1938, to. 206, p. 423 e 1938, to. 207, p. 969.

1. Uso le stesse notazioni del prof. MIXEO nella sua Nota citata, introducendo in più una nuova funzione $\mu(M)$, (densità incognita del semplice strato disteso sulla superficie S), tale che

$$V(P) = \int_S \frac{\mu(M)}{R(M, P)} dS_M,$$

rappresenti il potenziale newtoniano esterno del pianeta.

Con ciò, dal sistema

$$\begin{cases} W(P) = fV(P) + \frac{\omega^2}{2} r^2 \sin^2 \theta = c, \\ \frac{dW(P)}{dn_P} = g(P), \end{cases}$$

scritto tenendo conto che S è una superficie d'equilibrio e sopra S la gravità è g , si ricava:

$$[1] \quad \begin{cases} f \int_S \frac{\mu(M)}{R} dS_M + \frac{\omega^2}{2} r^2 \sin^2 \theta = c, \\ f \int_S \mu(M) \frac{d\left(\frac{1}{R}\right)}{dn_P} dS_M + 2\pi f \mu(P) + \frac{\omega^2}{2} \frac{d(r^2 \sin^2 \theta)}{dn_P} = g(P), \end{cases}$$

che è il sistema integro-differenziale dal quale dipende la soluzione del problema propostoci.

Nel caso d'una sfera in riposo la soluzione di partenza è

$$r = a, \quad \mu_0 = \frac{c_0}{4\pi f a}.$$

in corrispondenza della gravità

$$g_0 = \frac{c_0}{a}.$$

In vicinanza di tale soluzione, l'approssimazione di ordine n dipende dal sistema

$$[2] \quad \begin{cases} z_n(P) = \frac{3}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{z_n(M)}{|2-2\cos\gamma|} d\sigma_M + \frac{1}{2\pi\mu_0} \int_{\sigma} \frac{z_n(M)}{|2-2\cos\gamma|} d\sigma_M \cdot r_P^{(0)}, \\ z_n(P) = \frac{2}{g_0} g_n(P) - \frac{1}{\mu_0} \mu_n(P) - \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} h_n(P, M) d\sigma_M \cdot r_P^{(n)}. \end{cases}$$

dove

$$h_n(P, M) = \left[\zeta_n(P) - \zeta_n(M) + \frac{\partial \zeta_n(P)}{\partial \Theta} \frac{\partial \cos \gamma}{\partial \Theta} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sin^2 \Theta} \frac{\partial \zeta_n(P)}{\partial \varphi} \frac{\partial \cos \gamma}{\partial \varphi} \right] (2 - 2 \cos \gamma)^{-\frac{3}{2}},$$

e con $r_P^{(n)}$ e $w_P^{(n)}$ denotiamo l'insieme dei termini dipendenti dalle precedenti approssimazioni, non contenenti cioè ζ_n, g_n, μ_n .

Per trovare le condizioni di possibilità del sistema [2] e risolverlo, faremo l'ipotesi, del resto abbastanza generale, che $g_n, r_n, w_n, \mu_n, \zeta_n$ siano su σ sviluppabili in serie di funzioni sferiche.

Posto quindi

$$[3] \quad \begin{cases} g_n = \sum_{i=0}^{\infty} G_i^{(n)}, & v_n = \sum_{i=0}^{\infty} V_i^{(n)}, & w_n = \sum_{i=0}^{\infty} W_i^{(n)}, \\ \mu_n = \sum_{i=0}^{\infty} M_i^{(n)}, & \zeta_n = \sum_{i=0}^{\infty} Z_i^{(n)}, \end{cases}$$

e, tenendo presente che, per ogni funzione sferica Z_m di ordine m , si ha

$$\int_{\sigma} \left\{ Z_m(P) - Z_m(M) + \frac{\partial Z_m(P)}{\partial \Theta} \frac{\partial \cos \gamma}{\partial \Theta} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sin^2 \Theta} \frac{\partial Z_m(P)}{\partial \varphi} \frac{\partial \cos \gamma}{\partial \varphi} \right\} (2 - 2 \cos \gamma)^{-\frac{3}{2}} d\sigma = 2 \pi m Z_m(P)$$

ricaviamo, per $Z_m^{(n)}$:

$$[4] \quad (m-1) Z_m^{(n)} = \frac{1}{g_0} G_m^{(n)} - \frac{1}{2} W_m^{(n)} + \frac{2m+1}{4} V_m^{(n)},$$

e per $M_m^{(n)}$:

$$[5] \quad \frac{1}{g_0} M_m^{(n)} = \frac{1}{g_0} G_m^{(n)} - \frac{1}{2} W_m^{(n)} - \frac{2m+1}{4} V_m^{(n)}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

La possibilità del nostro problema dipende in fondo dalla [4]. Per $m = 1$, la [4] dà, per ogni $G_m^{(n)}$ assegnata, una ed una sola soluzione.

Per $m = 1$, ed $n = 1$, poichè, come facilmente si calcola, si ha $W_1^{(1)} = V_1^{(1)} = 0$, segue $G_1^{(1)} = 0$. E $Z_1^{(1)}$ resta indeterminata in prima approssimazione.

In generale ($m = 1$) si ha:

$$[6] \quad \frac{1}{g_0} G_1^{(n)} = \frac{1}{2} W_1^{(n)} - \frac{3}{4} V_1^{(n)},$$

e nel numero seguente dimostrerò che i coefficienti $\lambda_{n-1}, \mu_{n-1}, \nu_{n-1}$ delle tre funzioni sferiche elementari, componenti $Z_1^{(n-1)}$, entrano linearmente nel 2° membro della [6]. Ne viene che per $n = 2$, essendo nota $G_1^{(2)}$, la [6] determinerà $Z_1^{(1)}$ in seconda approssimazione, tutte le volte che il sistema di tre equazioni lineari in λ_1, μ_1, ν_1 , che si ottiene eguagliando in [6], per $n = 2$, i coefficienti delle stesse funzioni sferiche elementari, risulterà *crameriano*. Si conclude, per induzione completa, che il problema propostoci è possibile a soluzione unica (s'intende nelle ipotesi fatte) allora e solo quando la g verifica le condizioni

$$[7] \quad G_1^{(1)} = 0, \quad D_{n-1} = \begin{vmatrix} \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} & \gamma_{n-1} \\ \alpha'_{n-1} & \beta'_{n-1} & \gamma'_{n-1} \\ \alpha''_{n-1} & \beta''_{n-1} & \gamma''_{n-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

il determinante scritto essendo quello del sistema da cui dipende la determinazione della generica $Z_1^{(n-1)}$.

Da un punto di vista più generale, non preoccupandoci cioè della unicità della soluzione, la [6], per $n = 1, 2, \dots$, compendia le condizioni di possibilità. E la [6], o determina univocamente la $Z_1^{(n-1)}$, ($D_{n-1} \neq 0$) non vincolando per nulla $G_1^{(n)}$; o lascia a $Z_1^{(n-1)}$ una indeterminatezza semplice o doppia (caratteristica di D_{n-1} , *due o uno*) vincolando in modo semplice o doppio l'assegnazione della $G_1^{(n)}$, o infine lascia del tutto arbitraria $Z_1^{(n-1)}$ (caratteristica di D_{n-1} , *zero*), vincolando del tutto $G_1^{(n)}$.

2. Dimostriamo ora quanto si è asserito nel numero precedente, cioè che $\lambda_{n-1}, \mu_{n-1}, \nu_{n-1}$ entrano linearmente nel 2° membro della [6].

Data una funzione $F(\theta, \varphi)$, sviluppabile in serie di funzioni di Laplace, denoteremo con

$$[F(\Theta, \Phi)]_{(k)}$$

la funzione sferica di ordine k dello sviluppo. Con a, b, c, d indicheremo funzioni note di θ e φ , non contenenti, cioè, alcuno dei coefficienti $\lambda_{n-1}, \mu_{n-1}, \nu_{n-1}$, che figurano in $Z_1^{(n-1)}$; con A, B, C denoteremo costanti note. Scriveremo inoltre, per semplicità, Z_1 in luogo di $Z_1^{(n-1)}$, e λ, μ, ν piuttosto che $\lambda_{n-1}, \mu_{n-1}, \nu_{n-1}$.

È immediato che qualunque espressione del tipo

$$aZ_1 + b \frac{\partial Z_1}{\partial \Theta} + c \frac{\partial Z_1}{\partial \Phi} + d,$$

è lineare in λ, μ, ν ; lo stesso vale, in particolare, per

$$\left[aZ_1 + b \frac{\partial Z_1}{\partial \Theta} + c \frac{\partial Z_1}{\partial \Phi} + d \right]_{(1)};$$

e, tenendo conto che

$$[8] \quad \int_{\sigma'} \frac{[F(\Theta', \varphi')]_{(n)}}{\sqrt{2-2\cos\gamma}} d\sigma' = \frac{4\pi}{2n+1} [F(\Theta, \varphi)]_{(n)},$$

si conclude come sopra per ogni espressione del tipo

$$\int_{\sigma'} \frac{a' Z_1 + b' \frac{\partial Z_1}{\partial \Theta'} + c' \frac{\partial Z_1}{\partial \varphi'} + d'}{\sqrt{2-2\cos\gamma}} d\varphi'.$$

Tenuto conto della [8] ed inoltre della relazione che dà lo sviluppo del prodotto di due generiche funzioni sferiche Y_m, Y_n ($m \geq n$)

$$[9] \quad Y_m Y_n = Y_{m+n} + Y_{m+n-2} + \dots + Y_{m-n},$$

si ricava subito:

$$\left[\int_{\sigma'} \frac{AZ_1^2 + BZ_1^2 + CZ_1 Z_1'}{\sqrt{2-2\cos\gamma}} d\sigma' \right]_{(1)} = 0;$$

ed osservando che si ha identicamente

$$[10] \quad Z_1 - Z_1' + \frac{\partial Z_1}{\partial \Theta} \frac{\partial \cos\gamma}{\partial \Theta} + \frac{1}{\sin^2 \Theta} \frac{\partial Z_1}{\partial \varphi} \frac{\partial \cos\gamma}{\partial \varphi} = Z_1 (1 - \cos\gamma),$$

si riconduce alle precedenti ogni espressione del tipo:

$$\int_{\sigma'} \frac{H_1 (a' + AZ_1 + BZ_1')}{(2-2\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}} d\sigma',$$

dove H_1 è il primo membro della [10].

Inoltre, poichè

$$Z_1 = \lambda \cos \Theta + \mu \sin \Theta \cos \varphi + \nu \sin \Theta \sin \varphi,$$

si trova, tenendo conto della [9]:

$$\left[\left(\frac{\partial Z_1}{\partial \Theta} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \Theta} \left(\frac{\partial Z_1}{\partial \varphi} \right)^2 \right]_{(1)} = 0.$$

Infine, effettuando l'integrazione, si ottiene

$$\int_{\sigma'} \frac{(Z'_1 - Z_1)^2}{(2 - 2 \cos \gamma)^{\frac{3}{2}}} d\sigma' = \frac{4\pi}{3} (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2),$$

e quindi

$$\left[\int_{\sigma'} \frac{(Z'_1 - Z_1)^2}{(2 - 2 \cos \gamma)^{\frac{3}{2}}} d\sigma' \right]_{(1)} = 0.$$

Ebbene, si vede facilmente che, nell'espressione di $W_1^{(n)}$ e $V_1^{(n)}$, i termini che contengono i coefficienti delle tre funzioni sferiche elementari che compongono $Z_1^{(n-1)}$, sono appunto solo del tipo di quelli esaminati. Il nostro asserto è pertanto provato.

Astronomia. — *Serie di osservazioni meridiane dei pianeti "Urano" e "Nettuno"*. Nota di GABRIELLA ARMELLINI CONTI, presentata ⁽¹⁾ da GIUSEPPE ARMELLINI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. — Espongo in questa Nota i risultati di una serie di osservazioni meridiane che ho eseguito sopra i pianeti *Urano* e *Nettuno*.

I miei lavori in materia s'iniziarono nel novembre 1924, in occasione del fatto che *Urano* venne allora a trovarsi vicinissimo alla stella quasi fondamentale 96 *Aquari*. Pensai allora di collegare ogni sera, al momento del passaggio al meridiano del pianeta, la sua posizione in ascensione con quella della stella ora nominata. Tali misure erano anche rese più esatte dal fatto che la grandezza fotometrica della 96 *Aquari* (5,70) era quasi eguale a quella di *Urano* (5,74), onde nessuna correzione era da apportarvi per la cosiddetta « equazione di luminosità ». Per le osservazioni, mi sono servita del cannocchiale meridiano di Ertel — allora al R. Osservatorio del Campidoglio, a Roma — prendendo i passaggi della stella e del centro del dischetto planetario ai diciassette fili orari del micrometro e registrando gli appulsi con un cronografo a punta incidente. In questo primo anno, le declinazioni furono osservate dal prof. G. ARMELLINI, con altro strumento.

Tale primo lavoro mi spinse a proseguire negli anni seguenti le osservazioni sui pianeti *Urano* e *Nettuno*, servendomi dello stesso cannocchiale meridiano di Ertel, collegando ciascuno dei due pianeti con almeno sei stelle fondamentali di declinazione poco differente, ed aggiungendo alle osservazioni di ascensione anche quelle di declinazione. A tale scopo, oltre agli appulsi ai fili orari, prendevo — sia della stella, che del centro del dischetto planetario — tre puntate col filo mobile di declinazione, che eseguivo quando l'astro passava al principio, al centro ed alla fine del reticolo. L'orologio adoperato fu un pendolo modernissimo di metallo « invar » costruito dalla casa Riefler; il cronografo fu sempre quello a punta incidente. Ovviamente le declinazioni erano corrette dalla rifrazione e, per i pianeti, anche dalla parallasse onde ridurle a geocentriche. Adoperai sempre il metodo d'illuminare l'interno del cannocchiale, onde vedere i fili oscuri su campo lucido; metodo certamente migliore dell'inverso, che consiste

(1) Nell'Adunanza del 16 dicembre 1939-XVIII.

nell'illuminare soltanto i fili lasciando oscuro il campo. Generalmente mi sono servita di un ingrandimento di circa 160 volte.

Le mie prime osservazioni del 1924 furono già pubblicate, ma credo utile di riportarle egualmente per completezza. Con l'occasione, noto che io allora assunsi come ascensione media della 96 *Aquari* per il 1924, 0 il valore $\alpha = 23^h 15^m 27^s,54$ dato dal *Preliminary General Catalogue* di di L. Boss; tale valore concorda esattamente con quello che si desume dal vol. V del *General Catalogue* di B. Boss, da poco (1937) pubblicato a Washington, per cura della Carnegie Institution.

2. - Dopo queste premesse, riporto nelle seguenti tabelle i risultati delle mie osservazioni. Come ho detto nel 1924 le declinazioni di Urano furono osservate da G. ARMELLINI mentre io osservai la sola ascensione. Negli anni seguenti tutte le osservazioni, sia di ascensione che di declinazione, furono sempre fatte da me.

TABELLA I.

Posizioni meridiane osservate del pianeta "Urano".

			α	δ				α	δ
1924					1932				
Nov.	21	23 ^h 15 ^m 37 ^s ,55	—	5° 37' 5" ,4	Nov.	14	1 ^h 15 ^m 38 ^s ,88	+	7° 19' 0" ,1
	22	36 ,74		6 ,8		16	24 ,54		17 36 ,5
	23	35 ,78		11 ,9		17	17 ,49		16 56 ,9
	24	35 ,26		12 ,4		24	14 31 ,95		12 32 ,6
	25	—		13 ,2	1933				
	26	34 ,64		11 ,5	Ott.	31	—	+	9° 5' 1" ,9
	27	34 ,48		9 ,3	Nov.	2	—		3 18 ,9
Dec.	1	36 ,06		—		24	1 ^h 29 ^m 59 ^s ,61	+	8 46 55 ,2
	10	—		34 49 ,0		30	22 ,15		43 27 ,9
	16	16 9 ,42		32 34 ,5	Dec.	1	16 ,32		42 56 ,8
	17	12 ,84		9 ,2		20	27 58 ,31		35 54 ,6
	18	17 ,03		31 43 ,6		21	55 ,95		43 ,2
	19	20 ,89		13 ,2		23	51 ,82		26 ,9
	20	25 ,38		30 45 ,2		26	47 ,12		2 ,5
	21	29 ,74		14 ,9	1934				
	22	34 ,28		—	Genn.	3	1 ^h 27 ^m 42 ^s ,99	+	8 34 58 ,4
	23	—		29 9 ,3		4	43 ,22		35 2 ,5
1932						5	43 ,83		6 ,5
Ott.	17	1 ^h 19 ^m 35 ^s ,60	+	7° 42' 18" ,2		8	46 ,75		30 ,6
	18	26 ,49		41 24 ,4		9	48 ,02		41 ,2
	19	17 ,36		40 30 ,0		10	49 ,65		53 ,4
	20	8 ,31		39 36 ,5		11	51 ,24		36 2 ,4
	21	18 59 ,23		38 43 ,2		16	28 2 ,83		37 25 ,4
	26	14 ,45		34 16 ,2		17	5 ,69		43 ,5
						18	8 ,66		38 3 ,9

TABELLA II.

Posizioni meridiané osservate del pianeta " Nettuno ".

	α	δ		α	δ
1930			1934		
Apr. 2	10 ^h 13 ^m 54 ^s ,48	+ 11° 40' 36'',2	Apr. 14	10 ^h 47 ^m 20 ^s ,20	+ 8° 41' 26'',0
9	25 ,31	43 16 ,7	16	11 ,97	42 14 ,5
10	21 ,72	43 21 ,1	17	8 ,26	38 ,2
28	12 32 ,34	47 55 ,5	18	4 ,45	57 ,7
			27	46 35 ,34	45 47 ,3
1932			28	32 ,59	46 3 ,8
Apr. 20	10 ^h 29 ^m 56 ^s ,44	+ 10° 16' 56'',6	30	27 ,42	32 ,7
21	53 ,42	17 12 ,9	Magg. 1	24 ,71	47 ,6
29	33 ,43	19 1 ,0	2	22 ,45	59 ,0
30	31 ,34	13 ,7			
Magg. 2	27 ,88	31 ,7	1935		
3	26 ,39	40 ,2	Apr. 5	10 ^h 56 ^m 30 ^s ,71	+ 7° 49' 19'',5
			6	25 ,78	54 ,9
1933			8	16 ,04	50 53 ,9
Mar. 8	10 ^h 42 ^m 3 ^s ,98	+ 9° 9' 28'',4	9	11 ,21	51 21 ,4
11	41 45 ,45	—	11	1 ,96	52 15 ,2
14	27 ,27	13 8 ,2	13	55 53 ,09	53 9 ,8
15	21 ,47	—	19	28 ,27	55 34 ,6
16	15 ,41	14 17 ,9	Magg. 3	54 44 ,14	59 49 ,2
22	40 40 ,85	17 44 ,6			
29	2 ,73	21 30 ,5			
30	39 57 ,58	22 1 ,4			
Apr. 5	28 ,07	24 53 ,5			

3. — Le migliori tavole che oggi permettono di calcolare le posizioni di *Urano* e *Nettuno* sono quelle del NEWCOMB, pubblicate nelle *Astronomical Papers of the American Ephemeris* (vol. VII, p. III and IV); da queste tavole sono desunte le coordinate (α e δ) dei due pianeti al momento del loro passaggio al meridiano di Greenwich, come vengono riportate nel *Nautical Almanac* di quella specola. Tenendo conto che il passaggio di un astro al meridiano di Greenwich avviene 49^m 56^s,34 dopo il passaggio al meridiano del Campidoglio, ho calcolato i valori di α e δ dei due pianeti, servendomi

dei moti orari riportati nella stessa effemeride. Ho fatto quindi le differenze O-C (Osservazione-Calcolo), ho eseguito le medie di tali differenze, come pure le medie dei tempi i a cui si riferiscono, ottenendo la seguente

TABELLA III.

Differenze O-C tra posizioni osservate e posizioni calcolate.

(G. Conti, Roma).

Urano			Nettuno		
T	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	T	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
1924,9	+ 0 ^s ,07	— 0'',35	1930,3	— 0 ^s ,20	+ 1'',3
32,8	+ 0 ,06	+ 1 ,5	32,3	— 0 ,20	+ 0 ,4
34,0	+ 0 ,03	+ 1 ,1	33,2	— 0 ,23	+ 1 ,7
			34,2	— 0 ,22	+ 0 ,8
			35,3	— 0 ,25	+ 1 ,5

4. — Ho voluto confrontare le mie O-C con le medesime differenze, dedotte dalle osservazioni eseguite a Greenwich e pubblicate negli *Annali* di quella specola, ottenendo dopo eseguite le medie, i valori riportati nella seguente

TABELLA IV.

Differenze O-C tra posizioni osservate e posizioni calcolate.

(Osservatorio di Greenwich).

Urano			Nettuno		
T	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	T	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
1924,9	+ 0 ^s ,09	— 0'',41	1930,2	— 0 ^s ,22	(+ 0'',1) †
32,9	+ 0 ,03	+ 1 ,2	32,2	— 0 ,31	+ 1 ,1
34,0	+ 0 ,03	+ 1 ,6	33,2	— 0 ,30	+ 1 ,0
			34,3	— 0 ,31	+ 1 ,2

Ho posto il punto interrogativo alla $\Delta\delta$ di *Nettuno* del 1930, giacchè nelle osservazioni eseguite a Greenwich in quell'anno vi è discrepanza di

segno nelle O-C; così pure nell'eseguire la media delle osservazioni inglesi del 1934 ho esclusa quella del 23 ottobre, perchè non concordante con le altre ed inoltre annotata con le parole « faint, clouds ».

Come appare da questa tabella, le piccole differenze O-C da me trovate al Campidoglio, concordano in segno e nell'ordine di grandezza con quelle trovate all'Osservatorio di Greenwich. Possiamo quindi ritenere che questi scarti siano dovuti non già a piccoli errori delle osservazioni, ma a piccoli errori delle effemeridi fondate sopra le tavole del NEWCOMB.

Per averne una misura e liberarci ancor meglio da errori accidentali di osservazione, eseguiamo le medie degli O-C del Campidoglio con quelli di Greenwich, ottenendo la seguente

TABELLA V.

Valori medi delle differenze O-C.

(Osservatorio del Campidoglio e di Greenwich).

Urano			Nettuno		
T	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	T	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
1924,9	+ 0 ^s ,08	— 0'',4	1930,2	— 0 ^s ,21	+ 0'',6
32,9	+ 0 ,05	1 ,3	32,2	— 0 ,26	+ 0 ,8
34,0	+ 0 ,03	1 ,3	33,2	— 0 ,27	+ 1 ,3
			34,3	— 0 ,27	+ 1 ,3

Come risulta da questa tabella, questi piccoli errori delle effemeridi sembrano ben sensibili specialmente per *Nettuno*, che anticipa il suo passaggio al meridiano di circa un quarto di secondo sul tempo calcolato con le tavole del NEWCOMB. Se non temessi di essere avventata, arrischierei l'ipotesi che si tratti di piccole perturbazioni cagionate nel moto di *Nettuno* dall'attrazione di Plutone; pianeta che NEWCOMB non conosceva. È certamente troppo presto per procedere ad un calcolo, che richiede ancora altre osservazioni meridiane; ma quando questo potrà farsi con sicurezza, troveremo infine — dalle perturbazioni di *Nettuno* — il valore della massa di Plutone e sapremo quindi se questo lontanissimo pianeta sia molto denso, come alcuni sembrano credere, o se esso invece abbia densità paragonabile a quella degli altri membri del Sistema Planetario.

Le osservazioni di occultazioni sono normalmente eseguite all'eq.^{le} medio CAUCHOIX-CAVIGNATO. Per questo strumento, detto ρ il raggio della Terra e φ' la latitudine geocentrica, è risultato:

$$\rho \sin \varphi' = + 0,66466$$

$$\rho \cos \varphi' = + 0,74517.$$

Di questi elementi mi son servito per la riduzione delle occultazioni; riduzione che è stata eseguita secondo il metodo di INNES-COMRIE ⁽¹⁾, al quale oramai si uniformano tutti i numerosi osservatori di occultazioni delle diverse specole, e secondo il quale sono state preparate e distribuite dall'Osservatorio Astronomico dell'Università Yale (Stati Uniti) le apposite cartoline che raccolgono tutti i dati delle osservazioni, uniformemente ridotte, da parte di quell'Ufficio Centrale, che poi se ne servirà per le ulteriori discussioni e per ricavarne le correzioni del moto lunare. Per il significato dei simboli adoperati e per la descrizione particolareggiata del metodo di riduzione, rimandiamo per semplicità alle opere citate.

2. - Per poter adoperare proficuamente il metodo di COMRIE, mi è stato necessario preparare preventivamente delle tavole numeriche per il sollecito calcolo di quantità dipendenti dal luogo di osservazione, e che, come tali, non potevano essere tabellate direttamente dall'Ufficio Centrale. Nella prima, necessaria per il computo di h , angolo orario della Luna nell'istante dell'osservazione, i valori degli equivalenti in tempo siderale delle ore di tempo medio sono stati conglobati con il valore λ della longitudine del luogo di osservazione (eq.^{le} CAUCHOIX, $\lambda = -0^h 49^m,813$). La seconda fornisce i valori delle quantità:

$$\xi = \frac{\rho \cos \varphi'}{\alpha} \sin h$$

$$Q = \frac{\rho \cos \varphi'}{\alpha} \cos h$$

α essendo il rapporto tra il raggio della Luna e quello della Terra ($\alpha = 0,2724953$) corrispondente al valore del semi-diametro alla distanza media di $932'',63$.

Per il nostro luogo di osservazione si è ottenuto:

$$\begin{cases} \xi = 27346,2 \cdot \sin h \\ Q = 27346,2 \cdot \cos h \end{cases}$$

e la tavola dà ξ e Q con 5 cifre di minuto in minuto di h ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Supplemento al *Nautical Almanac* 1938 e *Astronomical Journal*, n. 1062.

⁽²⁾ Questa tavola è stata preparata presso l'Istituto Nazionale di Calcolo del Consiglio delle Ricerche, al cui direttore, prof. M. PICONE, rinnoviamo i più sentiti ringraziamenti.

TABELLA I.

$$B = 1,002738 A + 49^m,813.$$

A	B	A	B
— 3 ^h	21 ^h 49 ^m ,320	15 ^h	15 ^h 52 ^m ,277
— 2	22 49 ,484	16	16 52 ,441
— 1	23 49 ,649	17	17 52 ,606
		18	18 52 ,770
0	0 49 ,813	19	19 52 ,934
1	1 49 ,977		
2	2 50 ,142	20	20 53 ,098
3	3 50 ,306	21	21 53 ,263
4	4 50 ,470	22	22 53 ,427
		23	23 53 ,591
5	5 50 ,634	24	0 53 ,756
6	6 50 ,799		
7	7 50 ,963	25	1 53 ,920
8	8 51 ,127	26	2 54 ,084
9	9 51 ,291	27	3 54 ,248
10	10 51 ,456		
11	11 51 ,620		
12	12 51 ,784		
13	13 51 ,949		
14	14 52 ,113		

N. B. — La seconda parte della Tabella I, indipendente dalla longitudine λ , si trova tra le tavole ausiliarie del *Nautical Almanac*.

TABELLA II.

h	0^h		1^h		2^h		
	ξ	Q	ξ	Q	ξ	Q	
0^m	0	27346	7078	26414	13673	23683	60^m
1	119 ¹¹⁹	27346 ⁰	7193 ¹¹⁵	26383 ³¹	13776 ¹⁰³	23623 ⁶⁰	59
2	239 ¹²⁰	27345 ¹	7308 ¹¹⁵	26352 ³¹	13879 ¹⁰³	23562 ⁶¹	58
3	358 ¹¹⁹	27344 ¹	7423 ¹¹⁵	26319 ³³	13982 ¹⁰³	23501 ⁶¹	57
4	477 ¹¹⁹	27342 ²	7538 ¹¹⁵	26287 ³³	14084 ¹⁰²	23440 ⁶¹	56
5	597 ¹²⁰	27340 ²	7652 ¹¹⁴	26254 ³⁴	14186 ¹⁰²	23379 ⁶¹	55
6	716 ¹¹⁹	27337 ³	7767 ¹¹⁵	26220 ³⁴	14228 ¹⁰²	23316 ⁶³	54
7	835 ¹¹⁹	27333 ⁴	7881 ¹¹⁴	26186 ³⁵	14390 ¹⁰¹	23254 ⁶³	53
8	954 ¹¹⁹	27330 ³	7995 ¹¹⁴	26151 ³⁵	14491 ¹⁰¹	23191 ⁶³	52
9	1074 ¹²⁰	27325 ⁵	8109 ¹¹⁴	26116 ³⁵	14592 ¹⁰¹	23127 ⁶⁴	51
10	1193 ¹¹⁹	27320 ⁵	8223 ¹¹⁴	26081 ³⁵	14693 ¹⁰¹	23064 ⁶³	50
11	1312 ¹¹⁹	27315 ⁵	8337 ¹¹⁴	26044 ³⁷	14794 ¹⁰¹	22999 ⁶⁵	49
12	1431 ¹¹⁹	27309 ⁶	8450 ¹¹³	26008 ³⁸	14894 ¹⁰⁰	22934 ⁶⁵	48
13	1550 ¹¹⁹	27302 ⁷	8564 ¹¹⁴	25971 ³⁷	14994 ⁹⁹	22869 ⁶⁵	47
14	1669 ¹¹⁹	27295 ⁷	8677 ¹¹³	25933 ³⁸	15093 ⁹⁹	22804 ⁶⁶	46
15	1789 ¹²⁰	27288 ⁷	8790 ¹¹³	25895 ³⁸	15193 ¹⁰⁰	22738 ⁶⁶	45
16	1908 ¹¹⁹	27280 ⁸	8903 ¹¹³	25856 ³⁹	15292 ⁹⁹	22671 ⁶⁷	44
17	2027 ¹¹⁹	27271 ⁹	9016 ¹¹³	25817 ³⁹	15391 ⁹⁹	22604 ⁶⁷	43
18	2146 ¹¹⁹	27262 ⁹	9128 ¹¹²	25778 ³⁹	15489 ⁹⁸	22537 ⁶⁷	42
19	2264 ¹¹⁸	27252 ¹⁰	9241 ¹¹²	25738 ⁴⁰	15587 ⁹⁸	22469 ⁶⁸	41
20	2383 ¹¹⁹	27242 ¹⁰	9353 ¹¹²	25697 ⁴¹	15685 ⁹⁸	22401 ⁶⁸	40
21	2502 ¹¹⁹	27231 ¹¹	9465 ¹¹²	25656 ⁴¹	15783 ⁹⁸	22332 ⁶⁹	39
22	2621 ¹¹⁹	27220 ¹¹	9577 ¹¹²	25614 ⁴²	15880 ⁹⁷	22263 ⁶⁹	38
23	2740 ¹¹⁹	27209 ¹¹	9689 ¹¹²	25572 ⁴²	15977 ⁹⁷	22193 ⁷⁰	37
24	2858 ¹¹⁸	27196 ¹³	9800 ¹¹¹	25530 ⁴²	16074 ⁹⁷	22124 ⁶⁹	36
25	2977 ¹¹⁹	27184 ¹²	9911 ¹¹¹	25487 ⁴³	16170 ⁹⁶	22053 ⁷¹	35
26	3096 ¹¹⁹	27170 ¹⁴	10022 ¹¹¹	25443 ⁴⁴	16266 ⁹⁶	21982 ⁷¹	34
27	3214 ¹¹⁸	27157 ¹³	10133 ¹¹¹	25399 ⁴⁴	16362 ⁹⁶	21911 ⁷¹	33
28	3333 ¹¹⁹	27142 ¹⁵	10244 ¹¹¹	25355 ⁴⁴	16457 ⁹⁵	21840 ⁷¹	32
29	3451 ¹¹⁸	27128 ¹⁴	10355 ¹¹¹	25310 ⁴⁵	16552 ⁹⁵	21768 ⁷²	31
30	3569 ¹¹⁸	27112 ¹⁶	10465 ¹¹⁰	25265 ⁴⁵	16647 ⁹⁵	21695 ⁷³	30
	Q	ξ	Q	ξ	Q	ξ	h
	5^h		4^h		3^h		

N. B. — ξ ha lo stesso segno di $\sin h$. Q ha lo stesso segno di $\cos h$.

Segue TABELLA II.

<i>h</i>	0 ^h		1 ^h		2 ^h		
	ξ	Q	ξ	Q	ξ	Q	
30 ^m	3569	27112	10465	25265	16647	21695	30 ^m
31	3688 ¹¹⁹	27096 ¹⁶	10575 ¹¹⁰	25219 ⁴⁷	16742 ⁹⁵	21622 ⁷³	29
32	3806 ¹¹⁸	27080 ¹⁶	10685 ¹¹⁰	25172 ⁴⁷	16836 ⁹⁴	21549 ⁷³	28
33	3924 ¹¹⁸	27063 ¹⁷	10795 ¹¹⁰	25125 ⁴⁷	16930 ⁹⁴	21475 ⁷⁴	27
34	4042 ¹¹⁸	27046 ¹⁷	10904 ¹⁰⁹	25078 ⁴⁷	17023 ⁹⁴	21401 ⁷⁴	26
35	4160 ¹¹⁸	27028 ¹⁸	11014 ¹¹⁰	25030 ⁴³	17117 ⁹⁴	21327 ⁷⁴	25
36	4278 ¹¹⁸	27010 ¹⁸	11123 ¹⁰⁹	24982 ⁴⁸	17210 ⁹³	21252 ⁷⁵	24
37	4396 ¹¹⁸	26991 ¹⁹	11232 ¹⁰⁹	24933 ⁴⁹	17302 ⁹²	21177 ⁷⁵	23
38	4513 ¹¹⁷	26971 ²⁰	11340 ¹⁰⁸	24884 ⁴⁹	17394 ⁹²	21101 ⁷⁶	22
39	4631 ¹¹⁸	26951 ²⁰	11449 ¹⁰⁹	24834 ⁵⁰	17486 ⁹³	21025 ⁷⁶	21
40	4749 ¹¹⁸	26931 ²⁰	11557 ¹⁰⁸	24784 ⁵⁰	17578 ⁹³	20948 ⁷⁷	20
41	4866 ¹¹⁷	26910 ²¹	11665 ¹⁰⁸	24733 ⁵¹	17669 ⁹¹	20872 ⁷⁶	19
42	4983 ¹¹⁷	26888 ²²	11773 ¹⁰⁸	24682 ⁵¹	17760 ⁹¹	20794 ⁷⁸	18
43	5101 ¹¹⁸	26866 ²⁴	11880 ¹⁰⁷	24631 ⁵¹	17851 ⁹¹	20717 ⁷⁷	17
44	5218 ¹¹⁷	26844 ²³	11988 ¹⁰⁸	24579 ⁵²	17941 ⁹⁰	20639 ⁷⁸	16
45	5335 ¹¹⁷	26821 ²³	12095 ¹⁰⁷	24526 ⁵³	18031 ⁸⁹	20560 ⁷⁸	15
46	5452 ¹¹⁷	26797 ²⁴	12202 ¹⁰⁷	24473 ⁵³	18120 ⁸⁹	20481 ⁷⁹	14
47	5569 ¹¹⁷	26773 ²⁴	12308 ¹⁰⁶	24420 ⁵³	18209 ⁸⁹	20402 ⁷⁹	13
48	5686 ¹¹⁷	26749 ²⁴	12415 ¹⁰⁷	24366 ⁵⁴	18298 ⁸⁹	20322 ⁸⁰	12
49	5802 ¹¹⁶	26724 ²⁵	12521 ¹⁰⁶	24311 ⁵⁵	18387 ⁸⁹	20242 ⁸⁰	11
50	5919 ¹¹⁷	26698 ²⁶	12627 ¹⁰⁶	24256 ⁵⁵	18475 ⁸⁸	20162 ⁸⁰	10
51	6035 ¹¹⁶	26672 ²⁶	12733 ¹⁰⁶	24201 ⁵⁵	18563 ⁸⁸	20081 ⁸¹	9
52	6152 ¹¹⁷	26645 ²⁷	12838 ¹⁰⁵	24145 ⁵⁶	18650 ⁸⁷	20000 ⁸¹	8
53	6268 ¹¹⁶	26618 ²⁷	12943 ¹⁰⁵	24089 ⁵⁶	18737 ⁸⁷	19918 ⁸²	7
54	6384 ¹¹⁶	26591 ²⁷	13048 ¹⁰⁵	24032 ⁵⁷	18824 ⁸⁷	19836 ⁸²	6
55	6500 ¹¹⁶	26563 ²⁸	13153 ¹⁰⁵	23975 ⁵⁷	18910 ⁸⁶	19754 ⁸²	5
56	6616 ¹¹⁶	26534 ²⁹	13258 ¹⁰⁵	23918 ⁵⁷	18996 ⁸⁶	19671 ⁸³	4
57	6731 ¹¹⁵	26505 ²⁹	13362 ¹⁰⁴	23859 ⁵⁸	19082 ⁸⁶	19588 ⁸³	3
58	6847 ¹¹⁶	26475 ³⁰	13466 ¹⁰⁴	23801 ⁵⁸	19167 ⁸⁵	19505 ⁸³	2
59	6962 ¹¹⁵	26445 ³⁰	13570 ¹⁰⁴	23742 ⁵⁹	19252 ⁸⁵	19421 ⁸⁴	1
60	7078 ¹¹⁶	26414 ³¹	13673 ¹⁰³	23683 ⁵⁹	19337 ⁸⁵	19337 ⁸⁴	0
	Q	ξ	Q	ξ	Q	ξ	<i>h</i>
	5 ^h		4 ^h		3 ^h		

N. B. — ξ ha lo stesso segno di $\sin h$. Q ha lo stesso segno di $\cos h$.

TABELLA III.

Osservazioni delle occultazioni di stelle per la Luna.

N.	Serie del N. A.	*	Mag.	Data	T. sid. loc.	T. U.
1	29	54 Arietis	6 ^m .5	1938 Gennaio 11	2 ^h 13 ^m 52 ^s .8	18 ^h 01 ^m 44 ^s .2
2	30	B. D. + 18° 432	6 .7	Gennaio 11	5 20 58 .3	21 08 19 .0
3	56	ν Geminorum	4 .1	Gennaio 14	6 57 09 .4	22 32 26 .6
4	95	B. D. + 17° 454	6 .9	Febbraio 7	6 10 25 .8	20 11 28 .8
5	96	ρ Arietis	5 .6	Febbraio 7	7 00 31 .8	21 01 27 .2
6	171	14 Tauri	6 .3	Marzo 7	9 55 17 .5	22 05 38 .2
7	180	B. D. + 20° 785	5 .7	Marzo 8	7 12 58 .0	19 19 49 .2
8	187	ζ Tauri	3 .0	Marzo 9	6 29 55 .5	18 32 58 .3
9	187	ζ Tauri	3 .0	Marzo 9	7 00 45 .0	19 03 42 .7
10	201	B. D. + 19° 1430	7 .4	Marzo 10	6 55 04 .5	18 54 07 .1
11	207	B. D. + 16° 1551	7 .4	Marzo 11	10 39 42 .0	22 34 12 .0
12	218	Α ¹ Cancri	5 .7	Marzo 12	10 31 18 .5	22 20 54 .0
13	270	B. D. + 20° 948	6 .8	Aprile 5	9 19 29 .8	19 35 55 .1
14	271	B. D. + 20° 969	6 .8	Aprile 5	11 29 35 .3	21 45 39 .3
15	288	B. D. + 17° 1596	5 .6	Aprile 7	12 38 48 .0	22 46 48 .9
16	301	B. D. + 10° 1972	7 .4	Aprile 9	10 12 00 .6	20 12 33 .9
17	412	B. D. —15° 3817	5 .1	Maggio 12	13 29 52 .5	21 20 08 .3
18	460	B. D. + 7° 2181	6 .0	Giugno 3	15 04 48 .5	21 28 19 .0
19	483	B. D. —10° 3615	7 .4	Giugno 7	15 22 01 .6	21 29 45 .1
20	508	ω Ophiuchi	4 .6	Giugno 11	15 48 19 .3	21 40 15 .1
21	545	B. D. —9° 3569	6 .6	Luglio 4	15 06 00 .0	19 27 36 .9
22	552	B. D. —13° 3761	6 .9	Luglio 5	16 38 23 .5	20 55 49 .1
23	567	B. D. —19° 4106	7 .0	Luglio 7	17 34 05 .9	21 43 30 .5
24	581	B. D. —20° 4454	6 .4	Luglio 8	16 34 40 .9	20 40 19 .5
25	671	58 Ophiuchi	4 .9	Agosto 6	17 08 18 .0	19 19 49 .8
26	893	λ Piscium	4 .6	Ottobre 7	23 15 11 .7	21 21 57 .0

3. — La tabella III raccoglie i risultati delle osservazioni, che sono state eseguite all'equatoriale medio CAUCHOIX-CAVIGNATO (obiettivo cm. 15,5; distanza focale cm. 224) tutte dallo scrivente, tranne quelle contrassegnate col N° 3 e 15 fatte dal Prof. G. ARMELLINI, Direttore del-

l'Osservatorio. Il fenomeno normalmente osservato è stato l'*immersione* al bordo oscuro, tranne che per il N° 9, in cui è stata osservata l'*emersione* al bordo luminoso. Le stelle sono state tutte scelte dalle liste preparate dal *Nautical Almanac* e pubblicate dall'Osservatorio di Torino (Pubbli. N° 32 *bis*).

TABELLA IV.

Riduzioni delle occultazioni di stelle per la Luna.

N.	p	q	p^2	pq	q^2	$\Delta\sigma$	$p\Delta\sigma$	$q\Delta\sigma$	Coefficiente di		Luna- zione
									$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	
1	+ 0.90	+ 0.44	0.81	+ 0.40	0.19	- 1".1	- 0".9	- 0".5	+ 11.6	+ 0.57	186
2	+ 0.99	- 0.14	0.98	- 0.14	0.02	- 4 .4	- 4 .3	+ 0 .6	+ 14.1	+ 0.04	186
3	+ 0.99	- 0.15	0.98	- 0.15	0.02	- 2 .4	- 2 .4	+ 0 .4	+ 13.6	- 0.26	186
4	+ 0.86	- 0.51	0.74	- 0.44	0.26	- 0 .6	- 0 .1	0 .0	+ 13.6	- 0.31	187
5	+ 0.93	+ 0.36	0.87	+ 0.34	0.13	- 1 .4	- 1 .3	- 0 .5	+ 12.0	+ 0.54	187
6	+ 1.00	+ 0.03	1.00	+ 0.03	0.00	- 0 .9	- 0 .9	- 0.03	+ 6.7	+ 0.88	188
7	+ 0.90	- 0.44	0.81	- 0.40	0.19	- 1 .3	- 1 .2	+ 0 .6	+ 12.9	- 0.38	188
8	+ 0.44	+ 0.90	0.19	+ 0.40	0.81	- 0 .9	0 .0	- 0 .8	+ 6.7	+ 0.88	188
9	+ 0.32	+ 0.95	0.10	+ 0.30	0.90	+ 3 .8	+ 1 .2	+ 3 .6	- 4.2	+ 0.96	188
10	+ 0.93	+ 0.37	0.86	+ 0.34	0.14	+ 1 .9	+ 1 .8	+ 0 .7	+ 13.9	+ 0.24	188
11	+ 0.99	+ 0.14	0.98	+ 0.14	0.02	- 1 .3	- 1 .3	- 0 .2	+ 14.3	- 0.09	188
12	+ 0.73	- 0.69	0.53	- 0.50	0.47	- 0 .7	- 0 .5	+ 0 .5	+ 13.9	- 0.25	188
13	+ 0.98	- 0.22	0.95	- 0.22	0.05	+ 3 .3	+ 3 .2	- 0 .7	+ 13.6	- 0.24	189
14	+ 0.95	+ 0.32	0.90	+ 0.30	0.10	+ 4 .3	+ 4 .1	+ 1 .4	+ 13.7	+ 0.28	189
15	+ 0.40	+ 0.92	0.16	+ 0.37	0.84	- 0 .7	- 0 .3	- 0 .6	+ 7.3	+ 0.86	189
16	+ 0.91	+ 0.41	0.83	+ 0.37	0.17	- 1 .2	- 1 .1	- 0 .5	+ 14.7	+ 0.10	189
17	+ 0.20	- 0.98	0.04	- 0.20	0.95	+ 2 .7	+ 0 .5	- 2 .6	- 2.3	- 1.00	190
18	+ 0.37	- 0.93	0.14	- 0.34	0.86	- 4 .8	- 1 .8	+ 4 .5	+ 1.3	- 1.01	191
19	+ 0.86	- 0.52	0.73	- 0.44	0.27	- 2 .9	- 2 .5	+ 1 .5	+ 9.6	- 0.76	191
20	+ 0.78	+ 0.62	0.61	+ 0.49	0.39	- 1 .2	- 0 .9	- 0 .7	+ 13.0	+ 0.56	191
21	+ 0.33	- 0.94	0.11	- 0.31	0.89	- 2 .2	- 0 .7	+ 2 .0	- 1.0	- 0.98	192
22	+ 0.98	+ 0.19	0.96	+ 0.19	0.04	- 1 .7	- 1 .7	- 0 .3	+ 14.5	- 0.11	192
23	+ 0.85	- 0.53	0.72	- 0.45	0.28	- 2 .1	- 1 .8	+ 1 .1	+ 10.5	- 0.66	192
24	+ 1.00	+ 0.04	1.00	+ 0.04	0.00	- 2 .6	- 2 .6	- 0 .1	+ 13.9	- 0.05	192
25	+ 0.84	- 0.55	0.70	- 0.46	0.30	- 0 .4	- 0 .3	+ 0 .2	+ 12.0	- 0.51	193
26	+ 0.95	- 0.30	0.91	- 0.29	0.09	- 2 .1	- 2 .0	+ 0 .6	+ 15.0	+ 0.05	195

4. - L'ultima Tabella IV contiene le riduzioni eseguite secondo il metodo di INNES-COMRIE e adoperando gli elementi pubblicati nel *Nautical Almanac*: esse sono presentate nella maniera uniforme consigliata dall'Ufficio Centrale dell'Osservatorio Yale (A. J. n° 1080, pag. 13), pubblicazione a cui rimandiamo per ogni spiegazione di dettaglio e per il significato dei simboli. Alle ore osservate è stata apportata la correzione $\pm 0^h,00152$, corrispondente a $- 3''$ di correzione per la longitudine media della Luna. Queste riduzioni sono state tutte eseguite dallo scrivente.

Astronomia. — *Nuove ricerche sull'«ammasso del Sole».* —
III. *Gli indici di colore.* Nota di LUCIO GIALANELLA, presentata ⁽¹⁾ da GIUSEPPE ARMELLINI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. In due precedenti Note ⁽²⁾ ho mostrato come il problema — già posto da SCHIAPARELLI trenta anni fa — di riconoscere e caratterizzare un gruppo di stelle moventisi di conserva con il Sole e come tali aventi velocità spaziale relativa minima, si possa considerare, allo stato attuale delle conoscenze di caratteristiche stellari (velocità radiali, parallassi, moti propri), impostato su basi rigorose, anche se non ancora completamente e definitivamente risolto. Precisamente ho mostrato come si possa ritenere facente parte di questo «ammasso del Sole» un gruppo di 122 stelle (123 con il Sole) distinto (per semplice comodo di studio) in un primo gruppo di 36 stelle dotate di velocità spaziale relativa minore di 4 Km/sec e in un secondo gruppo di 86 stelle con velocità spaziale compresa tra 4 e 7 Km/sec. Tale distinzione potrebbe significare — come già dissi — che, mentre le stelle del primo gruppo, dotate di velocità spaziale relativa minore di $\frac{1}{5}$ della velocità del Sole verso l'Apice, hanno probabilità maggiore di mantenersi insieme (e quindi il gruppo conservarsi sensibilmente invariabile col tempo), le stelle del secondo gruppo potrebbero più o meno diradarsi e disperdersi in varie direzioni. La velocità media delle stelle del primo gruppo rispetto al Sole è di Km/sec 3,1; quella del secondo gruppo 5,8; quella dell'intero ammasso Km/sec 4,4. Ho fatto notare pure che gli scarti tra le direzioni del moto delle stelle e quella del moto del Sole non superano i 18°, essendo in media inferiori ai 9°. Di questo ammasso ho dato ancora una rappresentazione grafica in assonometria isometrica ortogonale, e ne ho iniziato lo studio statistico per quel che riguarda la distribuzione dei tipi spettrali, delle grandezze assolute e delle velocità spaziali delle stelle costituenti il gruppo.

Le dimensioni dell'ammasso — circa 300 parsec, dell'ordine quindi dell'ammasso o corrente dell'Orsa Maggiore — sono molto superiori alle

⁽¹⁾ Nell'Adunanza del 16 dicembre 1939-XXVIII.

⁽²⁾ «Rendiconti R. Accademia Nazionale dei Lincei», vol. XXVI (1937) e XXVII (1938).

normali dimensioni degli ammassi galattici noti, e la densità delle stelle vi è molto inferiore che in questi; d'onde impropria potrebbe sembrare la denominazione di « ammasso », trattandosi realmente di uno sciame di stelle, e quindi di una *corrente stellare*, la quale risulta specialmente definita da una velocità media assai poco differente in direzione e modulo da quella del Sole verso l'Apice. Naturalmente lo studio che di essa abbiamo sin qui fatto nulla permette ancora di affermare circa la questione della *realità* dell'ammasso stesso riguardo alla eventuale origine comune delle stelle che lo costituiscono ⁽¹⁾.

Nella presente Nota proseguo lo studio statistico dell'ammasso esaminando gli indici di colore delle stelle e la loro distribuzione in funzione delle grandezze assolute ed apparenti.

2. La ricerca e la determinazione degli *indici di colore* delle 122 stelle, costituenti l'« ammasso del Sole » è stata molto laboriosa, pur trattandosi di stelle abbastanza brillanti. Come criterio generale ho voluto risalire alle grandezze fotografiche direttamente ottenute (con metodo extrafocale, possibilmente) scartando quelle dei cataloghi astrografici non del medesimo ordine di precisione. Ma questo, purtroppo, non è stato possibile realizzare nella totalità dei casi, in quanto non sono molto numerose le stelle di cui l'indice di colore possa essere ricavato da osservazioni dirette. Nei casi, quindi, in cui tali osservazioni non ho potuto rintracciare in alcuna delle numerosissime pubblicazioni di osservatori astronomici e nelle riviste scientifiche consultate, mi son dovuto contentare dell'indice di colore ricavato attraverso le relazioni statistiche tra tipo spettrale e indice di colore ottenute all'osservatorio di Harvard. Questo stesso osservatorio di Harvard ha annunciato la pubblicazione di un grande catalogo di grandezze fotografiche di stelle brillanti; ma fino al momento in cui scriviamo non ne è stata ancora iniziata la distribuzione agli osservatori, nè ho potuto prendere visione di alcuna delle poche copie mimeografiche che sono state inviate in esame tra gli astronomi ⁽²⁾.

Dal catalogo di indici di colore di Opik ⁽³⁾ — che è abbastanza ampio, contenendo oltre 4.500 stelle — ho ricavato gli indici di colore di 42 stelle dell'ammasso. Il sistema degli indici di colore di questo catalogo è definito dalla formula:

$$c = m_L - \frac{m_P + m_H}{2} \quad \text{per } m_L = 3.8$$

⁽¹⁾ Cfr. K. Graf FERRARI, *Zur Frage der Realität des « Sonnenhaufen »*. A. N. Bd. 268 (1939).

⁽²⁾ Cfr. *Transactions International Astronomical Union*, vol. VI, 1938.

⁽³⁾ « Publ. Tartu », tome XXVII, n. 1, 1929.

dove m_L denotano le grandezze fotografiche del catalogo di E. HERTZSPRUNG a Leida ⁽¹⁾, m_P le grandezze visuali di Potsdam, m_H quelle di Harvard. Il sistema così definito differisce un po' da quello della *scala di Harvard* o *internazionale* che noi naturalmente abbiamo assunto nel presente lavoro, e cioè quello definito dalla differenza delle grandezze fotografiche del catalogo di E. KING ⁽²⁾ e quelle visuali di Harvard. La conversione può però essere fatta facilmente mediante la seguente:

TABELLA I.

*Conversione degli indici di colore della scala di Öpik
in quelli della scala di Harvard.*

Öpik . .	—0.44	—0.32	—0.17	0.04	0.25	0.47	0.69	0.93	1.18	1.42	1.71	2.04
Harvard	—0.40	—0.20	0.00	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00	1.20	1.40	1.60	1.80

Gli indici di colore nella scala di Harvard sono stati dedotti con interpolazione grafica, e portano nelle successive tabelle II e III la sigla *Ta*.

3. — L'indice di colore delle rimanenti stelle è stato ricavato da vari cataloghi e raccolte di grandezze fotografiche direttamente osservate. E precisamente (la sigla denoterà la fonte):

- Y₁ — *Yerkes Actinometry* I, in *Astrophysical Journal*, 36.
Y₂ — *Yerkes Actinometry* II, in *Astrophysical Journal*, 73.
H — *Harvard Annals* 71, 1 [Standard fotogr. magnit. of bright stars]
H₁ — *Harvard Annals* 71, 2 [Spectra and fotogr. magnit. in standard regions]
POUL. — *Poulkovo Bulletin* XIII [Catalogue of 2135 stars in the zone + 57° 5' to + 77° 5']
CAP. — *Cape Zone Catalogue* [Magnitudes of stars in the zone — 40° to — 52°]
YA. — *Yale observatory* — Rev. A. G.:
zone + 25° + 30° vol. 9 contengono le grandezze fotografiche;
zone + 20° + 25° vol. 10 contengono le grandezze fotografiche;

(¹) « Bull. Astron. Inst. Netherland », I, 35.

(²) « Harvard Annals », vol. 76.

zone $+ 55^{\circ} + 60^{\circ}$. Le grandezze fotografiche sono state pubblicate a parte in « Contrib. from the Rutherford Observatory of the Columbia University » n° 30 di J. SCHILT and S. J. HILL. Le rimanenti zone fin qui pubblicate: $+ 50^{\circ} + 55^{\circ}$ vol. 4; $- 2^{\circ} + 1^{\circ}$ vol. 5; $- 10^{\circ} - 14^{\circ}$ vol. 11; non contengono le grandezze fotografiche. Purtroppo però in questi cataloghi sono state omesse le grandezze fotografiche di parecchie stelle, principalmente tra le più luminose che maggiormente ci interessavano.

DRA. — *Draper Catalogue* [soltanto una stella dell'« ammasso »].

Per le stelle non trovate in alcuna delle raccolte consultate (le precedentemente indicate e numerosissime altre), gli indici di colore sono stati dedotti dalle tabelle dettagliate che collegano — per le singole regioni del cielo (con limiti per le declinazioni) e per le singole grandezze (con distinzioni tra giganti e nane) — i tipi spettrali con l'indice di colore ⁽¹⁾, facendone, per ogni stella, la media tra il valore così dedotto e quello ricavato da E. KING ⁽²⁾. Questi valori sono contraddistinti con la sigla TAB.

Per il Sole, infine, è stato assunto l'indice di colore $+ 0^{\text{m}}.79$ (RUSSELL) ⁽³⁾. Gli indici di colore così ottenuti formano un sistema omogeneo, riferito alla scala di Harvard o internazionale.

Le seguenti tabelle II e III contengono i risultati delle ricerche; di ogni stella è dato il tipo spettrale, la grandezza visuale m (Harvard), la grandezza assoluta M , l'indice di colore c , l'autorità da cui questo indice di colore è stato ricavato con la corrispondente sigla. Si è conservata la distinzione dell'ammasso nei due gruppi.

⁽¹⁾ « Harvard Annals », 80, 9, tab. IV.

⁽²⁾ « Harvard Annals », 85, 3, tab. VI.

⁽³⁾ « Handbuch Astrophysic », V₁, pag. 346.

TABELLA II.

Stelle con velocità spaziale minore di 4 km/sec.

N.	*	Sp.	<i>m</i>	M	<i>c</i>	Aut.
1	P. G. C. 229	G 6	5.34	1.19	+ 0.26	Cap.
2	33 Ceti	K 1	6.20	0.10	+ 1.46	Ta.
3	υ Piscium	K 5	4.68	2.23	+ 1.33	Ta.
4	I Arietis	G 9	6.2	0.7	+ 0.42	Dra.
5	ι Cassiop. A	A 5 p	4.7	1.1	— 0.15	Ta.
6	γ Persei	F 9	3.08	— 0.12	+ 0.81	Ta.
7	P. G. C. 864	M 1	4.71	— 0.29	+ 1.85	Ta.
8	46 Tauri	F 0	5.35	2.35	+ 0.39	Ta.
9	Burnham G. C. 2220	B 0 sk	6.61	— 0.99	— 0.23	Tab.
10	5 Camelopard.	A 0	5.58	0.98	— 0.20	Ya.
11	26 Aurigae	A 9 n	5.49	1.89	+ 0.26	Tab.
12	23 Camelopard.	G 5	6.39	0.89	+ 0.68	Y ₂
13	W Geminor.	G 0 p	6.7–7.5	2.7–3.5	+ 1.06	Ta.
14	12 Lynceis	A 3 n	5.2	1.6	+ 0.07	Ta.
15	8 Geminorum A	A 3 n	3.51	2.11	+ 0.38	Ta.
16	8 Geminorum B	K 4	8.0	5.9	+ 1.40	Tab.
17	P. G. C. 1916	G 5	6.50	0.75	+ 0.96	Ta.
18	4 Puppis	F 0 n	5.11	2.01	+ 0.28	Tab.
19	P. G. C. 2349	G 5	4.12	2.42	+ 0.91	H
20	P. G. C. 2783	c F 1	4.94	0.94	+ 0.30	Tab.
21	P. G. C. 2952	G 5	4.76	3.31	+ 0.78	Tab.
22	B. D. + 34° 2264	F 0	6.14	1.69	+ 0.28	Tab.
23	P. G. C. 3182	A 5	5.12	2.27	+ 0.20	H ₁
24	12 Comae	F 5	4.82	2.62	+ 0.41	Ta.
25	16 Comae	A 2	5.04	1.54	+ 0.06	Tab.
26	83 Virginis	G 3 p	5.71	2.01	+ 0.70	Tab.
27	47 Herculis	A 0	5.46	1.46	+ 0.10	Ta.
28	θ Scorpii	F 0 n	2.04	— 1.06	+ 0.43	Ta.
29	34 Draconis	A 9 s	5.54	2.24	+ 0.09	Y ₂
30	Y Sagittarii	c G 2 p	5.4–6.2	2.1–2.9	+ 0.60	Tab.
31	P. G. C. 4724	K 2	5.84	0.09	+ 1.33	Y ₁
32	B. D. + 12° 3000	K 5	7.3	0.3	+ 1.27	Ta.
33	ρ Sagittarii	A 4 n	3.95	2.55	+ 0.32	H
34	γ Aquilae	K 3	2.80	— 0.40	+ 1.56	Ta.
35	P. G. C. 5190	B 3 n	4.82	— 1.28	— 0.41	Ta.
36	DT Cygni	F 7	5.86	1.61	+ 0.50	Tab.

TABELLA III.

Stelle con velocità spaziale compresa tra 4 e 7 km/sec.

N.	*	Sp.	<i>m</i>	M	<i>c</i>	Aut.
37	P. G. C. 5	B 8	5.49	—0.01	—0.06	<i>Poul.</i>
38	22 Andromed.	F 2	5.08	1.23	+ 0.40	<i>Ta.</i>
39	P. G. C. 41	G 3	5.80	0.05	+ 0.71	<i>Y₂</i>
40	32 Andromed.	G 6	5.42	1.17	+ 0.80	<i>Tab.</i>
41	P. G. C. 166	A 2 <i>n</i>	6.76	0.66	+ 0.06	<i>Tab.</i>
42	φ Andromed.	B 8	4.28	—0.32	—0.08	<i>Ta.</i>
43	40 Cassiop.	G 5	5.50	0.50	+ 0.99	<i>Y₂</i>
44	λ Arietis	A 5	4.83	4.53	+ 0.30	<i>Ta.</i>
45	49 Cassiop.	G 5	5.30	1.90	+ 1.39	<i>Y₂</i>
46	ε Trianguli	A 2 <i>n</i>	5.44	1.84	+ 0.06	<i>Tab.</i>
47	10 Trianguli	A 3 <i>s</i>	5.28	1.28	+ 0.08	<i>Tab.</i>
48	ζ Horologii	F 2 <i>s</i>	5.26	2.41	+ 0.34	<i>Tab.</i>
49	P. G. C. 699	A 0	5.82	—0.28	+ 0.05	<i>Y₂</i>
50	β Persei	B 8	2.3–3.5	0.0–1.2	—0.13	<i>Ta.</i>
51	31 Persei	K 2	4.92	—0.33	+ 1.60	<i>Ta.</i>
52	P. G. C. 896	B 9 <i>n</i>	4.87	—0.13	+ 0.02	<i>Ta.</i>
53	Burnham G. C. 1927	K 4	5.3	0.5	+ 1.20	<i>Y₂</i>
54	P. G. C. 914	F 8, A 2	5.25	1.65	+ 0.52	<i>Ta.</i>
55	ν Tauri	A 0	3.94	1.39	+ 0.05	<i>Ta.</i>
56	P. G. C. 974	A 1 <i>n</i>	5.12	1.42	+ 0.19	<i>Ta.</i>
57	66 Tauri	A 3	5.06	1.56	+ 0.13	<i>Ta.</i>
58	58 Persei	G 1	4.46	1.06	+ 1.34	<i>Ta.</i>
59	S Z Tauri	G 0	7.2–7.7	3.2–3.7	+ 0.70	<i>Ta.</i>
60	α Camelop.	B 0	4.38	0.88	+ 0.05	<i>Ta.</i>
61	Groombr. 889	A 2 <i>n</i>	5.6	1.0	+ 0.06	<i>Tab.</i>
62	5 Aurigae	F 1 <i>s</i>	6.00	3.05	+ 0.30	<i>Tab.</i>
63	P. G. C. 1234	K 6	5.36	0.36	+ 1.17	<i>H₁</i>
64	P. G. C. 1268	A 4	5.16	1.86	+ 0.10	<i>Tab.</i>
65	P. G. C. 1348	M 0	5.96	—0.14	+ 1.40	<i>Tab.</i>
66	2 Lynceis	A 2 <i>s</i>	4.42	1.12	+ 0.02	<i>Ta.</i>
67	P. G. C. 1672	A 1	5.75	1.30	+ 0.16	<i>Ya.</i>

segue TABELLA III.

N.	*	Sp.	<i>m</i>	M	<i>c</i>	Aut.
68	v ³ Canis Maior	K o	4.65	—0.15	+1.00	Tab.
69	42 Camelop.	B 3	5.04	—0.46	+0.04	Y ₂
70	B. D. + 33° 1454	F 0	7.34	1.84	+0.28	Tab.
71	P. G. C. 1816	M 3	5.02	1.42	+1.08	Cap.
72	P. G. C. 1830	B 9	5.69	1.59	—0.02	Tab.
73	P. G. C. 1961	B 9	5.52	1.82	—0.02	Tab.
74	82 Gemin.	A 7 n	6.21	2.51	+0.40	Ya.
75	P. G. C. 2064	F 8 s	5.32	2.77	+0.50	Tab.
76	ζ Puppis	c K 1	3.47	—3.03	+0.71	H
77	P. G. C. 2291	K o	4.87	—2.13	+2.13	Cap.
78	σ ² Ursae Maior.	F 5	4.87	0.47	+0.39	Ta.
79	τ ² Hydrae	A 3	4.50	1.80	+0.25	Ta.
80	P. G. C. 2568	G 5	5.36	1.76	+1.84	Cap.
81	42 Lynceis	A 5 n	5.24	1.74	+0.14	Tab.
82	44 Hydrae	K 5	5.32	0.32	+1.18	Tab.
83	67 Leonis	A 3 s	5.63	1.18	+0.08	Tab.
84	ω Virginis	M 6	5.47	0.22	+1.56	Ta.
85	β Hyadis	B 9	4.40	—0.05	—0.02	Tab.
86	14 Comae	A 5	5.15	2.20	+0.14	Tab.
87	21 Comae	A 2 s	5.39	1.39	+0.02	Tab.
88	31 Comae	F 6	5.07	2.07	+0.44	Tab.
89	P. G. C. 3478	A 3 s	5.75	1.15	+0.08	Tab.
90	B. D. + 33° 2361	F 8	7.8	3.8	+0.50	Tab.
91	84 Ursae Maior.	A 2 s	5.53	0.73	+0.02	Tab.
92	B. D. + 31° 2605	A 3	6.34	2.09	+0.08	Tab.
93	B. D. + 8° 2857	A 0	5.74	1.29	+0.10	Ta.
94	π ¹ Bootis	A 0	4.94	0.49	—0.12	Ta.
95	P. G. C. 3759	A 0	5.00	1.00	0.00	Tab.
96	56 Hydrae	G 7	5.39	2.79	+0.84	Tab.
97	γ Ursae Minor.	A 2	3.14	0.90	+0.05	Ta.
98	P. G. C. 4022	A 6 s	5.79	1.94	+0.39	Tab.
99	19 Ursae Minor.	B 8	5.51	0.01	+0.34	Y ₁

segue TABELLA III.

N.	*	Sp.	<i>m</i>	M	<i>c</i>	Aut.
100	P. G. C. 4185	<i>K 2</i>	5.11	— 0.39	+ 1.07	<i>Tab.</i>
101	ω Ophiuchi	<i>A 5 s</i>	4.57	1.72	+ 0.14	<i>Tab.</i>
102	α Triang. Austr.	<i>K 5</i>	1.88	— 1.12	+ 1.78	<i>Ta.</i>
103	18 Draconis	<i>K 1</i>	5.00	1.15	+ 1.21	<i>Ta.</i>
104	P. G. C. 4270	<i>F 0</i>	4.88	3.08	+ 0.36	<i>Ta.</i>
105	B. D. + 56° 1959	<i>F 2</i>	7.6	2.9	+ 0.05	<i>Ya.</i>
106	Y Ophiuchi	<i>G 0 p</i>	6.2–7.0	3.0–3.8	+ 0.56	<i>Tab.</i>
107	28 Aquilae A	<i>F 0</i>	5.42	1.57	+ 0.28	<i>Tab.</i>
108	P. G. C. 5002	<i>A 2</i>	5.29	1.69	+ 0.06	<i>Tab.</i>
109	σ Aquilae	<i>B 3</i>	5.17	— 2.43	+ 0.05	<i>Ta.</i>
110	δ Sagittae	<i>M 2</i>	3.78	— 0.47	+ 1.50	<i>Ta.</i>
111	P. G. C. 5081	<i>A 0</i>	5.35	1.60	0.00	<i>Tab.</i>
112	P. G. C. 5167	<i>K 2</i>	7.29	3.44	— 0.92	<i>Ya.</i>
113	ν Capricorni	<i>A 0</i>	4.84	1.44	0.00	<i>Tab.</i>
114	P. G. C. 5222	<i>A 3</i>	5.68	1.08	— 0.08	<i>Cap.</i>
115	52 Cygni	<i>G 8</i>	4.34	0.94	+ 1.10	<i>Ta.</i>
116	5 Aquarii	<i>B 9 s</i>	5.50	0.25	— 0.02	<i>Tab.</i>
117	φ Capricorni	<i>K 0</i>	5.35	0.90	+ 1.00	<i>Tab.</i>
118	B. D. + 65° 1691	<i>B 3 k</i>	6.28	— 3.78	— 0.32	<i>Poul.</i>
119	π Pegasi	<i>A 4 n</i>	4.38	0.98	+ 0.49	<i>Ta.</i>
120	89 Aquarii	<i>G 3</i>	4.94	2.79	+ 0.64	<i>Tab.</i>
121	9 Andromed.	<i>A 6 s</i>	5.90	1.65	+ 0.14	<i>Tab.</i>
122	104 Aquarii	<i>F 2</i>	7.17	2.37	+ 0.34	<i>Tab.</i>

4. Con i valori delle grandezze assolute e degli indici di colore così determinati ho costruito il *diagramma di Russell-Hertzsprung* per l'ammasso del Sole (v. fig. 1), portando in ascissa gli indici di colore e in ordinata le grandezze assolute.

L'esame di questo diagramma è interessante, in quanto lascia intravedere la possibilità di dire qualche cosa — se pure l'affermazione non abbia

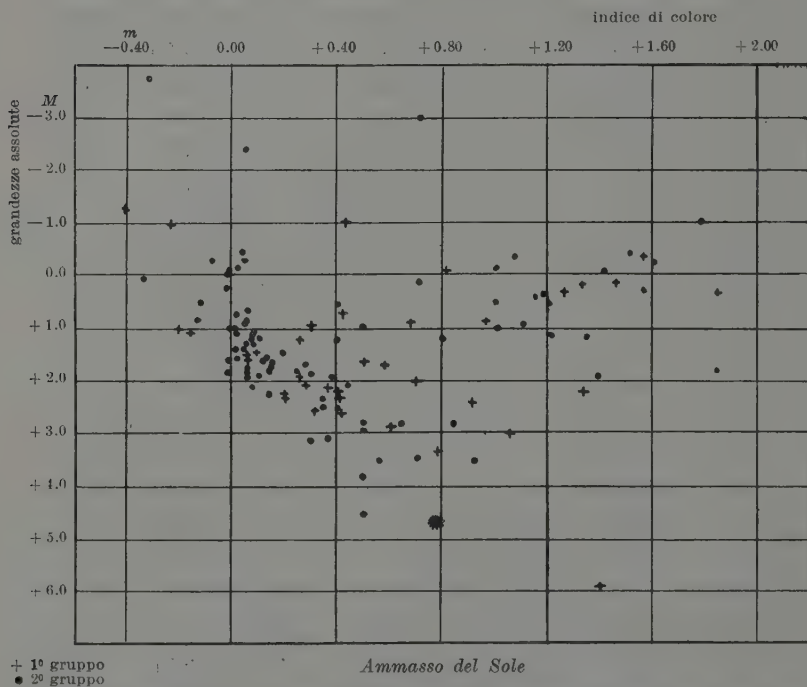


Fig. 1. — Diagramma di RUSSELL-HERTZSPRUNG [grandezze assolute-indice di colore].

naturalmente carattere definitivo — sulla questione discussa della effettiva realtà dell'ammasso o corrente del Sole, e cioè della possibilità che la maggioranza delle stelle che lo compongono abbiano un'origine comune. In esso è molto chiaramente delineata la *sequenza principale*, con un addensamento per le stelle di tipo A, che ne costituiscono, come abbiamo già visto nelle precedenti Note, il 35,8 % (nell'intero sistema galattico le stelle di tipo A sono il 21,7 %), e sono in preponderanza assoluta rispetto agli altri tipi spettrali ⁽¹⁾: F il 16,2 %, G il 16,2 %, K il 15,4 %, B

⁽¹⁾ Il *Presepe* che è un ammasso caratteristico del tipo 2a di Trumpler ha una percentuale di stelle del tipo A del 31 % (« Hand. Aph. », V, pag. 315).

l'11,4 %. Vi è una dispersione maggiore per i tipi spettrali più avanzati e per il gruppo delle giganti e supergiganti, le quali – se pure non costituiscono un gruppetto separato o ben definito – appaiono visibilmente raggruppate. Tutto questo potrebbe confermare l'appartenenza dello sciame studiato ad uno dei tipi già noti di *ammassi galattici*, e precisamente a quello che nella classificazione di TRUMPLER ⁽¹⁾ è denominato *2a* a cui appartengono le Iadi, il Presepe, la corrente dell'Orsa Maggiore ⁽²⁾ ecc.

Se si ammette – secondo TRUMPLER – che il tipo dell'ammasso definisce lo stadio della sua evoluzione, si potrebbe dire che il ramo delle nane indica che si tratta di un gruppo molto antico, che si è tuttavia conservato nonostante la rotazione differenziale della Via Lattea. Non nascondiamo però che una tale interpretazione debba essere presa con molta cautela.

Aggiungiamo ancora che l'indice di colore medio dell'ammasso è $+0^m,51$, essendo $+0^m,57$ quello delle stelle del primo gruppo e $+0^m,46$ quello delle stelle del secondo gruppo. Poco differenti sono quelli di altri ammassi dello stesso tipo. Ad esempio, l'indice di colore medio dell'ammasso galattico *Messier 67* è $+0^m,89$ ⁽³⁾; ma questo ammasso costituisce una singolarità della classe *2a* (tipo Iadi), in quanto in esso sono assenti le stelle giganti azzurre ⁽⁴⁾. Senza di ciò si avrebbe un valore più basso e cioè eguale all'incirca al nostro. Analogamente A. PANNEKOEK ⁽⁵⁾ ha concluso il valore $+0^m,43$ come indice di colore medio per l'ammasso dello *Scudo* (*Messier 11*, tipo *2a*), paragonando la luminosità fotografica con quella visuale di tutto l'ammasso; mentre FATH ⁽⁶⁾ ne aveva trovato il valore $+0^m,7$; onde si ha una media di $0^m,56$ che è circa eguale a quella dell'ammasso solare.

5. – Per completare lo studio della distribuzione dei tipi spettrali e indici di colore nell'ammasso del Sole, abbiamo – sempre con i dati delle tabelle II e III – costruito il diagramma della fig. 2, in cui sono riportati in ascissa gli indici di colore e in ordinata le grandezze apparenti visuali nella scala di Harvard. Anche l'esame di questo diagramma potrebbe

⁽¹⁾ TRUMPLER, *Spectral types in open clusters*, «Lick Bull.», 14 (1930), 154; e anche: «Pub. Astron. Society of Pacific», 37, 307. Si veda pure utilmente: P. ten BRUGGENCATE, *Sternhaufen*, Berlin, 1927, pag. 134.

⁽²⁾ R. BARTHOLEYS, *Le Courant de la Grande Ourse*, «Astron. Nachr.», Bd, 269, 3, 1939.

⁽³⁾ «Hand. Aph.», V₂, pag. 731.

⁽⁴⁾ «Hand. Aph.», V₂, pag. 705.

⁽⁵⁾ «Bull. Astron. Netherland», 2, pag. 23 (1923).

⁽⁶⁾ Contr. Mount Wilson Obsery., n° 63 (1912), oppure «Ap. J.», 36, pag. 362 (1912).

confermare l'effettiva realtà dell'ammasso (¹); per quanto – si potrebbe osservare – la differenza sostanziale che c'è tra lo studio del nostro ammasso e quello degli altri ammassi risiede nel fatto che nel caso presente l'osservatore appartiene all'ammasso, mentre negli altri sta al di fuori.

Ma, ripetiamo, la questione è ancora aperta, e attende uno studio più approfondito quando si siano perfezionati i valori delle caratteristiche stellari adoperate (con speciale riguardo alle parallassi).

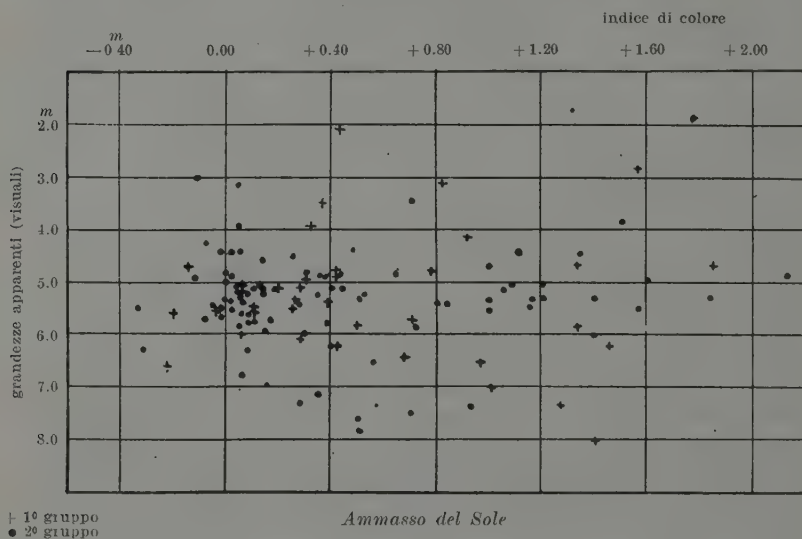


Fig. 2. – Diagramma luminosità apparenti – indice di colore.

Per finire, aggiungiamo che questo secondo diagramma della distribuzione delle grandezze apparenti in funzione dell'indice di colore per le stelle dell'ammasso del Sole potrebbe utilmente servire – oltre che allo studio statistico dell'ammasso stesso – anche a portare un contributo alle moderne investigazioni circa le variazioni degli indici di colore con la grandezza apparente, per stelle o gruppi di stelle prossimi al piano galattico. In quest'ordine di ricerche, si hanno lavori notevoli di E. A. KREIKEN, HERTZSPRUNG, PETERSON, SHAPLEY ed altri (²). Ma di questo non possiamo occuparci in questa sede, perchè la discussione ci porterebbe troppo fuori dal nostro argomento.

(¹) Si veda utilmente: ten BRUGGEGATE, op. cit., pag. 120 e segg. dove sono esaminati e discussi molti simili diagrammi per i vari ammassi stellari dei diversi tipi.

(²) Cfr. : « Hand. Aph. », V₁, pagg. 407-414.

Geodesia (Fotogrammetria). — *Sulla determinazione speditiva delle quote da fotogrammi nadirali.* — Nota di LUIGI SOLAINI, presentata ⁽¹⁾ da GINO CASSINIS, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Nei rilievi aerofotogrammetrici speditivi a piccola scala ha molta importanza l'introduzione di strumenti restitutori assai semplici, quali lo Stereografometro NISTRI, lo stereoscopio tracciatore ZEISS, ecc. Essi servono a un duplice scopo: per collegare tra di loro i fotogrammi con una triangolazione aerea e per eseguire in un secondo tempo la restituzione di dettaglio. Il metodo di triangolazione adottato è quello radiale, il quale tuttavia consente solo di dedurre le posizioni planimetriche dei punti radiali e quelle dei punti ausiliari. Per la determinazione delle quote si ricorre alla misura delle parallassi in piani nucleari verticali, il cui principio è universalmente noto. La triangolazione radiale viene quasi sempre eseguita a punto principale, per mancanza di dati relativi all'orientamento dei fotogrammi. Inclinazioni delle lastre e dislivelli del terreno inducono errori negli angoli misurati sui fotogrammi e quindi nelle posizioni dei punti, ma tali errori, ove inclinazioni e dislivelli non siano eccessivi, sono tollerabili. Non accade invece altrettanto nella determinazione delle quote, poichè le inclinazioni delle lastre deformano l'immagine del terreno e quindi fanno variare le parallassi lineari, causando errori fortissimi nelle quote. Per eliminarli sono possibili due vie: la prima consiste nel determinare le inclinazioni longitudinale e trasversale dei fotogrammi con qualche mezzo ausiliario (ad es. fotografie dell'orizzonte) e nel raddrizzare i fotogrammi stessi prima della loro utilizzazione; la seconda nel cercare di determinare gli orientamenti delle lastre durante la restituzione.

Il presente lavoro si occupa di un procedimento basato sul secondo metodo, applicabile particolarmente bene agli stereografometri.

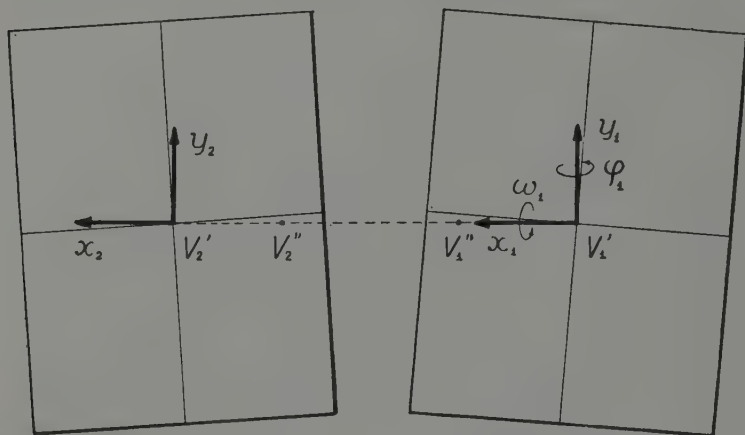
In due fotogrammi non orientati uno rispetto all'altro, si manifestano parallassi di altezza; poichè negli stereografometri i fotogrammi sono posti complanari e degli elementi di orientamento relativo, solo gli sbandamenti sono ripristinati con i loro veri valori, le parallassi di altezza sono generate da eventuali inclinazioni longitudinali e trasversali e da dislivelli tra i

(1) Nell'Adunanza del 16 dicembre 1939-XVIII.

punti di presa. Valutando le parallassi e conoscendo le quote di tre punti noti, si possono determinare gli orientamenti delle lastre e correggere quindi le quote dei punti restituiti.

Supponiamo di impiegare per la restituzione delle diapositive, disposte nello stereografometro con la gelatina verso l'alto e in modo che si seguano nel senso del volo da destra verso sinistra.

Assumiamo gli assi come sono indicati in figura; in essa sono segnati pure i sensi positivi per le inclinazioni longitudinale φ e trasversale ω .



Consideriamo come elementi di orientamento relativo i seguenti: convergenza $\gamma = \varphi_2 - \varphi_1$, differenza di inclinazione trasversale $\delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ e componente verticale b_z della base; essi siano tutti abbastanza piccoli, perchè se ne possano trascurare i quadrati.

Indichiamo con f la distanza principale della camera fotografica, con $p_0 = x_{10} - x_{20}$ la parallasse lineare relativa al caso normale, con p quella effettiva nei fotogrammi inclinati e con $r = y_1 - y_2$ la parallasse di altezza. Valgono allora le note relazioni:

$$[1] \quad p = p_0 + \frac{x_2^i - x_1^i}{f} \varphi_1 + f \left(1 + \frac{x_2^i}{f^2} \right) \gamma - \frac{p y}{f} \omega_1 + \frac{x_2 y}{f} \delta\omega + \frac{x_2}{h} b_z$$

$$[2] \quad v = \frac{y}{f} \left(+ x_2 \gamma + y \delta\omega + \frac{f}{h} b_z \right),$$

avendo posto, con sufficiente approssimazione: $y_1 = y_2 = y$.

Scegliendo tre punti qualunque dello stereogramma e misurando in ciascuno di essi la parallasse r , si possono ricavare, con l'aiuto delle [2], la convergenza, la differenza di inclinazione trasversale e la componente

verticale della base. Se poi i punti sono scelti in posizioni convenienti, la risoluzione del sistema formato dalle [2] è estremamente semplice e anzi se ne possono dare addirittura le formule risolutive.

Se i tre punti hanno infatti le seguenti coordinate di lastra (nei sistemi assunti):

$$\begin{array}{llll} A & x_1 = \bar{x} & x_2 = 0 & y = \bar{y} \\ B & x_1 = \bar{x} & x_2 = 0 & y = -\bar{y} \\ C & x_1 = 0 & x_2 = -\bar{x} & y = \bar{y}, \end{array} \quad (\bar{y} \text{ qualunque e } \bar{x} \text{ valore della base ridotta nella scala dei fotogrammi})$$

si ottiene:

$$\gamma = \frac{f(v_a - v_c)}{\bar{x}\bar{y}}; \quad \delta\omega = \frac{f(v_a + v_b)}{2\bar{y}^2}; \quad b_z = \frac{h(v_a + v_b)}{2\bar{y}}.$$

La determinazione dell'orientamento relativo è quindi molto semplice. Rimane da trovare l'orientamento assoluto della prima lastra, cioè φ_1 e ω_1 . Perciò serve la [1]. L'errore commesso nella parallasse lineare in causa del non corretto orientamento delle lastre è $\delta p = p - p_0$; esso produce un errore in quota pari a $\delta h = -\frac{h}{p}\delta p$, cosicchè δh dipende da tutti gli elementi di orientamento, relativo e assoluto; ma i primi sono già stati determinati, quindi effettuando le opportune correzioni, sono solo φ_1 e ω_1 che influenzano le quote.

Sostituendo nella espressione ora scritta di δh il valore di δp dedotto dalla [1], nella quale però si trascura il termine $f\gamma$, la cui influenza è costante su tutto il fotogramma, si ottiene:

$$[3] \quad \delta h = \frac{h^2}{bf^2} \left[(x_1^2 - x_2^2) \varphi_1 - x_2^2 \gamma + p y \omega_1 - x_2 y \delta\omega - \frac{p x_2}{b} b_z \right]$$

Questa formula esprime l'errore in quota dovuto a tutti gli elementi di orientamento.

Ora, negli stereografometri, la determinazione delle quote viene eseguita calcolando con la formula $h = \frac{bf}{p}$ il dislivello tra la camera di presa e un punto noto (la base b è nota dalla triangolazione radiale) e aggiungendolo alla quota H di tale punto per determinare la quota assoluta Hv di volo. Per tutti i punti incogniti si calcola prima h e quindi $H = Hv - h$.

Per un punto qualunque A vale allora una relazione dedotta ovviamente dalla [3], del tipo:

$$[4] \quad Hv = Hv_a + \frac{h^2}{bf^2} (m_a \varphi_1 + n_a \omega_1),$$

essendo Hv_a la quota di volo dedotta nel modo ora detto, ma corretta degli errori dovuti a γ , $\delta\omega$ e b_z . Scrivendo tre relazioni relative ad altrettanti punti noti, si possono ricavare φ_1 , ω_1 , ed anche Hv .

È noto così l'orientamento esterno dei due primi fotogrammi. Per i successivi è sufficiente determinare i tre elementi di orientamento relativo, perchè quelli di orientamento assoluto sono noti dal concatenamento precedente.

Degli elementi calcolati ci possiamo servire in due modi: o per rad-drizzare i fotogrammi e restituirli quindi come veramente nadirali, oppure per correggere le quote dei punti restituiti in base alla [3].

In quest'ultimo caso, i punti devono tuttavia essere divisi in due gruppi: quelli che servono per il concatenamento altimetrico dei fotogrammi e i punti di dettaglio. I primi coincidono con i punti principali dei fotogrammi ed eventualmente, quando si desidera avere una maggiore approssimazione e un controllo dei calcoli precedenti, anche con i punti ausiliari della triangolazione radiale. Per i due punti principali, la [3] si riduce rispettivamente a:

$$\delta h = - \frac{h^2 x_1^2}{f^2 b} \tau_2 \quad ; \quad \delta h = \frac{f^2 x_1^2}{h^2 b} \tau_1 .$$

Per quanto riguarda la restituzione di dettaglio, è assai raro che si eseguisca un piano quotato, preferendosi quasi sempre tracciare le curve di livello, le quali risultano errate a causa del difettoso orientamento dei fotogrammi. Il mezzo più semplice per correggerle è quello di calcolare le quote giuste di alcuni punti e gli errori ad essi relativi e poi spostare le curve di livello con semplici interpolazioni. Probabilmente sono sufficienti a questo scopo i punti radiali che, insieme a quelli principali, costituiscono un gruppo di nove punti, i quali inquadrano ogni fotogramma, mentre per ogni stereogramma si hanno sei punti a disposizione. Ma notiamo che per determinare le correzioni in quota allo scopo di spostare le curve di livello non è necessario restituire dei punti, ma solo calcolare le correzioni per determinati valori delle coordinate. Ciò, bene inteso, quando non si restituiscano altimetricamente i punti ausiliari o non si giudichino sufficienti.

Opportuni accorgimenti possono servire a semplificare alquanto i calcoli.

— — — — —

Chimica (Chimica biologica). — *Cristallizzazione della catalasi del fegato* ⁽¹⁾. Nota di EUSEBIO TRIA, presentata dal da SABATO VISCO, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

INTRODUZIONE.

Il potere di decomporre H_2O_2 è posseduto da tutti gli organi e tessuti, ma in maniera più accentuata dal fegato. Il coniglio è l'unico animale che fa eccezione, in quantochè in esso il fegato contiene meno catalasi che il sangue e i reni. L'enorme attività catalasica del fegato è decomposta già da lungo tempo. Già fin dal 1905 BATTELLI e STERN ⁽²⁾ hanno potuto osservare che g. 0.1 di fegato di cavia libera da una soluzione 1 cc. di H_2O_2 a 37° C. 5.800 cc. di ossigeno, mentre g. 0.1 di sangue 490 cc. e g. 0.1 di muscolo soltanto 34 cc.

Ed è perciò che la maggior parte dei ricercatori per la purificazione della catalasi sono partiti dal fegato.

I preparati più attivi sono stati ottenuti dal fegato di cavallo, mentre con fegato di bue si sono ottenuti finora preparati leggermente meno attivi, ma più puri.

Il primo metodo per la purificazione della catalasi nel fegato è quello di BATTELLI e STERN (loc. cit.), modificato da WIELAND ⁽³⁾.

Esso consiste in un'estrazione con acqua seguita da precipitazione con alcool. Si ottiene in tal modo, dopo essiccamento, una polvere brunastra che in dose di 1 gr. scinde in 10' 3-4 Kg. di H_2O_2 pura.

Più tardi WAENTIG e STECHE ⁽⁴⁾ estraggono dal fegato triturato con polvere di vetro la catalasi con acqua di cloroformio e la precipitano con un eccesso di alcool.

Nel 1924 MORGULIS ⁽⁵⁾ adopera per la prima volta come precipitante della catalasi acetone diluito.

Un grande progresso per la purificazione della catalasi è stato compiuto con l'introduzione del metodo di WILLSTÄTTER dell'adsorbimento

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia generale della R. Università di Roma.

⁽²⁾ Nell'Adunanza del 16 dicembre 1939-XVIII.

⁽³⁾ BATTELLI e STERN, « Soc. Biol. », 1905, 57, 375.

⁽⁴⁾ WIELAND, « Ann. Chem. » (Liebig), 1925, 445, 181.

⁽⁵⁾ WAENTIG e STECHE, « Zs. phys. chem. », 1914, 93, 228.

⁽⁶⁾ MORGULIS, « Erg. Phys. » 1924, 23, 308.

e successiva eluzione. I metodi di HENNICH, von EULER, ZEILE ed HELLSTRÖM e di AGNER introdotti successivamente si basano tutti su questo metodo generale.

VON EULER⁽¹⁾ modificando leggermente il metodo di HENNICH⁽²⁾ ottiene dei preparati molto attivi per mezzo di precipitazione frazionata di estratti acquosi di fegato con alcool, adsorbimento con $\text{Al}(\text{OH})_3$, eluzione con NH_3 0,02 N e successiva dialisi.

Il metodo di ZEILE e HELLSTRÖM⁽³⁾ consiste nell'estrarre con acqua la catalasi dal fegato tritato. Si aggiungono a 100 cc. di estratto 50 cc. di alcool, si centrifuga, si aggiunge ancora alcool ed infine cloroformio per precipitare l'emoglobina. Infine l'enzima si adsorbe dall'estratto con fosfato tricalcico e si eluisce dall'adsorbato con una soluzione 1 % di Na_2HPO_4 . Si dializza infine a bassa temperatura.

Il metodo di AGNER⁽⁴⁾ è una lieve modificazione del metodo precedente. AGNER sarebbe riuscito a ottenere dal fegato di cavallo un preparato che pur contenendo dal 15 al 20 % di impurità come dimostra lo studio all'ultracentrifuga, avrebbe una K. F. = 55.000-60.000. Se questo risultato è esatto, il che sembra dubbio, tale preparato sarebbe ancora più attivo della catalasi ripetutamente cristallizzata.

STERN e WYCKOFF⁽⁵⁾ preparano una catalasi molto attiva (K. F. = 33.448) con un principio completamente diverso e cioè per mezzo della sedimentazione nell'ultracentrifuga. Essi però non riescono a cristallizzare il loro preparato che pure era in condizioni di relativa purezza.

Infine nel 1937 SUMNER e DOUNCE⁽⁶⁾ preparano la catalasi dal fegato di bua con un metodo che consiste nella estrazione e precipitazione frazionata con soluzione di diossano, seguita da cristallizzazione con piccole quantità di solfato di ammonio (K. F. = 25.000-35.000). In secondo tempo catalasi cristallizzata viene anche preparata dal fegato di cavallo e di agnello.

Gli enzimi che oltre la catalasi sono stati preparati finora allo stato cristallino e quindi al più alto grado di purificazione finora possibile sono soltanto pochi. Per la massima parte sono enzimi idrolitici.

Il fermento respiratorio di WARBURG cristallizzato da THEORELL⁽⁷⁾ e la catalasi sono gli unici due enzimi ossidativi sinora preparati allo stato cristallino.

(1) VON EULER e JOSEPHON, « Lieb. Ann. », 1927, 452, 158.

(2) HENNICH, « Biochem. Zs. », 1924, 145, 286.

(3) ZEILE e HELLSTRÖM, « Zs. phys. Chem. », 1930, 192, 171.

(4) AGNER, « Biochem. J. », 1938, 32, 1702.

(5) STERN e WYCKOFF, « J. Biol. Chem. », 1938, 124, 573.

(6) SUMNER e DOUNCE, « J. Biol. Chem. », 1937, 121, 417; 1939, 127, 439.

(7) THEORELL, « Biochem. Z. », 1934, 272, 155; 1935, 278, 263.

Per quanto un metodo generale di cristallizzazione attualmente non esista, tuttavia può dirsi che condizione essenziale perchè la cristallizzazione sia possibile è che si possa disporre di grande quantità di materiale in modo da avere soluzioni concentrate, e inoltre che l'enzima conservi la sua attività per lungo tempo ad onta del trattamento a cui esso è sottoposto.

A questo duplice requisito risponde molto bene la catalasi. Il materiale di partenza (fegato di cavallo o di bue) può essere adoperato in quantità molto grande e la sua attività catalasica è notevolissima. Inoltre tale attività non cambia notevolmente col tempo e può essere rapidamente determinata.

Il metodo di SUMNER e DOUNCE a cui già si è accennato consiste fondamentalmente in una estrazione e precipitazione frazionata con soluzione di diossano. Per quel che si è detto, occorre per una preparazione di cristalli partire da almeno 3 chilogrammi di fegato ed usare per la cristallizzazione circa 3 litri di diossano puro, che per le sue proprietà (punto di ebollizione, punto di congelamento) molto simili all'acqua non può essere facilmente recuperato. Sicchè una preparazione di una quantità di cristalli sufficiente per uno studio delle proprietà e della natura chimica della catalasi, è possibile soltanto se si ha il mezzo di disporre di grandi quantità di diossano a prezzo non eccessivamente elevato, cosa che attualmente non è facile. Inoltre in alcuni casi, come io stesso ho potuto osservare nel sangue ⁽¹⁾, l'aggiunta di diossano determina una inattivazione della catalasi e quindi tale metodo di cristallizzazione non è adoperabile in ogni caso.

È perciò utile indagare se la cristallizzazione della catalasi è possibile con un procedimento completamente diverso. A questo studio sono stato indotto dall'esame dei metodi seguiti finora per la purificazione della catalasi e a cui ho brevemente accennato e dal comportamento di questo enzima sotto l'azione di diversi agenti precipitanti. Dopo numerosi tentativi i miei sforzi sono stati coronati da un esito fortunato.

PARTE SPERIMENTALE.

a) *Cristallizzazione della catalasi.*

Tre chilogrammi di fegato di bue sono tritati due volte per mezzo di un ordinario tritacarne. Si aggiunge un volume di acqua distillata, si agita e si lascia stare tre ore in ghiacciaia. Si filtra attraverso un panno, al residuo si aggiunge un volume di acqua distillata e si filtra ancora. Si mescolano i due filtrati torbidi e si centrifuga. La centrifugazione deve essere fatta in modo da evitare un eccessivo riscaldamento dei tubi; meglio sa-

(¹) TRIA, in corso di pubblicazione.

rebbe eseguirla in ghiacciaia e ciò perchè col calore la catalasi viene denaturata.

Si ottengono in tal modo da 5 a 6 litri di estratto. Si aggiunge la metà del volume di soluzione satura di solfato di ammonio. Dopo tre ore in ghiacciaia si filtra, e il precipitato che presenta soltanto una debole attività catalasica viene eliminato. Si aggiunge al filtrato un volume eguale di soluzione satura di solfato d'ammonio, e dopo una notte in ghiacciaia si filtra attraverso filtri piegheggiati e il precipitato di colore verdastro viene disciolto in quanta meno acqua è possibile. Solo una parte del precipitato si scioglie, il resto costituito da proteine denaturate viene separato per filtrazione. Quest'ultima filtrazione va eseguita, a differenza delle prime, a temperatura ambiente, giacchè se si filtra in ghiacciaia la catalasi cristallizza sotto forma di piccolissimi aghi insolubili.

Per concentrare e purificare ulteriormente la soluzione di catalasi si precipita l'enzima con un volume eguale di soluzione satura di solfato d'ammonio; il filtrato, debolmente roseo, viene eliminato e il precipitato si discioglie in poca acqua con l'aggiunta di una piccola quantità di soluzione tampone di fosfati a pH 7,4. Si ottiene così una soluzione di catalasi estremamente attiva. A questo punto è possibile seguire due vie diverse: procedere alla cristallizzazione dell'enzima con ulteriore aggiunta di solfato di ammonio o precipitare la catalasi con diossano allo scopo di averla in uno stato di maggiore purezza.

Nel primo caso si aggiungono al filtrato limpido a poco alla volta piccole quantità di soluzione satura di solfato di ammonio fino ad osservare un'evidente tixotropia della soluzione. Si lascia in ghiacciaia e si continua dopo qualche ora ad aggiungere goccia a goccia solfato di ammonio. Si ottiene con questo metodo una notevole quantità di cristalli che possono essere separati per mezzo della centrifugazione.

Se si vuole, prima di procedere alla cristallizzazione, precipitare l'enzima in uno stato di maggiore purezza si procede nella seguente maniera.

Si dializza la soluzione di catalasi contro acqua distillata per tre ore allo scopo di allontanare l'eccesso di solfato di ammonio. Si aggiunge diossano fino a una concentrazione del 40 %. Si raccoglie il precipitato e lo si discioglie in poca acqua in modo da avere una soluzione alla massima concentrazione possibile. Si procede poi alla cristallizzazione come sopra si è detto aggiungendo goccia a goccia una soluzione satura di solfato di ammonio.

La catalasi cristallizzata così ottenuta, viene sciolta in acqua con l'aggiunta di piccole quantità di una soluzione tampone di fosfati 9,6 % a pH 7,4, e ricristallizzata aggiungendo piccole quantità di una soluzione satura di KH_2PO_4 e di $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$. Il numero di cc. della soluzione di fosfato monopotassico deve essere circa due volte il numero di cc. della soluzione di fosfati a pH 7,4 aggiunta precedentemente, e ciò allo scopo

di avvicinarsi al punto isoelettrico della catalasi che secondo STERN è pH 5,6. Il solfato di ammonio deve essere aggiunto goccia a goccia fino ad aversi una soluzione da 1/4 a 1/2 satura.

Grande attenzione deve essere fatta nella preparazione del puffer di fosfati, inquantochè la presenza anche di tracce di metalli pesanti può ostacolare la cristallizzazione della catalasi. Ho proceduto nella seguente maniera:

Si pesano gr. 28 di HK_2PO_4 secondo SORENSEN (in modo da aversi una soluzione 0,256 mol.), e 68 gr. di Na_2HPO_4 (soluzione 0,478 mol.) in un becker da due litri. Si aggiungono da 500 a 700 cc. di H_2O bidistillata e si fa bollire. Si fa gorgogliare H_2S per parecchie ore fino a saturazione della soluzione. Si filtra, si raffredda, e, dopo aver eliminato l' H_2S , si porta a un litro. La soluzione tampone così preparata è a pH 7. Per ottenere la soluzione a pH 7,4, indispensabile per sciogliere i cristalli, si aggiungono a 300 cc. della soluzione precedente 2 cc. di soluzione satura di idrossido di sodio puro.

b) *Proprietà dei cristalli.*

I cristalli così ottenuti si presentano sotto forma di aghi, birifrangenti. Quelli ottenuti dopo precipitazione con diossano sono invece prismatici. Sono poco solubili in acqua, ma solubilissimi in presenza di tracce di fosfati a pH 7,4 e la soluzione che così si ottiene si presenta nera, o verde più o meno scura a seconda della sua concentrazione.

La forma cristallina non varia anche dopo quattro cristallizzazioni consecutive, e allo stesso modo come per la catalasi di SUMNER è possibile per mezzo di aggiunta di acetone e acido cloridrico separare dalla catalasi il gruppo prostetico.

Per essere ulteriormente sicuro che la catalasi cristallizzata col mio procedimento è una sostanza pura ho voluto vedere se l'attività dei cristalli si modifica con le cristallizzazioni consecutive.

Ho perciò determinato l'attività catalasica col metodo di VON EULER, usando gli accorgimenti descritti in una mia Nota in corso di pubblicazione.

Per la determinazione del peso secco del preparato enzimatico ho prelevato 1 cc. di soluzione di catalasi dializzata dopo 1-2-3 e 4 cristallizzazioni in un crogiuolo di platino tarato. La soluzione veniva evaporata a secchezza in una stufa a 95° C, e dopo raffreddamento per 1 h. in un essiccatore ad H_2SO_4 si procedeva alla pesata. In seguito il crogiuolo era di nuovo riscaldato in stufa, raffreddato e pesato, e questo processo si ripeteva fino a peso costante.

Per la determinazione della K. F. (Katalasefähigkeit) mi sono servito della nota formula:

$$K. F. = \frac{K}{\text{gr. di preparato enzimatico aggiunti a 50 cc. di } \text{H}_2\text{O}_2 \text{ 0,01 } n}$$

I valori di K. F. da me trovati dopo 4 cristallizzazioni sono i seguenti:

1 ^a cristallizzazione	K. F. = 33.200
2 ^a »	K. F. = 33.500
3 ^a »	K. F. = 34.000
4 ^a »	K. F. = 33.400

Come si vede l'attività non varia con le cristallizzazioni successive, il che fa pensare che i cristalli da me ottenuti sono allo stato puro fin dalla prima cristallizzazione.

CONCLUSIONI.

Si è trovato un metodo per la preparazione della catalasi cristallizzata dal fegato e si sono studiate alcune delle proprietà dei cristalli e la loro attività.

Chimica (Chimica biologica). — *Studi sulla catalasi del sangue*. I. — *Preparazione dell'enzima* ⁽¹⁾ Nota di EUSEBIO TRIA, presentata ⁽²⁾ da SABATO VISCO, aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Sull'attività catalasica del sangue sono state eseguite numerose ricerche nella speranza, che finora è rimasta delusa, che questo dato potesse avere valore per la diagnosi di alcune affezioni organiche (VON EULER ⁽³⁾).

La catalasi si trova principalmente negli eritrociti, per quanto essa sia presente anche nei leucociti. Anzi, secondo IGLAUER ⁽⁴⁾, nell'uomo i leucociti sono molto più ricchi di catalasi che non gli eritrociti, cosa che non è confermata da FUJITA ⁽⁵⁾. Secondo STERN ⁽⁶⁾ è possibile ottenere dai leucociti e dagli eritrociti di sangue umano dei preparati che hanno una attività dello stesso ordine di grandezza.

Negli eritrociti poi l'attività catalasica, è, secondo SCHMIDT ⁽⁷⁾, legata allo stroma. Più recentemente si è visto che anche l'emoglobina (HAUBOWITZ ⁽⁸⁾) e altri complessi eminei (STERN ⁽⁹⁾) sono dotati di attività catalasica. KULTJUGIN ⁽¹⁰⁾ sostiene però che l'emoglobina può diventare con la cristallizzazione completamente inattiva.

I valori dell'attività catalasica del sangue determinati nelle adatte condizioni sperimentali hanno dimostrato che tale attività varia enormemente da animale a animale e anche nello stesso animale. Più costante è invece il così detto indice di catalasi, cioè l'attività catalasica del singolo corpuscolo rosso.

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia generale della R. Università di Roma.

⁽²⁾ Nell'Adunanza del 16 dicembre 1939-XVIII.

⁽³⁾ VON EULER, « *Chemie der Enzyme* », II Teil, 3 Absch., S. 66.

⁽⁴⁾ IGLAUER, « *Biochem. Zs.* », 1930, 223, 470.

⁽⁵⁾ FUJITA e KODAMA, « *Biochem. Zs.* », 1931, 232, 20.

⁽⁶⁾ STERN, « *Zs. f. physiol. Chemie* », 1932, 204, 259.

⁽⁷⁾ SCHMIDT, « *Pflüger's Archiv.* », 1872, 6, 413.

⁽⁸⁾ HAUBOWITZ, citato da von EULER.

⁽⁹⁾ STERN, citato da von EULER.

⁽¹⁰⁾ KULTJUGIN, « *Biochem. Zs.* », 1926, 167, 238.

Per quanto riguarda la preparazione di soluzioni concentrate di catalasi dal sangue esistono diversi metodi. Il più antico è quello di SENTER ⁽¹⁾ che consiste nel mescolare un egual volume di sangue laccato e filtrato con alcool al 99 % e centrifugare. Si lava poi il precipitato con alcool diluito, si essicca su H_2SO_4 , si estrae a freddo con H_2O per due o tre giorni e si ottiene un filtrato che non contiene emoglobina. Il rendimento è del 30-40 % della catalasi presente nel sangue.

EWALD ⁽¹⁾ emolizza il sangue con etere, precipita con alcool a 99% polverizza il precipitato ed estrae con acqua.

WOLFF e STOECKLIN ⁽²⁾ centrifugano e lavano i corpuscoli, agitano con etere, trattano il filtrato con alcool a $-10^\circ C$, in modo da separare l'emoglobina per cristallizzazione dalla catalasi che rimane in soluzione.

MADINAVEITIA ⁽³⁾ allontana la maggior parte di emoglobina con etere ed acido solforico, adsorbe la catalasi con diversi adsorbenti, ma non riesce ad eluirla.

Infine TSUCHIHASCHI ⁽⁴⁾ precipita l'emoglobina con cloroformio, adsorbe la catalasi con $Ca_3(PO_4)_2$ ed eluisce con Na_2HPO_4 .

Come si vede, i metodi usati finora per la purificazione della catalasi del sangue si basano tutti su uno dei seguenti principi:

1° Precipitazione dell'emoglobina e della catalasi ed estrazione della catalasi dal precipitato (SENER e EWALD).

2° Precipitazione dell'emoglobina lasciando la catalasi in soluzione (WOLFF e STOECKLIN).

3° Adsorbimento della catalasi e successiva eluzione di essa (MADINAVEITIA e TSUCHIHASCHI).

I metodi basati sui primi due principi hanno l'inconveniente che la catalasi viene adsorbita dal precipitato di emoglobina da cui è impossibile separarla completamente. Quelli basati sul metodo dell'adsorbimento hanno l'inconveniente che le sostanze finora usate o non hanno un'azione adsorbente specifica per la catalasi (come nel caso del fosfato tricalcico adoperato da TSUCHIHASCHI, che adsorbe anche l'emoglobina), oppure, se tale azione hanno, formano adsorbati, da cui la catalasi non può essere separata per eluzione (come nel caso del talco, caolino, carbone animale ecc. adoperati da MADINAVEITIA).

Con questi metodi non si è riusciti finora a preparare dal sangue la catalasi allo stato cristallizzato, e neanche ad ottenere delle soluzioni enzimatiche di notevole attività. La cristallizzazione della catalasi è

(1) SENTER, « *Zs. f. physik. Chemie* », 1903, 44, 257 e 1905, 51, 673.

(1) EWALD, « *Pflüger's Arch.* », 1906, 116, 334.

(2) WOLFF e STÖCKLIN, « *C. R.* », 1911, 152, 729.

(3) MADINAVEITIA, « *Diss. Zürich* », 1912 (citato da TSUCHIHASHI).

(4) TSUCHIHASHI, « *Biochem. Zs.* », 1923, 140, 63.

possibile invece partendo dal fegato di bue e di cavallo con due procedimenti diversi. Il primo, introdotto da SUMNER e DOUNCE ⁽¹⁾ consiste nell'estrazione della catalasi con una soluzione diluita di diossano (dietilendiossido), seguita da precipitazione della catalasi stessa con altro diossano; il secondo, introdotto recentemente da me ⁽²⁾ consiste essenzialmente nell'estrazione della catalasi con acqua e sua precipitazione con solfato di ammonio.

La differenza di comportamento tra la catalasi ematica e quella del fegato potrebbe essere spiegata ammettendo una differenza di costituzione tra le due catalasi, come è stato già sostenuto da SENTER (loc. cit.). Ricerche più recenti tendono però a dimostrare che tali differenze non esistono.

Sembra perciò logico pensare che i metodi che si sono dimostrati adatti per la preparazione della catalasi cristallizzata partendo dal fegato, possano essere adoperati anche per il sangue con successo.

Ho cominciato col provare se il metodo di SUMNER e DOUNCE ⁽³⁾ può essere applicabile al sangue. Dopo alcuni esperimenti ho dovuto abbandonarlo, perchè una soluzione al 35 % di diossano aggiunta a corpuscoli rossi emolizzati, determina una parziale inattivazione della catalasi. Il metodo delle precipitazioni successive con solfato di ammonio, mi ha dato risultati più felici. Per quanto è a mia conoscenza, nessuno all'infuori di me ha usato il solfato di ammonio per la purificazione della catalasi nel sangue. Con questo metodo si riesce ad ottenere una precipitazione completa dell'enzima. Il filtrato del sangue trattato con solfato d'ammonio a semi saturazione non ha più che un'attività catalasica estremamente bassa, e la catalasi precipitata può essere facilmente, dopo una breve dialisi, portata in soluzione. Pur non essendo riuscito, per ragioni che esporrò in seguito a cristallizzare la catalasi, mi è stato però possibile ottenere dal sangue un preparato enzimatico molto più attivo di quello che non sia riuscito ai precedenti ricercatori. Ed è perciò che credo utile di esporre brevemente il metodo da me seguito.

Determinazione dell'attività catalasica. — Ho usato il metodo di VON EULER e JOSEPHSON ⁽⁴⁾ con gli accorgimenti suggeritimi dal prof. SUMNER e da lui usati nelle sue fondamentali ricerche sulla catalasi.

Si versano 50 cc. di H_2O_2 0,01 n. in puffer di fosfati a pH 6,8 in una beuta da 150 cc., tenuta a 0°C in un termostato ad acqua e ghiaccio. Si aggiunge 1 cc. di soluzione di catalasi di diluizione appropriata, si mescola

⁽¹⁾ SUMNER DOUNCE loc. cit.

⁽²⁾ VON EULER e JOSEPHSON, « Ann. Chem. », 1927, 452, 158.

⁽³⁾ SUMNER e DOUNCE, « Journ. of Biol. Chem. », 1937, 121, 417; 1939, 127, 439.

⁽⁴⁾ TRIA, in corso di pubblicazione.

e quanto più rapidamente è possibile si preleva un campione di 5 cc. che si versa in una beuta contenente 10 cc. di H_2SO_4 n. Si mescola e si titola con permanganato 0,005 n. Dopo 3' si preleva un secondo campione e si titola come sopra. Lo stesso si fa dopo 6'. Con questi dati si calcola la velocità di reazione K per mezzo della formula:

$$K = \frac{1}{T} \log \frac{A}{A-x}$$

in cui T è il tempo di digestione espresso in minuti, A il numero di cc. di permanganato 0,005 n. usati al tempo 0, e x il numero di cc. di permanganato consumati dopo T minuti.

I valori trovati per K devono essere compresi tra 0,02 e 0,05. Se sono molto più grandi o più piccoli sarà necessario adoperare una soluzione più o meno diluita di enzima.

Per calcolare l'attività del preparato enzimatico ($K. F. = \text{Katalasefähigkeit}$) si usa l'equazione:

$$K. F. = \frac{K}{\text{gr. di preparato enzimatico aggiunti a 50 cc. di } \text{H}_2\text{O}_2 \text{ 0,01 } n}$$

Purificazione della catalasi del sangue. — Quattro litri di sangue di bue vengono defibrinati. Si centrifugano i corpuscoli che si lavano tre volte con soluzione fisiologica di NaCl , e si emolizzano con egual volume di acqua distillata. Si centrifuga ancora per allontanare la massima parte degli stromi, e si decanta.

Al liquido decantato si aggiunge un egual volume di soluzione satura di solfato di ammonio e si filtra. Si elimina il filtrato che contiene la massima parte dell'emoglobina e si scioglie il precipitato in H_2O . Si filtra ancora per allontanare le tracce di precipitato rimaste eventualmente indissolte e al filtrato si aggiunge ancora un volume eguale di soluzione satura di solfato di ammonio. Il precipitato viene disciolto in H_2O e trattato una terza volta con un egual volume di soluzione satura di solfato di ammonio. A questo punto il filtrato è assolutamente inattivo, e la catalasi è tutta contenuta nel precipitato che, dopo una breve dialisi contro acqua corrente per allontanare l'eccesso di solfato di ammonio, è perfettamente solubile in acqua. Dopo una quarta precipitazione con solfato di ammonio, il precipitato sciolto in acqua e dializzato, dà una soluzione giallo oscura fortemente attiva. In queste successive operazioni la quantità di precipitato è andata sempre notevolmente diminuendo, fino a che alla quarta precipitazione si ottengono circa g. 4 di sostanza umida che sono disciolti in poca acqua, dializzati e portati a 20 cc. con H_2O . L'attività catalasica di questa soluzione è:

$$K. F. = 786.$$

A questo punto si aggiunge alla soluzione acetone fino ad una concentrazione del 40 %. La catalasi, che per la massima parte precipita, viene separata per filtrazione e disciolta in cc. 5 di H_2O . Si ha una soluzione la cui attività è:

$$K. F. = 2.280.$$

Un tentativo fatto di precipitare la catalasi con diossano anziché con acetone ha dato un risultato negativo, in quantochè il precipitato che in questo modo si ottiene è quasi completamente inattivo.

Se si considera che l'attività dei corpuscoli emolizzati era: $K.F. = 15$, risulta che col mio procedimento si è ottenuta una concentrazione dell'enzima di oltre 150 volte.

Date le scarse quantità di precipitato ottenuto si sono dovuti sospendere i tentativi di ulteriore purificazione.

Considerazioni e conclusioni. — Nella seguente tabella sono riportati alcuni valori di attività catalasica in espressi $K. F.$

platino colloidale	$K.F. =$	35,6
catalasi del sangue (SEETER)	» » =	45,6
catalasi del sangue (MADINAVEITIA)	» » =	699,4
catalasi cristallizzata del fegato (SUMNER)	» » =	25.000–35.000
catalasi cristallizzata del fegato (TRIA).	» » =	33.400
catalasi del sangue (TRIA)	» » =	2.280

da essa risulta che col mio procedimento si riesce ad ottenere dal sangue un preparato enzimatico di gran lunga più attivo di quelli ottenuti dai precedenti ricercatori. Si è però ancora ben lontani dai valori di attività della catalasi cristallizzata.

Ciò dimostra che i preparati di catalasi del sangue sono ancora notevolmente impuri. Ogni tentativo di purificazione ulteriore urta contro grandi difficoltà dipendenti principalmente dal bassissimo contenuto in catalasi del sangue.

Da queste mie ricerche risulta altresì che il comportamento della catalasi verso alcuni agenti precipitanti come il solfato di ammonio è perfettamente lo stesso nel fegato e nel sangue.

Mineralogia. — *I minerali degli inclusi autigeni nel basalto di Conca de Janas (Orosei).* — II. *I pirosseni* ⁽¹⁾. Nota di CARLO LAURO presentata ⁽²⁾ da S. E. FEDERICO MILOSEVICH.

Nella Nota I ⁽³⁾ ho riferito sull'olivina e sulla picotite. Riporto ora i risultati dello studio di altri due minerali esclusivi dei noduli peridotitico-pirossenici nei basalti di Orosei e Dorgali ⁽⁴⁾. Ho potuto infatti isolare quantitativi sufficienti per le ricerche anche di un pirosseno monoclino e di uno dei due termini pirossenici rombici presenti.

Il pirosseno monoclino, di solito in granuli irregolari, ma non raro anche con abito prismatico tozzo un poco allungato, ha colore verdolino in massa mentre appare quasi incolore in sezione sottile.

Oltre alla sfaldatura caratteristica secondo {110}, mostra spesso anche due tipi di sfaldatura pinacoidale secondo {010} ed {100}; quest'ultima è certo assai più facile della precedente e forse anche di quella prismatica.

Presenta talvolta delle minutissime inclusioni granulari opache od in lamelle microlitiche trasparenti bruno rossastre, da riferirsi probabilmente ad ossidi di ferro ed ilmenite. Non sempre poi è perfettamente fresco, come indica un incipiente intorbidamento che rende il minerale sensibilmente opaco in massa e con superficie esterna, per così dire, ad aspetto terroso.

I risultati dell'analisi chimica su materiale scelto accuratamente al microscopio binoculare ed essiccato a 110° sono:

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia e Petrografia della R. Università di Roma.

⁽²⁾ Nell'Adunanza del 16 dicembre 1939-XVIII.

⁽³⁾ C. LAURO, *I minerali degli inclusi autigeni nel basalto di Conca de Janas (Orosei)*. I. « Rendiconti della R. Accademia d'Italia ». Classe di Scienze fisiche matematiche e naturali. Serie VII, vol. I, 1939 pag. 186.

⁽⁴⁾ C. LAURO, *Studio geologico petrografico delle rocce vulcaniche post-mioceniche della Sardegna*. Nota III. « Periodico di Mineralogia », 1939-X, pag. 33.

R. A. metalli in base 6 0.

SiO ₂	52,37	1,874	{ 0,126 0,132 }	2,000
Al ₂ O ₃	6,11	0,258		
TiO ₂	0,29	0,007	{	1,975
Cr ₂ O ₃	0,05	0,001		
Fe ₂ O ₃	1,44	0,039		
FeO	2,01	0,060		
MnO	0,10	0,003		
MgO	16,72	1,058		
CaO	20,88	0,675		
H ₂ O +	0,09			
	100,06			

e per essi si calcola una percentuale di presenza del composto alluminifero nel rapporto 1:6 mentre fra i termini MgCa Si₂O₆ ed Fe Ca Si₂O₆ il rapporto si è di 13:1.

Ritengo per altro il leggero tenore di cromo da imputarsi probabilmente alla presenza di qualche minuto granulo di picotite, non rilevato durante la scelta del materiale per l'analisi.

Il peso specifico determinato a mezzo dei liquidi pesanti è risultato: p. sp. 3,323.

Ho misurato direttamente al tavolino universale il valore dell'angolo degli assi ottici ed ho ottenuto, come media di parecchie misure e per la luce gialla del sodio, $2V = 58^{\circ}50'$; per l'angolo di estinzione ho avuto il valore medio $\gamma : c = 39^{\circ}10'$, con scarti fra 38° e 42° ; $\alpha = 1,669$ $\beta = 1,674$, $\gamma = 1,695$: segno della birifrazione positivo e pleocroismo appena sensibile secondo lo schema:

α = verdino chiarissimo

β = giallo verdolino chiaro

γ = verdino chiarissimo.

Tutti questi caratteri confermano la diagnosi già fatta a suo tempo nel lavoro già citato e portano dunque a ritenere questo pirosseno monoclinico un *diallagio*, sia pure a composizione chimica non molto lontana dal diopside.

Il pirosseno rombico, che ho potuto studiare in modo completo, si presenta preferibilmente con abito prismatico tozzo, ancora ben conservato o per lo meno chiaramente intuibile. Ha colore giallo marrone in massa sino ad essere quasi incolore in sezione sottile.

Sfaldatura molto facile secondo {110} ed anche in misura non molto minore secondo {100}.

Nella scelta del materiale per l'analisi, causa l'esigua quantità a mia disposizione, non ho potuto eliminare del tutto lo spinello cromifero che con il pirosseno è intimamente associato. Pertanto dal risultato A occorre togliere la quantità di Al_2O_3 , Fe_2O_3 , FeO ed MgO , corrispondenti alla percentuale di Cr_2O_3 presente, secondo i risultati riportati nella Nota I ottenendo così i valori riportati sotto la lettera B

	A	B	
SiO_2	53,79	53,79	0,8965
TiO_2	tr.	—	—
Al_2O_3	2,19	1,77	0,0174
Cr_2O_3	0,26	—	—
Fe_2O_3	2,50	2,32	0,0145
FeO	5,99	5,87	0,0815
MgO	33,20	32,99	0,8247
CaO	2,08	2,08	0,0371
H_2O^+	0,20	0,20	
	100,21		

} 0,9433

Da questi valori si ottiene un rapporto fra R O e Si O_2 non molto diverso dall'unità ($\text{R O}:\text{Si O}_2 = 1:0,95$), e per quanto ciò si verifichi molto frequentemente in complesso per altro questi risultati non riescono del tutto soddisfacenti.

Ciò è forse da imputarsi ad eventuali tracce di impurezze del tipo di quelle rilevate recentemente dal Carrobbi ⁽¹⁾. Questi ha infatti mostrato come queste impurezze debbano essere ritenute presenti molto spesso ed ha rimarcato come esse siano assolutamente inseparabili, sia meccanicamente che chimicamente, dal pirosseno che le include, e come riescano anche difficilmente rilevabili al microscopio. Comunque da questi risultati si calcola per la presenza della molecola iperstenica Fe SiO_3 un valore di circa il 10 %.

Per il peso specifico ho ottenuto: $p. sp. = 3,299$. Il valore dell'angolo degli assi ottici risulta come media di diverse determinazioni $2 V = 83^\circ$; segno della birifrazione positivo; $\alpha = 1,663$, $\beta = 1,669$, $\gamma = 1,673$; pleocroismo avvertibile solo in lamine non troppo sottili secondo lo schema:

α = giallo brunastro chiaro

β = giallo marrone chiaro

γ = giallo verdolino chiaro.

⁽¹⁾ G. CARROBBI, *Considerazioni sulla costituzione dei pirosseni contenenti elementi trivalenti*. «Atti e Memorie della R. Accademia di Scienze, lettere ed arti di Modena», 1937, serie V, II, pag. 176.

Per tutti questi caratteri il pirosseno può essere definito come una vera *bronzite*, se si segue il criterio di indicare con tale nominativo i termini contenenti dal 5 al 15 % del composto FeSiO_3 e non una *enstatite bronzitica*, come lo avevo definito a suo tempo nel mio lavoro, più volte citato, sui basalti di Orosei e Dorgali.

Per altro una vera *enstatite*, prima non rilevata, è pure presente in questi noduli. La sua presenza è però così scarsa che non ho potuto isolare il quantitativo sufficiente per studiarla in modo completo.

Sempre in granuli irregolari, solo qualche volta in tavolette un poco tozze probabilmente dovute alla sfaldatura, è assolutamente incolore limpida e trasparente anche in massa ed ha un peso specifico leggermente inferiore a quello della *bronzite*. Pure sensibilmente inferiori risultano i suoi indici di rifrazione; mentre il valore $2V$ dell'angolo degli assi ottici è di circa 69° – 71° ed il segno della birifrazione è positivo.

Tutti questi caratteri permettono di ritenerlo un termine ben distinto e differenziato rispetto a quello del pirosseno rombico prima illustrato.

Per quanto riguarda la loro genesi questi pirosseni ora descritti, come già l'olivina e lo spinello cromifero, minerali tutti rinvenuti soltanto negli inclusi, ripeterono evidentemente la loro origine in uno stadio della consolidazione magmatica che è certamente anteriore a quello in cui si formarono gli altri minerali, che sono invece tipici delle lave, che questi stessi moduli includono.

Ciò prova la stessa giacitura particolare in cui essi minerali si trovano, ed è confortato poi dalle conoscenze ormai acquisite o generalmente accettate a proposito delle modalità di consolidazione in seno al magma ed in particolare per quanto riguarda i sistemi $\text{FeO} - \text{MgO} - \text{SiO}_2$, $\text{FeO} - \text{CaO} - \text{SiO}_2$ e $\text{MgO} - \text{CaO} - \text{SiO}_2$.

Nella Nota I mi sono dilungato su questo argomento a proposito dell'olivina: considerazioni analoghe andrebbero qui fatte per i pirosseni ed è pertanto inutile ripeterle.

Circa l'origine poi dei noduli stessi, quanto ho detto sino ad ora comprova direttamente la loro qualifica di inclusi autigeni. Nella Nota precedente, a questo proposito, riferivo la loro genesi ad un processo di concentrazione verificatosi negli stadi iniziali di consolidazione del magma, con formazione di grosse masse, i resti delle quali, preservate definitivamente sino a noi dal sopraggiungere della fase vulcanica attiva, che ne impedì il completo riassorbimento, costituiscono appunto questi inclusi pirossenico-peridotitici.

Completando ora questo concetto, è da ritenersi, che a questa concentrazione in seno al magma dei minerali per primi formati, e che costituisce in ultima analisi una differenziazione per cristallizzazione, non vada del tutto disgiunta anche una eventuale azione della gravità stessa. Ciò potrebbe voler dimostrare il fatto che tutti i minerali di questi noduli,

eccezione fatta naturalmente per lo spinello cromifero, hanno un peso specifico non molto diverso.

L'azione di gravità si sarebbe esercitata nel senso di separare, o per lo meno facilitare la separazione, di questi minerali, da altri eventualmente formatisi contemporaneamente o quasi, ed aventi peso specifico molto inferiore, come ad esempio potrebbero essere i feldspati calcici sodici più basici. Questi immersi e, sospesi, per così dire, nel magma, sarebbero poi stati interamente riassorbiti: benchè se pure rari, si trovino in questo tipo di lave, fenocristalli di plagioclasti: quelli e cioè l'olivina degli inclusi, il diallaggio, la bronzite e l'enstatite assieme alla picotite, si sarebbero concentrati verso le parti periferiche del bacino magmatico stesso costituendo magari delle vere e proprie differenziazioni rocciose per lo meno potenziali.

Precipitando poi il processo effusivo e mutando rapidamente le condizioni ambiente, queste masse di concentrazione differenziata entro lo stesso magma, non poterono da questo essere interamente riassorbite; sino a che in un'ultima fase del parossismo vulcanico, gli ultimi residui di queste concentrazioni iniziali, furono arraffati e portati in superficie e poi inglobati in seno alla lava stessa a formare questi inclusi così caratteristici.

Che probabilmente infatti questi noduli siano venuti a giorno nell'ultima fase del periodo vulcanico, sembrerebbe dimostrato dal fatto che, almeno per quanto è possibile constatare normalmente sul terreno, di preferenza essi si trovano quasi alla superficie esterna delle colate e comunque sempre nei pressi degli apparati vulcanici o dei presunti tali.

Patologia. — *Anemia macrocitica ipercromica sperimentale e principio antianemico* ⁽¹⁾. Nota I di ALESSANDRO ROSSI e RUGGIERO CONTE-MAROTTA, presentata ⁽²⁾ da GAETANO QUAGLIARIELLO, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

In questa prima nota comunichiamo i risultati di ricerche eseguite allo scopo di studiare l'azione che il lievito (autolizzato), incubato *in vitro* con succo gastrico umano normale, esercita sull'anemia da saponina-collargolo.

Siamo stati indotti a queste ricerche dall'osservazione fatta da STRAUSS e CASTLE ⁽³⁾, che la comministrazione *per os* di lievito autolizzato e di succo gastrico umano produceva un miglioramento del quadro ematico e clinico di ammalati di anemia perniciosa.

Le nostre esperienze sono state condotte nel modo seguente: g. 30 circa di lievito di birra (essiccato a bassa temperatura per renderlo conservabile) vengono addizionati con cc. 100 di acqua e lasciati a circa 25° C. per 6 ore. Si filtra alla pompa, e cc. 40 del filtrato si mescolano con cc. 50 di succo gastrico umano normale, prelevato a digiuno dopo iniezione di istamina e filtrato per garza. Si porta a pH 5 circa con NaOH 0,1 N e si lascia a 37° C per 6 ore. Dopo tale periodo di tempo si riscalda a 65°-70° per 30' per inattivare l'emopoietina, si filtra e si tratta con alcool sino alla concentrazione del 70 %. Si forma un abbondante precipitato che si separa per filtrazione. Il filtrato concentrato nel vuoto a bassa temperatura sino a un volume di circa cc. 15, viene addizionato con alcool assoluto sino a raggiungere la concentrazione del 90 %. Si ha la formazione di un nuovo precipitato assai meno abbondante del precedente, che, raccolto per centrifugazione e lavato due volte con alcool a 90 %, si presenta come una sostanza di aspetto gommoso, di colorito gialletto. La sostanza, nello stesso tubo, si centrifuga, viene messa ad asciugare per 48-72 ore nel vuoto in un essiccatore ad acido solforico e poi sciolta in circa cc. 10 di acqua. La soluzione (*preparato A*) limpida e leggermente gialletta si conserva in ghiacciaia

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica biologica della R. Università di Napoli.

(2) Nell'Adunanza del 16 dicembre 1939-XVIII.

(3) STRAUSS e CASTLE, «Lancet», 1932, 223, 111.

sino al momento dell'uso. Noi l'abbiamo conservata sino a 10 giorni senza che comparisse la minima torbidità e senza osservare diminuzione dell'attività biologica.

L'attività del preparato è stata saggiata su conigli resi anemici mediante trattamento con iniezioni endovenose di collargolo e saponina (¹).

Per produrre l'anemia: a conigli (preferibilmente di colore grigio o nero e del peso di circa kg. 3) si iniettavano nella vena marginale dell'orecchio cc. 5 di una soluzione costituita da cc. 0,5 di saponina 0,5 % + 2,5 cc. di collargolo 0,06 % + 2 cc. di NaCl 0,9 %. Le iniezioni venivano praticate a giorni alterni, controllando continuamente il quadro ematico. Dopo 15-20 giorni insorgeva un'intensa anemia macrocitica ipercromica che persisteva per varie settimane dopo il trattamento.

Prove di controllo venivano eseguite con lievito trattato nel modo già descritto, ma senza aggiunta di succo gastrico (*preparato B*), e con un estratto epatico del commercio (*Pernaemon semplice*).

Nelle tabelle I, II, III e IV sono riportati i valori medi di alcune esperienze.

TABELLA I.

	Giornitrascorsi dall'inizio del- l'esperimento	Eritrociti in milioni per mmc.	Hb (metodo Sahli)	Valore globulare	Reticolociti % eritrociti
	—	5,5	95 %	0,8	0,9
Dopo 3 iniezioni di saponina + collargolo	6	4,8	91 %	0,9	1
Dopo 6 iniezioni di saponina + collargolo	12	3,65	80 %	1,1	1,4
Dopo 9 iniezioni di saponina + collargolo	18	2,55	66 %	1,2	1,1
Dopo 2 iniezioni di preparato A (1 cc.)	20	3,6	71 %	0,9	10
Dopo 4 iniezioni di preparato A (1 cc.)	22	4,05	72 %	0,9	8,4
Dopo 6 iniezioni di preparato A (1 cc.)	24	4,9	81 %	0,9	5,4

(¹) Modificazione del metodo di GOTTLEBE e SKIBBE, «Arch. exp. Path. u. Pharmak.», 1936, 182, 91.

TABELLA II.

	Giorni trascorsi dall'inizio del- l'esperimento	Eritrociti in milioni per mme.	Hb (metodo Sahli)	Valore globulare	Reticolociti ‰ eritrociti
	—	5,0	90 ‰	0,9	1,5
Dopo 3 iniezioni di saponina + collargolo	6	4,0	80 ‰	1	1
Dopo 6 iniezioni di saponina + collargolo	12	3,5	82 ‰	1,16	0,6
Dopo 9 iniezioni di saponina + collargolo	18	2,0	75 ‰	1,87	1,4
Dopo 1 iniezioni di Pernaemon (1 cc.)	19	3,6	68 ‰	0,95	19,6
Dopo 2 iniezioni di Pernaemon (1 cc.)	20	4,5	78 ‰	0,87	5

TABELLA III.

	Giorni trascorsi dall'inizio del- l'esperimento	Eritrociti in milioni per mme.	Hb (metodo Sahli)	Valore globulare	Reticolociti ‰ eritrociti
	—	5,45	97 ‰	0,9	2,1
Dopo 3 iniezioni di saponina + collargolo	6	4	84 ‰	1,05	2
Dopo 6 iniezioni di saponina + collargolo	12	3,4	75 ‰	1,1	2
Dopo 9 iniezioni di saponina + collargolo	18	2,4	54 ‰	1,2	1
Dopo 2 iniezioni di preparato B (1 cc.)	20	2,1	43 ‰	1,02	2
Dopo 4 iniezioni di preparato B (1 cc.)	22	2,3	46 ‰	1,06	1,5
Dopo 6 iniezioni di preparato B (1 cc.)	24	2,1	43 ‰	1,02	1,5

TABELLA IV.

	Giorni trascorsi dall'inizio del- l'esperimento	Eritrociti in milioni per mme.	Hb (metodo Sahli)	Valore globulare	Reticolociti ‰ eritrociti
	—	5,7	100 ‰	0,87	1,5
Dopo 3 iniezioni di saponina + collargolo	6	4,25	89 ‰	1,05	1
Dopo 6 iniezioni di saponina + collargolo	12	3,43	75 ‰	1,1	1,5
Dopo 9 iniezioni di saponina + collargolo	18	2,8	65 ‰	1,16	2
Dopo 2 giorni di ri- poso	20	2,5	55 ‰	1,11	2
Dopo 4 giorni di ri- poso	22	2,6	54 ‰	1,03	0,7
Dopo 6 giorni di ri- poso	24	2,4	59 ‰	1,2	1,5

I dati riportati mostrano:

1) che mediante l'iniezione endovenosa di saponina e collargolo, in opportune condizioni, si ottiene in 3 settimane, circa, una intensa anemia macrocitica ipercromica;

2) che la somministrazione per via parenterale di lievito incubato con succo gastrico produce un rapido e profondo miglioramento del quadro ematico, con spiccata crisi reticolocitaria, aumento degli eritrociti e ripristino del normale valore globulare;

3) che lo stesso effetto si ottiene iniettando un estratto epatico del commercio (Pernaemon);

4) che la somministrazione per via parenterale di solo lievito autolizzato non ha alcun effetto sul quadro ematologico degli animali anemizzati.

(¹) In conigli tenuti contemporaneamente in laboratorio nelle stesse condizioni di ambiente e di alimentazione, ma non trattati, il numero degli eritrociti per mm³ variò da 4 a 6 milioni circa; quello dei reticulociti da 0,5 a 2% eritrociti.

RELAZIONI

I più antichi uomini d'Italia secondo le recenti scoperte

Relazione ⁽¹⁾ di SERGIO SERGI
Aggregato alla R. Accademia d'Italia

SOMMARIO. — *Premessa.* — Sistemazione delle scoperte paleantropologiche. Gli ominidi fossili di forme estinte: i *protoantropi* del pleistocene inferiore; i *paleantropi* del pleistocene medio. Gli ominidi fossili di forme attuali: i *fanerantropi fossili*; loro posizione cronologica. Le forme industriali più antiche e la loro estensione nel quaternario. Distribuzione degli umani nel continente antico fin dal più remoto pleistocene.

L'umanità più antica d'Italia. — Industrie paleolitiche della penisola, unico documento della presenza degli uomini nel quaternario antico. Assenza di reperti scheletrici nello stesso periodo.

Le forme industriali musteriane largamente distribuite in Italia nell'interglaciale rissurmiano (musteriano a fauna calda) e nel wurmiano (musteriano a fauna fredda). I paleantropi neandertaliani artefici della tecnica musteriana.

I reperti degli uomini fossili della regione laziale e la storia delle loro scoperte nell'ultimo decennio.

L'Italia nella regione laziale fornisce con i reperti di Saccopastore e del Circeo la documentazione della esistenza di forme diverse di paleantropi europei appartenenti ad età differenti.

I paleantropi rinvenuti a Saccopastore, uomini dell'ultimo interglaciale e varietà particolare dei neandertaliani mediterranei. Loro probabile relazione genetica con i fanerantropi. Il paleantropo scoperto a Monte Circeo uomo dell'ultimo glaciale, neandertaliano nel significato più stretto, ramo terminale della specie in via di estinzione.

PREMESSA ⁽²⁾.

Nessun reperto fossile umano appartiene al terziario. I reperti degli uomini fossili fino ad oggi accertati appartengono al quaternario. Il gran travaglio formativo dell'ominazione occupa tutto il pleistocene ed

⁽¹⁾ Letta nell'Adunanza del 16 dicembre 1939-XV^{II}.

⁽²⁾ In questa premessa riassumo le conclusioni di due capitoli, in corso di stampa, intorno agli ominidi fossili da me redatti per l'opera diretta da R. BIASUTTI, *Le razze ed i popoli della Terra*, edita da U. T. E. T.

ha per esponente i diversi periodi del medesimo, durante ciascuno dei quali l'umanità è caratterizzata da uno stadio di evoluzione dominante che si svolge su più linee. Si intravede che i vari stadi hanno legami di interdipendenza, ma le origini delle connessioni ed i fattori da cui esse sono condizionate non possono essere fissate e definite allo stato delle conoscenze attuali se non in modo ipotetico e provvisorio da particolari orientamenti teorici su cui qui non mi soffermo. Gli uomini più antichi sono costituiti o da forme che oggi sono completamente scomparse o da forme che oggi sono rappresentate dai viventi o che almeno con questi hanno evidenti e strette affinità. Gli uomini fossili di forme del tutto scomparse sono da me distinti in due gruppi: i *protoantropi* o primi uomini ed i *paleantropi*. Gli uomini fossili di forme attuali, indicati comunemente con il nome di *Homo sapiens fossilis*, sono da me chiamati *fanerantropi fossili*. Denomino *fanerantropi* tutti gli uomini di forme attuali appartenenti a razze sia estinte, sia viventi. Questo termine io ho tratto da etimologia greca (φανερός = manifesto, visibile) e significa uomini che possiedono forme le quali appaiono ancora oggi sotto i nostri occhi. Non uso il termine *neantropi* (uomini nuovi), come è stato proposto dalla scuola inglese, perchè è equivoco in quanto esso significa che la data della loro apparizione è posteriore alle altre forme estinte. Il termine di fanerantropi lascia impregiudicata la loro successione nel tempo, rispetto alle forme scomparse. I più antichi uomini fossili, i protoantropi, sono rappresentati da documenti scarsissimi e molto incompleti. Le forme più primitive umane fino ad ora conosciute, Sinantropo in Cina, Maner nel centro di Europa, appartengono al quaternario più antico. Esse dimostrano che gli uomini, almeno più di mezzo milione di anni fa, occupavano regioni estremamente distanti dell'Eurasia. Il Sinantropo di Pechino è un protoantropo asiatico; l'uomo di Maner è un protoantropo europeo. In un periodo geologico più avanzato, nel quaternario medio, appaiono nuove forme oggi totalmente estinte e che hanno fra di loro molte somiglianze. Sono questi i paleantropi che costituiscono uno stadio polimorfo dominante dell'umanità in quel periodo geologico. Essi sono meglio conosciuti dei protoantropi perchè i loro resti sono più numerosi e più completi. Le varie forme di paleantropi europei (Neandertal), asiatici (Giava, Palestina), africani (Rodesia), si distinguono perchè la loro architettura differente e la loro contemporaneità sembrano dimostrare che essi debbono avere avuto sviluppo indipendente. Incerta e discussa è la presenza dei fanerantropi (*Homo sapiens*) nel pleistocene medio. È assai verosimile la loro presenza mentre vanno scomparendo i paleantropi. Nel pleistocene superiore tutti i continenti risultano abitati da genti che sono indubbiamente legate alle attuali. La straordinaria e generale polimorfia umana dei fanerantropi appare in tutta la sua estensione al chiudersi del pleistocene con le differenze etniche in più linee, corrispon-

denti alle speciali divisioni razziali dell'uomene attuale. Le così dette razze umane attuali sono già in evoluzione.

I documenti che attestano la presenza dell'uomo oltre che dai suoi resti mortali sono costituiti dai più diversi oggetti che portano la traccia della sua attività e ci parlano dei suoi attributi mentali. Questi documenti forniscono un ricco materiale che permette di seguire il poderoso cammino percorso nella graduale ascesa della civiltà. Oggi si riconosce universalmente la presenza in Europa di industrie litiche per tutta la durata del pleistocene. Dalle scheggie non preparate, rappresentate a Ipswich nel primo glaciale (Gunz) dalle forme chazotiane, industrie su scheggie che già appaiono nel primo interglaciale e da quelle amigdaliane che già si incontrano nello stesso periodo (Gunz-Mindel), alle industrie del gruppo Levallois e Moustier a scheggie, nelle quali sono caratteristici i piani di percussione accuratamente preparati e ritoccati, e di cui alcuni tipi giungono fino all'ultimo glaciale Würm, e tutto un complesso di serie industriali che caratterizzano rispettivamente il paleolitico inferiore e medio quando sono presenti i protoantropi ed i paleantropi ai quali debbono attribuirsi. Le industrie che si incontrano nel pleistocene superiore e si svolgono nel postglaciale, comprendono il paleolitico superiore nel quale sono presenti i fanerantropi mentre i paleantropi sono scomparsi. Profondo è allora il mutamento della cultura che si prospetta con la evoluzione della tecnica delle industrie e con lo sviluppo delle manifestazioni artistiche, fatti che segnano l'avvento di una umanità più progredita.

L'UMANITÀ PIÙ ANTICA D'ITALIA.

Le indagini dei nostri paleontologi che da alcuni anni rovistano la penisola, hanno da tempo dimostrato l'esistenza dell'uomo fin dalle più remote età del quaternario per la presenza di industrie paleolitiche che appartengono a diversi cicli culturali.

Le più antiche, sicure vestigia dell'umanità si trovano fin dal pleistocene inferiore, come è provato dalla presenza della industria amigdaliana abbevilliana e acheulana, così chiamata dagli strumenti di pietra a forma di mandorla, appuntiti ad una delle estremità e ritoccati con larghe scheggiature su entrambe le facce, per cui sono anche classificate fra le industrie dette bifacciali. Questo tipo industriale di strumenti di pietra concentrato negli Appennini, appare più frequente nel versante adriatico. Parecchi sono i depositi ed anche ricchi, ma superficiali, cosicchè non possono essere in alcun modo datati. A Capri e a Terranera di Venosa si accompagnano alla fauna che è costituita dall'ippotamo, dal

rinoceronte di MERK e dall'elefante antico. La presenza del tipo amigdaliano abbevilliano (chelleano) (fig. 1) in una delle fasi più antiche del quaternario è stata segnalata da GIAN ALBERTO BLANC a mezzo chilometro da Ponte Milvio sulla Via Flaminia in un deposito di ghiaia che per la sua giacitura appartiene alla formazione di alluvionamento della valle del Tevere. Ed ancora alle porte di Roma, presso la Via Flaminia, fu rinvenuta dal BLANC junior una scheggia di tecnica clactoniana (fig. 2)



Fig. 1. — Amigdala chelleana rinvenuta alla cava Milanetti a monte di Ponte Milvio da Gian Alberto Blanc ($\frac{2}{3}$ della grandezza naturale). « Rivista di Antropologia », vol. XXX.

che per la sua giacitura sembra più probabile doversi attribuire ad una fase precedente alla formazione del tufo giallo litoide che caratterizza, secondo il CLERICI, la serie stratigrafica della regione e cioè nel più antico quaternario. L'industria clactoniana (da Clacton on Sea, in Inghilterra) costituita da schegge ottenute senza una preventiva preparazione di un piano di percussione, per la sua tecnica appare più semplice e primitiva di quella amigdaliana e certamente appartiene ad uno stadio culturale dei più arcaici. Non si può giudicare se la tecnica clactoniana applicata nel bacino del Tevere quaternario corrisponda ad un periodo crono-

logico ed ad uno stadio culturale distinto da quello paleolitico inferiore di tipo abbevilliano. Ma è certo che le scoperte dei due BLANC testimoniano che il Lazio, nel più antico quaternario, fu abitato dall'uomo e cioè in un'epoca precedente alle ultime fasi di deposizione delle grandi masse di tufo che distinguono la geologia dell'Agro Romano. Questo uomo del quaternario antico non è conosciuto nei suoi caratteri fisici perchè non si hanno fino ad ora reperti scheletrici; forse esso è il Protoantropo Ita-

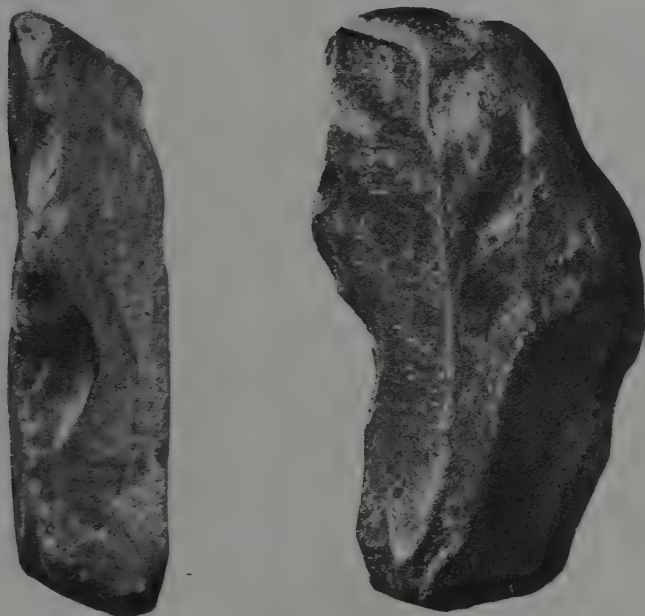


Fig. 2. - Scheggia di tecnica clactoniana rinvenuta *in situ* nella cava di ghiaia della Valchetta—Cartoni da Alberto Carlo Blanc (grandezza naturale). « Rivista di Antropologia », vol. XXXI.

lico e forse non sarà molto dissimile da altri protoantropi europei dei quali non abbiamo conoscenza fino ad ora precisa e completa. Certo è che la penisola nostra fu abitata dall'uomo quando ancora le condizioni geologiche erano differenti dalle attuali e certo non più tardi delle altre contrade europee. A significare quanto sia grande il progresso delle nostre conoscenze in questi ultimi tempi, è bene ricordare che non sono trascorsi molti anni da quando un celebre storico di Roma, il MOMMSEN, sentenziava che l'uomo era apparso in Italia appena alla epoca dei metalli.

Assai più largamente diffusa nella penisola fu l'industria musteriana, costituita da schegge distaccate con un colpo da un nucleo nel quale era preparato da prima un piano di percussione e foggiate in diversa guisa con abili ritocchi sui margini. Questa industria, con facies diverse, era diffusa nell'interglaciale Riss-Wurmiano (musteriano a fauna calda) e nel Wurmiano (musteriano a fauna fredda). Essa si estende dalla Liguria (Grimaldi, Fate) e dalla Venezia (Asolo, Pocala) e dalle Alpi Apuane (Onda, Tasso, Equi) all'Umbria, al Lazio (alluvioni della bassa valle del Tevere e dell'Aniene) e giù, giù fino alla Campania (Palinuro), alla Calabria (Scalea) ed alla Terra d'Otranto (Romanelli), mentre è ancora discussa la sua esistenza in Sicilia. Particolare attenzione meritano i trovamenti nelle ghiaie alluvionali del Tevere, dovuti al romano CESELLI fin dal 1846. Le selci musteriane erano insieme con la fauna dei grossi mammiferi estinti e documentavano la esistenza dell'uomo nell'età in cui vissero questi animali. Per la storia delle ricerche italiane e per gli sviluppi ulteriori non si può lasciare inosservata la data del 1846, che se è segnata giustamente a lettere d'oro dalla scienza preistorica in Francia per la pubblicazione della celebre opera di BOUCHER DE PERTHES, il fondatore della preistoria, va ricordata per la scoperta del CESELLI, il quale fu un vero precursore fin dalla metà del secolo passato, degli studi di paleontologia in Italia. Le sue scoperte per lungo tempo furono messe a tacere da una critica assai ingiusta per una deplorabile incomprensione del loro alto valore scientifico anche da parte di qualche eminente studioso. Sono ancora di pochi anni fa alcuni scritti di naturalisti e paleontologi i quali affermano che l'uomo appare molto tardi nel territorio di Roma, negando ogni autenticità e valore a quegli strumenti litici rinvenuti proprio presso Roma da sì lungo tempo. Occorsero le recenti scoperte dell'uomo di Neandertal, precisamente nelle stesse località, per rivendicare i grandi meriti del CESELLI.

Gli oggetti musteriani, in alcune località di Europa, sono stati rinvenuti unitamente ai resti fossili dell'uomo di Neandertal, il quale d'altra parte si incontra sempre in un momento nel quale fiorisce l'industria musteriana. Gli uomini musteriani sono stati quindi identificati con i neandertaliani che costituiscono una specie umana vissuta nel quaternario medio e che si estinse con l'avvento del quaternario superiore. Si poteva presupporre che l'industria musteriana trovata in Italia fosse opera degli stessi neandertaliani, ma nessuna prova era fornita per l'assenza di reperti umani. Questa prova fu data nel 1929, quando fu rinvenuto il primo cranio neandertaliano a Saccopastore.

Le conoscenze concrete e sicure sugli uomini che abitarono la penisola nel paleolitico antico sono molto recenti.

Fino a dieci anni fa si ignorava completamente quali fossero le caratteristiche fisiche delle stirpi che pure avevano lasciato tante testimo-

nianze della loro presenza. Una nuova era si apre per la paleontologia umana italiana a partire dal 1929. A cominciare da questa data le scoperte dell'uomo di Saccopastore e dell'uomo del Circeo hanno permesso alla nostra scienza di scrivere non solo il primo capitolo della storia umana più antica d'Italia, ma anche di portare un potente contributo del tutto nuovo per la conoscenza della storia dell'umanità più arcaica dell'Europa, da cui risulta che questa è stata sempre strettamente legata, dai tempi geologici più remoti, alla nostra Italia.

Nel 1929 in una cava di ghiaia presso il ponte Nomentano, a tre chilometri da Porta Pia, nella tenuta di Saccopastore di proprietà del DUCA GRAZIOLI, veniva estratto il primo cranio di tipo così detto neandertaliano (figg. 3 e 4).

Questa scoperta fu indubbiamente un avvenimento straordinario per la paleontologia umana. Prima dell'uomo di Saccopastore nulla si sapeva degli uomini che vissero nella penisola italiana avanti al pleistocene superiore. Con Saccopastore si fa luce su un lungo periodo del pleistocene italiano e si colma una grande lacuna antropologica. Il teschio fu rinvenuto insieme con i resti di grandi mammiferi fossili: *Elephas antiquus*, *Rhinoceros Mercki* e *Hippopotamus maior*. Il luogo del giacimento è caratterizzato da ghiaie e sabbie ricche di elementi vulcanici appartenenti a depositi fluvio-lacustri di quel periodo nel quale si andava formando la bassa valle del Tevere per assumere l'aspetto della topografia attuale.

Per quanto riguarda il riferimento cronologico una esatta determinazione stratigrafica permette di assegnare il cranio all'ultimo interglaciale (Riss-Wurmiano). Lo strato delle ghiaie alluvionali nel quale giaceva corrisponde ad una nuova sedimentazione che era seguita alla erosione dell'alto terrazzo, già costituito da depositi formati alla base del pleistocene dalle alluvioni più antiche del Tevere. Questa nuova sedimentazione cronologicamente precede le fasi terminali del vulcanismo laziale e segna il limite di uno stadio ben definito del parossismo vulcanico locale. Su tale determinazione convengono tanto ROBERTO KOEPEL quanto G. A. BLANC.

Il cranio presenta alcuni guasti, le arcate orbitarie e regioni supra-orbitarie sono mutilate, le arcate zigomatiche distrutte. Manca la mandibola. Nonostante i guasti esso è uno degli esemplari meglio conservati appartenenti al tipo e per certi riguardi l'unico, perchè è stato recuperato in un sol pezzo e non in frammenti come gli altri (ad eccezione di quello del Circeo scoperto dieci anni dopo). Conserva la parte più cospicua della faccia ed è l'unico fino ad ora che possiede intiera tutta la base. Il cranio si distingue subito a prima vista da quello degli uomini attuali per l'aspetto particolare dovuto alla grandezza relativa della porzione facciale in rapporto di quella cerebrale, alla forte depressione della volta

ed alla speciale proiezione delle mascelle. La capacità cerebrale è piccola e certo non arriva ai 1200 cmc. Per lo stato di ossificazione e della dentatura è stato da me attribuito ad una donna trentenne. È mesocefalo vicino ai limiti della brachicefalia ed ha una riduzione estrema dell'altezza, la più piccola in valore assoluto che sia conosciuta fino ad oggi

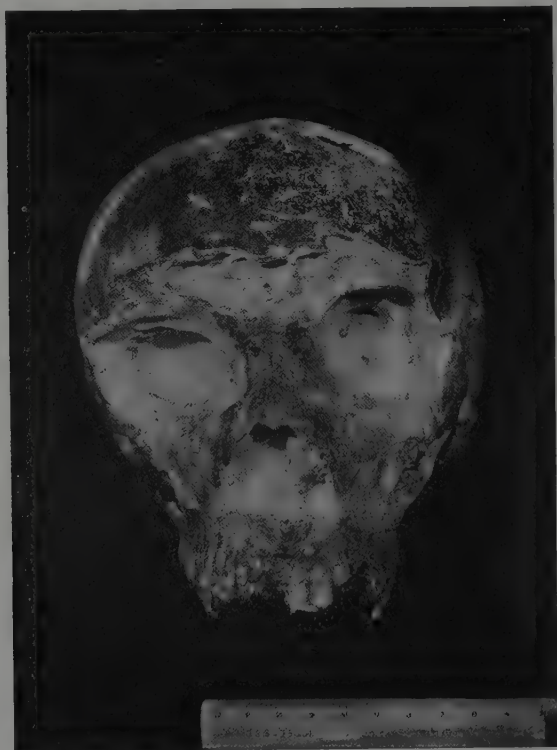


Fig. 3. — Il cranio di Saccopastore I, scoperto nel 1929, veduto nella norma facciale, orientato sul piano orbito-auricolare ($\frac{1}{2}$ della grandezza naturale).

Fotografia di SERGIO SERGI.

nell'uomo. La visiera frontale, cioè il caratteristico oggetto della fronte che sovrasta le orbite nei neandertaliani, è molto prominente lateralmente mentre sembra che sia stata assai poco pronunziata nella sezione mediana. La regione del lambda all'incontro delle due ossa parietali con l'occipitale è occupata da un sistema di ossicini sopranumerari, fatto

che ho potuto dimostrare essere molto comune nei neandertaliani, indice della instabilità morfologica della regione occipitale superiore che è in via di evoluzione. La regione pterica di sinistra ha caratteri morfologici del più alto grado di evoluzione umana per il particolare sviluppo della protuberanza della terza circonvoluzione frontale, indice della evoluzione della regione cerebrale deputata al linguaggio articolato.

Un fatto di grande interesse da me subito rilevato nel cranio di Saccopastore riguarda la posizione e la inclinazione del forame occipitale.



Fig. 4. — Il cranio di Saccopastore I, scoperto nel 1929, veduto nella norma laterale sinistra, orientato sul piano orbito-auricolare ($\frac{1}{2}$ della grandezza naturale).

Fotografia di SERGIO SERGI.

Nell'unico neandertaliano di cui è stata descritta la base, quello di La Chapelle, il BOULE rilevò il forte arretramento del forame occipitale e l'inclinazione all'indietro del piano di apertura del medesimo. Queste due condizioni hanno fatto pensare che i neandertaliani avessero avuto una attitudine bipede meno perfetta degli uomini attuali e procedessero con la testa alquanto inclinata all'innanzi, ricordando così l'atteggiamento degli antropomorfi quando si reggono sugli arti posteriori. Lo studio del cranio di Saccopastore mi ha permesso di sfatare questa leggenda. Io ho potuto rilevare che per le condizioni di posizione e di inclinazione del forame occipitale, l'uomo di Saccopastore teneva assolutamente il

capo eretto come gli uomini attuali e che l'idea sostenuta dal BOULE è fondata su un'erronea ricostruzione della base del cranio di La Chapelle. A conferma della mia veduta posso aggiungere che anche il cranio di La Ferrassie, neandertaliano, che si conserva a Parigi e che io ho potuto esaminare per gentile concessione del BOULE, presenta il forame occipitale in una posizione che non si allontana da quella che possiede l'umanità vivente. Così anche il cranio di Gibraltar, depositato al Royal



Fig. 5. — Il cranio di Saccopastore II, scoperto nel 1935, veduto nella norma facciale orientato sul piano orbito-auricolare ($\frac{1}{2}$ della grandezza naturale).

Fotografia di SERGIO SERGI.

College of Surgeons di Londra e da me studiato per particolare cortesia del prof. KEITH. Queste osservazioni mi inducono a confermare in modo generale che l'uomo di Neandertal procedeva come i fanerantropi attuali con il capo eretto, contrariamente a quanto ancora si vede rappresentato dalle figure di trattati recentissimi che ci mostrano i neandertaliani con la testa inclinata innanzi.

Un altro fatto morfologico di alto significato evolutivo è la forte flessione della base, correlativa di una sistemazione meccanica la più

avanzata agli effetti della posizione eretta del capo e che conferma ancora una volta la perfetta organizzazione di questa condizione. La faccia molto grande ha una notevole altezza, apertura delle orbite enorme, apertura nasale larga e bassa, dorso del naso proiettato fortemente in fuori, mascelle come rigonfie a darle forma di cuneo, arcata alveolare molto larga a ferro di cavallo. Nel complesso fra i reperti neandertaliani, quello di Gibraltar, scoperto fin dal 1848, è il più simigliante a quello di Saccopastore

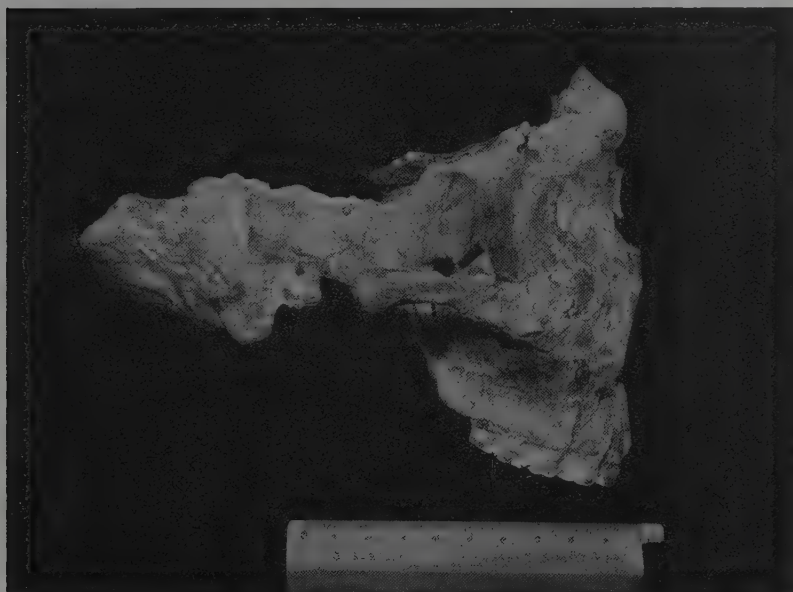


Fig. 6. — Il cranio di Saccopastore II, scoperto nel 1935, veduto nella norma laterale destra, orientato sul piano orbito-auricolare ($\frac{1}{2}$ della grandezza naturale).

Fotografia di SERGIO SERGI.

e per le dimensioni e per la morfologia generale e speciale. Ciò ho potuto rilevare nei minuti confronti con osservazioni dirette compiute sul cranio spagnolo servendomi in particolare di craniogrammi di sezioni ortogonali e di sezioni oblique, sicchè fui indotto a considerare i reperti come appartenenti a varietà mediterranee del grande gruppo neandertaliano.

Nel luglio 1935 A. C. BLANC e l'abate BREUIL dell'Istituto di Francia, durante una visita alla cava di Saccopastore per la ricerca di molluschi fossili, rinvenivano in posto nel terreno intatto del giacimento, lungo la scarpata semifranata della cava in abbandono, un altro cranio neander-

taliano. I resti del teschio furono raccolti in vari frammenti inclusi largamente in blocchi di roccia. La loro preparazione e la loro ricomposizione definitiva sono state ultimate dopo circa quattro anni di pazientissimo lavoro. Il cranio (figg. 5 e 6) presenta intatta gran parte della faccia e più completamente a destra con l'arcata zigomatica e il toro orbitario. Nello stesso lato si conserva per intero l'osso temporale e parte dello sfenoide. Per il complesso dei suoi caratteri è molto simile al primo cranio di Saccopastore. La flessione della base è, come in questo, pronunciata; la faccia è ortognata, grande, molto alta, con indice di leptoprosopia e contorni delle sezioni orizzontali che ripetono quelli di Saccopastore I; simile è la forma dell'arcata alveolare e la forte elevazione della volta palatina, quasi dello stesso valore l'indice orbitale, un po' più larga l'apertura nasale. Particolare interesse, che si può rilevare dalla base della cavità allo scoperto, è che il cervello presentava un *rostrum* orbitale molto accentuato, carattere primitivo della regione orbitaria del lobo frontale ed una certa brevità del lobo temporale. Io ho ascritto, per la loro morfologia comune, i due crani di Saccopastore ad una varietà particolare dell'uomo di Neandertal, *Homo neandertalensis* var. *aniensis*, che così denominai dal fiume Aniene.

Nella primavera del 1936, per iniziativa dell'Istituto Italiano di Paleontologia Umana ed in collaborazione con l'Istituto di Antropologia della Università di Roma, fu effettuata una campagna di scavo nella cava di Saccopastore. Nel piano di studio fu seguito quel metodo naturalistico integrale, promosso in Italia con tanta larghezza di vedute e con tanti risultati positivi da GIAN ALBERTO BLANC e che ora ha trovato nel figlio di lui ALBERTO CARLO il più valente e geniale assertore.

Nello scavo della cava di Saccopastore venivano estratti, dallo stesso livello nel quale era stato rinvenuto il secondo cranio, alcuni strumenti di selce e di diaspro di tipica fattura musteriana, insieme a particolari relitti di fauna e flora fossili (fig. 7).

La stretta collaborazione degli studi stratigrafici paleozoologici e paleobotanici, che aveva dato risultati fecondi nelle ricerche promosse da A. C. BLANC e parallelamente condotte da questi e dal dott. TONGIORGI nell'Agro Pontino e nella Versilia, fu perseguita nello studio del giacimento di Saccopastore. Qui, accanto alla fauna costituita da *Hippopotamus*, *Bos primigenius*, *Equus hydruntinus* e da molluschi di forme nane, fu assodato per la flora la presenza di *Corylus avellana*, *Quercus*, *Populus*, *Carpinus* vel *Ostrya*. Complesso di elementi che sembrano indicare una fase terminale della trasgressione tirreniana.

La ricostruzione del quadro geologico e paleobiologico della bassa valle del Tevere per opera di A. C. BLANC, risulta ricca di testimonianze precise che attingono agli elementi più svariati. Secondo questi, lo studio paleobotanico degli inclusi dei tufi, travertini e limi lacustri o di inonda-



Fig. 7. — Industria paleolitica musteriiana di Saccopastore rinvenuta nello scavo del 1936, (in grandezza naturale). Da ALBERTO CARLO BLANC, *Il giacimento musteriiano di Saccopastore nel quadro del pleistocene laziale* (« Rivista di Antropologia », vol. XXXII).

zione, assume un valore più probante della fauna malacologica o dei grandi vertebrati contenuta nelle ghiaie fluviali, data la sensibilità delle associazioni vegetali all'ambiente climatico.

Lo scavo, purtroppo, per circostanze indipendenti dalla volontà nostra, non fu potuto essere compiuto con quella estensione che avremmo desiderato. È da augurare che ancora possa essere ripreso e condotto a fondo per far luce su i problemi che la scienza si è posti e che tanto interesse hanno per la conoscenza del nostro passato più remoto e più specialmente in questo sacro suolo la cui storia non ha l'eguale in nessuna regione della Terra.

Per intanto, da quello che ho riassunto sulle scoperte di Saccopastore, oggi si può concludere che:

Gli uomini di Saccopastore furono gli artefici degli strumenti musteriani come lo furono tutti i neandertaliani di Europa. Questi uomini sostarono per il loro riposo negli antri che si aprono alle falde dei monti che guardano la bassa valle del Tevere ed ebbero ricetto nelle boscaglie del suolo dove, non meno di centomila anni più tardi, doveva sorgere l'Urbe sacra ed immortale. Questi uomini furono contemporanei dei grandi mammiferi estinti, l'elefante antico, il rinoceronte di Merk, l'ippopotamo che caratterizzano la fauna detta di tipo caldo. Essi abitarono il Lazio nell'interglaciale Riss-Würmiano e furono testimoni e spesso vittime delle grandi eruzioni vulcaniche che colpiscono la regione. Ma non tutti perirono, sicchè mentre le foreste di lauri e di querce venivano sepolte dalle piogge di ceneri, come lo attestano le impronte da queste lasciate nei tufi romani, i superstiti che ancora sopravvivevano ai terribili cataclismi, superando le condizioni più sfavorevoli che a volte la natura loro opponeva, erano ancor presenti nelle fasi terminali del tirreniano, quando già si preparavano le condizioni climatiche che preannunziavano il glaciale e per le quali nella bassa valle del Tevere si diffondevano specie vegetali la cui distribuzione altimetrica attuale è notevolmente assai superiore.

Nel febbraio 1939, per opera di ALBERTO CARLO BLANC, veniva rinvenuto un nuovo cranio neandertaliano in una caverna del Monte Circeo.

Le grotte del Monte Circeo dal 1936 sono divenute oggetto di ricerche diligenti e metodiche di A. C. BLANC, il quale ha cercato, con lo studio dei giacimenti di esse, determinare la successione degli eventi geologici e biologici del pleistocene. A lui si deve la scoperta di numerose grotte, nelle quali, con rigoroso metodo stratigrafico e fisiografico, egli ha potuto determinare quali sono state le relazioni cronologiche fra le oscillazioni subite dalla linea di riva marina durante il pleistocene e le successive fasi di sviluppo e di trasformazione delle varie culture preistoriche. Nel corso delle esplorazioni il BLANC ha rinvenuto industrie paleolitiche riferibili a due diverse culture, una più antica di tipo musteriano, che per i suoi caratteri ha chiamato « pontiniana » ed un'altra di tipo aurignaciano

da lui chiamata « circeiana », che attestano la lunga presenza dell'uomo nel Monte Circeo. Il cranio di tipo neandertaliano fu trovato in una nuova grotta il cui ingresso era stato suggellato da una frana fin dall'epoca in



Fig. 8. - Industria paleolitica di tipo pontiniano rinvenuta nel riempimento detritico della grotta Guattari al Monte Circeo ($\frac{2}{3}$ della grandezza naturale). Da ALBERTO CARLO BLANC, *L'uomo fossile del Monte Circeo* (« Rivista di Antropologia », vol. XXXII).

cui erano vissuti gli uomini musteriani. La superficie della grotta si era conservata come nel momento nel quale il cranio vi fu deposto perchè la frana aveva chiuso l'ingresso intorno allo stesso tempo. Il suolo della

grotta era tutto cosperso di ossa e corna fossili. Il cranio poggiava su alcune pietre disposte a cerchio ed insieme con ossa di cervo e di cavallo. Sotto al cranio fu trovato un metacarpo di daino ed uno di bue con segni di frattura intenzionale. Fra le ossa, in cui prevalevano quelle di cervidi, bovidi ed equidi, furono trovati anche elementi di elefante, di leopardo, di leone e numerosi resti di iena. Il BLANC ritiene che il cranio appartenga

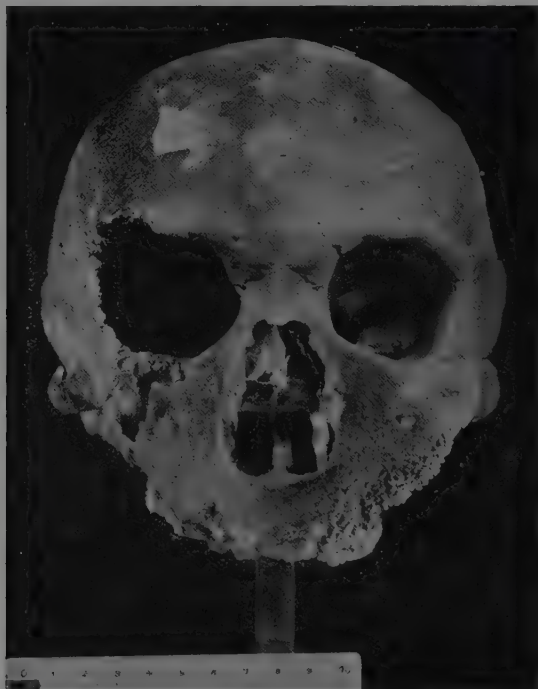


Fig. 9. — Il cranio del Monte Circeo, scoperto nel 1939, veduto nella norma facciale, orientato sul piano orbito-auricolare ($\frac{1}{2}$ della grandezza naturale).

Fotografia di SERGIO SERGI.

a quel momento della regressione tirreniana dell'ultimo glaciale nel quale ancora sopravviveva la fauna calda e l'uomo possedeva quella particolare industria musteriana che per i suoi caratteri locali egli ha chiamato pontiniana (fig. 8). Questa industria consta di raschiatoi e di punte ottenute da nuclei discoidali mediante la tecnica della preparazione del piano di percussione e della frattura diretta di ciottoli silicei secondo la tecnica che produce frammenti a spicchio di mandarino. Nel suo insieme si di-

stingue sia dalla mustero-levalloisiana dell'Europa occidentale, sia dalla cosiddetta musteriana alpina, e trova rispondenza nella industria musteriana della grotta del Castillo (OBERMAIER) ed è forse rappresentata nella grotta di Devil's Tower a Gibraltar associata a resti fossili dell'uomo di Neandertal. Il BLANC, applicando la curva delle oscillazioni delle radiazioni solari del MILANKOVITCH alla determinazione dell'età probabile



Fig. 10. — Il cranio del Monte Circeo, scoperto nel 1939, veduto nella norma laterale sinistra, orientato sul piano orbito-auricolare ($\frac{1}{2}$ della grandezza naturale).

Fotografia di SERGIO SERGI.

dell'uomo del Monte Circeo, ammette che essa possa fissarsi intorno a 70.000 anni. L'età dell'uomo di Saccopastore, che appartiene al basso terrazzo pleistocenico dell'Aniene, coinciderebbe con il momento nel quale ancora la grotta dove si è trovato il cranio del Circeo era invasa dal mare, corrispondente quindi alla trasgressione tirreniana e potrebbe essere calcolata intorno a 130.000 anni.

Il cranio (figg. 9 e 10) è conservato nella massima parte. Alla base una larga perdita dell'occipitale determina un'ampia apertura trapezoidale che

sembra creata artificialmente al momento della morte per estrarne il cervello. La forma e l'estensione della frattura sono molto simili a quelle che si riscontrano in crani melanesiani che si conservano nell'Istituto di Antropologia e nei quali fu compiuto l'allargamento per lo stesso scopo. Un'altra estesa distruzione interessa la regione temporo-orbitaria destra, dove appare una grande apertura che mette allo scoperto la cavità cerebrale. La superficie di frattura in corrispondenza dell'angolo orbitario esterno superiore, fa supporre, per le sue caratteristiche, che la mutilazione sia stata prodotta da uno strumento appuntito che avrebbe determinato la morte del soggetto. Per le condizioni della ossificazione si può ritenere che il cranio apparteneva ad un individuo maturo tra i quaranta e cinquanta anni. In tutte le regioni fontanelari si trovano ossicini soprannumerari. La forma generale del cranio ripete quella dei neandertaliani più tipici, come Neandertal e La Chapelle. È impressionante la somiglianza, sia per la forma, sia per le dimensioni, del cranio del Circeo con quello di La Chapelle, che è il più famoso per lo studio che su di questo fu compiuto dal BOULE per la sistemazione del tipo neandertaliano. La comunanza dei caratteri è completata da quella del sesso e dell'età, perchè tanto l'uno che l'altro sono maschili e presso a poco della stessa età. Le differenze che ho riscontrate dipendono più specialmente da deformazioni postume e da difetti di ricostruzione del cranio di La Chapelle. Il cranio del Circeo che non ha subito nessuna deformazione e nessuna ricostruzione, serve a mettere anche in chiaro i difetti artificiali di quello di La Chapelle. Da un esame comparativo dei craniogrammi sagittali mediani dei due crani sovrapposti, ho rilevato che il cranio di La Chapelle è stato allungato eccessivamente alla base, con avanzamento della faccia. Per questo si è creato artificialmente un prognatismo, che manca in tutti gli altri crani neandertaliani orientati sul piano orbito-auricolare, e una posizione relativa del forame occipitale che appare troppo arretrata in confronto a quella che sarebbe stata, posizione che è valsa ad affermare che l'uomo di Neandertal avesse avuto la testa alquanto inclinata innanzi e non eretta come l'uomo attuale. La posizione del forame occipitale determinata sul cranio del Circeo è molto prossima a quella del cranio di Saccopastore, risulta quindi alquanto più avanzata che nell'uomo di La Chapelle e cioè, come si è detto, conferma il difetto di ricostruzione di quest'ultimo, e conferma quanto avevo già rilevato con lo studio di Saccopastore, che i neandertaliani avevano la posizione eretta come l'uomo attuale. La curva sagittale frontale del Circeo ripete in modo quasi perfetto quella corrispondente della calotta di Neandertal. Il frontale del cranio del Circeo, in questa sezione, è quasi una copia di quello del cranio di Neandertal per le dimensioni, per la morfologia e per la posizione.

La capacità cranica è di circa 1550 cmc. o poco più e per questa il cranio rientra nel gruppo dei crani a carattere più tipicamente neander-

taliano che hanno una grande capacità come quelli di La Chapelle, Neandertal, la Ferrassie, i due Spy. Al grande volume fanno riscontro le grandi dimensioni di lunghezza e di larghezza vicine a quelle di La Chapelle e La Ferrassie, coi quali ha in comune anche il valore dell'indice cefalico; è invece molto basso ed è il più basso dei crani neandertaliani a grandi dimensioni. La faccia è molto grande, ortognata, molto stretta in rapporto all'altezza ed ancor più che nel cranio di La Chapelle; essa nel profilo orizzontale, veduta dalla base, ha la tipica forma a cuneo che caratterizza i neandertaliani. L'orbita grande e bassa ha una inclinazione del piano di apertura sul piano sagittale di 70° come in La Chapelle. Il naso è più alto ed è il più largo fra tutti i crani neandertaliani di cui sono conosciute le dimensioni. Il palato ha la forma ad U come in La Chapelle.

* * *

La distinzione dei neandertaliani si fonda su un complesso di caratteri morfologici specifici dello scheletro e più particolarmente del cranio il quale è stato più largamente studiato. L'accordo sulla discriminazione di tali caratteri non è assoluto, donde una più larga o più ristretta attribuzione di reperti fossili al gruppo. Alcuni infatti comprendono in questo anche il cranio africano della Rhodesia e quelli asiatici di Ngandong e della Palestina, cioè tutte le forme del medio pleistocene extraeuropee ⁽¹⁾. Altri invece esclude anche qualcuna delle forme europee dello stesso periodo geologico. Le ragioni del contrasto si trovano sia nei presupposti teorici che presiedono nella scelta dei caratteri e dei metodi che devono porre in evidenza i caratteri stessi, sia nel criterio diverso dei limiti di variazione entro i quali si può concepire il tipo. Nella craniometria oggi in uso, predomina un puro empirismo nella scelta delle misure, donde incongruenze e contraddizioni sui risultati, intorno ai quali talora gli antropologi si affannano inutilmente. Le ricerche mie sui crani fossili sono fondate sul principio che per l'esatta valutazione morfologica del cranio occorre tener presente che l'impostazione reciproca dei singoli elementi ossei è determinata da fattori meccanici complessi. Le diverse varietà di forme del cranio umano realizzate nel tempo e nello spazio non possono in altra maniera essere interpretate se non come effetto dei diversi dinamismi da cui, volta per volta, il cranio è stato sollecitato. Forma e topografia delle singole ossa del cranio debbono essere concepite nel loro aspetto dinamico. La posizione delle ossa del cranio è la risultante di azioni esercitate su di esse durante la evoluzione e lo sviluppo. Queste azioni sono

⁽¹⁾ Includo tra queste il reperto della Rhodesia, benchè la sua posizione cronologica sia ignota.

rappresentate da forze di intensità e direzione diverse che conducono all'equilibrio definitivo degli elementi ossei. La differente posizione pertanto di ogni osso nei diversi tipi architeturali del cranio si può concepire come la posizione di equilibrio definitiva raggiunta in modo diverso per ogni tipo. Quando si sono precisate le differenze di ordine meccanico che separano determinate forme, si possono anche indagare i limiti di variazione che possono essere compresi entro una forma meccanicamente definitiva. È possibile allora trattare del problema delle affinità delle forme.

Queste premesse stanno a chiarire perchè io separo il Rodesiano e lo Javantropo dai neandertaliani di Europa. L'uno e l'altro presentano evidente una diversa architettura. Ad esempio: nel Rodesiano la cavità cerebrale si evolve in direzione della volta più verso la regione frontale; nel secondo, che pure gli somiglia, l'azione delle forze di espansione della volta sembra diretta verso le regioni parietali posteriori, nei neandertaliani la cavità cerebrale si evolve verso la regione occipitale. E non sono soltanto queste le differenze su cui non mi soffermo oltre. Le forme umane suddette che sono presenti contemporaneamente nello stesso periodo geologico, ma vivono in luoghi distantissimi tra loro, rappresentano ciascuna uno stadio di evoluzione indipendente degli ominidi del pleistocene medio durante il quale il cervello continuava ad aumentare di volume e di potenza. Questi vari tipi ad evoluzione parallela io ho preferito di chiamarli Paleantropi. Essi, benchè siano costruiti secondo piani diversi, hanno una certa somiglianza tra loro per la convergenza di alcuni caratteri. Ma tale convergenza non esprime una identità di caratteri, perchè questi differiscono non soltanto per grado di variabilità, ma per condizioni originarie meccaniche differenti. Così, per ritornare all'esempio su riferito, la stessa capacità cranica correlativa di un corrispondente volume del cervello è stata raggiunta in diverso modo con diverse forme.

Ma anche i paleantropi europei, detti più comunemente neandertaliani, non sono tutti simili. Essi si differenziano tra loro in varietà diverse se non in specie diverse. Fin dalla scoperta del primo cranio di Saccopastore io dimostrai come questo si avvicini di più al cranio di Gibraltar, da cui si separa per qualche particolare, differenziandosi più specialmente dagli altri neandertaliani conosciuti, sì che fui indotto a considerare Gibraltar e Saccopastore come esponenti di varietà mediterranee del gruppo. Oggi la fortunata scoperta del Circeo ci ha fornito un tipo che si separa alquanto da quello di Saccopastore, pure avendo in comune con questo un insieme di caratteri per i quali e l'uno e l'altro si possono ritenere affini. Sono caratteri comuni ad essi, come a tutti i reperi neandertaliani europei, la platicefalia, il contorno orizzontale birsoidale, la sezione lenticolare della cavità cerebrale, la espansione estrema ipolambdica della curva parietale bregma-asterion, la presenza di ossi-

cini fontanellari lambdatici, l'aspetto tubuliforme del timpanico, il toro sopraorbitario, la grande dimensione della faccia (macroprosopia) assoluta e relativa, la forma a cuneo della faccia nel profilo orizzontale (sfenoprosopia) con assenza di fosse canine, l'ortognatismo nel profilo verticale, le orbite voluminose (macroconchia) il naso larghissimo (euriorinia) e sporgente (prorinia). Ma i crani di Saccopastore e del Circeo si differenziano per speciali caratteri. Molto piccola è la capacità cranica in Saccopastore, assai grande nel Circeo; la differenza del volume encefalico tra l'uno e l'altro si può calcolare superiore a cmc. 350. Saccopastore I è bassissimo, la sua platicefalia non è fino ad ora raggiunta da nessun cranio umano fossile conosciuto. Saccopastore ha una forte flessione della base, il clivo è molto raddrizzato ed il piano sfenoidale è fortemente inclinato innanzi, nel Circeiano il clivo è più inclinato ed il piano sfenoidale è orizzontale. In Saccopastore l'angolo frontale è più grande, cioè la fronte si innalza di più e la curva occipitale nel piano mediano è più armonica, cioè non presenta il cuneo che si osserva nel Circeo. In Saccopastore la curva della sezione frontale della faccia a livello del margine orbitario esterno ha una diversa inflessione del mascellare che nel Circeo, e la curva della sezione orizzontale sottoorbitaria della faccia si inflette dolcemente, mentre nel Circeo si inflette più profondamente. In Saccopastore l'arcata alveolare è a ferro di cavallo, nel Circeiano è ad U.

I caratteri dimensionali e morfologici del cranio del Circeo per i quali questo si distacca da quello di Saccopastore, sono comuni ai crani neandertaliani a grande capacità attribuiti, come il Circeiano, all'ultimo glaciale o Würm. La simiglianza di questi reperti che provengono da un esteso territorio dell'Europa occidentale (dal mare del Nord al Mediterraneo) si manifesta in tanti particolari quali di rado si trovano in serie numerose di crani moderni. Tale uniformità dimostra che nel glaciale vivevano forme che avevano raggiunto, per riduzione della variabilità, un grado di fissità estrema che preludeva alla loro estinzione, venendo a mancare quegli adattamenti necessari alle nuove condizioni di esistenza che si costituivano al chiudersi del pleistocene medio. Queste forme appartengono ai neandertaliani propriamente detti perchè di essi fa parte la calotta di Neandertal. I neandertaliani tipici del glaciale possiedono caratteri che apparvero nel gruppo dei paleantropi mediopleistocenici al finire della loro evoluzione nello stato di paracme o declino e rappresentati da accrescimenti terminali che portano ad una definitiva sistemazione architeturale specifica del cranio del gruppo. Il cervello si è accresciuto enormemente raggiungendo volumi che sono superiori anche alla media di quelli di razze umane meglio fornite ed il cranio lo ha seguito con speciali sviluppi della ossificazione che stanno a testimoniare che questa è ritardata e non si svolge armonicamente con l'evoluzione cerebrale (ossificazioni accessorie fontanellari).

L'uomo di Saccopastore possiede una combinazione di caratteri di diverso valore nella scala evolutiva e cioè alcuni di essi sono primitivi come l'estrema platicefalia accompagnata da piccola capacità, altri sono avanzati come la flessione notevole della base considerata come la condizione meccanica più favorevole per l'atteggiamento eretto per cui si pone vicino a fanerantropi più progrediti a volta elevata e sopraelevata.

Si deve ammettere che nei diversi paleantropi l'evoluzione del cervello ha raggiunto gradi diversi e si è svolta in un periodo di tempo differente per ciascuno di essi. Il processo evolutivo si è manifestato diversamente per i differenti rami, in alcuni più celaramente, in altri più lentamente mentre tutti gli altri attributi umani si andavano organizzando correlativamente ciascuno con un proprio ritmo, che in un ramo risultava più lento, in altri più accelerato rispetto al ritmo di evoluzione cerebrale. Le modificazioni simultanee con adattazioni reciproche si sono svolte in campi di variazioni differenti così che l'evoluzione dei vari paleantropi fu politipica, seguendo un ordine compatibile più o meno con l'utilità funzionale che veniva a determinarsi con le nuove modificazioni. Nell'interglaciale esisteva un esteso polimorfismo della grande stirpe dei paleantropi europei (neandertaliani nel senso più comunemente usato) che è rappresentato da più rami. Un certo numero di caratteri o tendenze potenzialmente esistenti tutte nel tipo si sono tradotte in atto più presto e più completamente in un ramo, più tardi e più lentamente in un altro. La regolazione dello sviluppo dei sistemi e degli organi in un processo di evoluzione e quindi di trasformazione della specie non si determina secondo una assoluta sincrona perfetta correlazione degli organi stessi, perchè l'ordine secondo il quale la direzione di sviluppo della evoluzione si effettua non segue una linea predeterminata. Architettura cranica adattata all'atteggiamento eretto ed aumento della capacità cranica per sviluppo cerebrale sono condizioni essenziali del cranio umano che sono raggiunte in vario modo ed in tempo diverso con una sistemazione correlativa adeguata. Così si spiega che in diversi rami si presenti, come si dice, una diversa combinazione di caratteri primitivi ed avanzati. Questo insegnano i reperti dei paleantropi italici laziali.

L'Italia nella regione Laziale ha fornito con i reperti di Saccopastore e del Circeo la documentazione della esistenza di forme diverse dei paleantropi europei appartenenti ad una età differente. L'uomo di Saccopastore è un uomo dell'interglaciale, l'uomo del Circeo è un uomo del glaciale. Sono ambedue oggi scomparsi, appartengono cioè a forme estinte. Ma di esse una, quella neandertaliana tipica circeiana, si estingue verosimilmente senza continuità diretta con i fanerantropi, l'altra, quella di Saccopastore, per quanto per alcuni suoi caratteri e per la sua età risulti più primitiva, è più vicina alla linea evolutiva dei fanerantropi. Se una qualche

relazione genetica tra paleantropi e fanerantropi si vuole ammettere, il legame ed una continuità si può concepire con il tipo Saccopastore.

Si discute se al quaternario medio debba attribuirsi un altro reperto umano, una calotta trovata nel 1867 insieme con una punta musteriana nella contrada dell'Olmo presso Arezzo. Essa appartarrebbe ad uno strato di argille quaternarie con elefante antico e rinoceronte di Merk. Le condizioni in cui avvenne la scoperta e l'ultima versione pubblicata dal COCCHI, per il quale il reperto dovrebbe riputarsi contemporaneo dei depositi che chiusero il pleistocene, ci lasciano nella incertezza sulla determinazione cronologica e ci inducono ad ammettere, con le debite riserve, la sua appartenenza ai limiti del pleistocene medio con il superiore. Il cranio dell'Olmo, che ricorda nel complesso le forme umane attuali, è dolicocefalo, con volta pianeggiante, fronte innalzata e dritta e si accosta per tali caratteri al cranio di Camargo dell'aurignaciano spagnuolo. Ammessa la sua autenticità cronologica, il cranio dell'Olmo certo rappresenterebbe uno dei reperti più arcaici dei fanerantropi di Europa e proverebbe la loro esistenza contemporanea con l'uomo di Neandertal. I problemi che da esso vengono suscitati sono tali che richiedono nuove e più sicure testimonianze, pur ritenendo fondata l'opinione che i fanerantropi siano presenti prima della scomparsa dei paleantropi.

Mentre da prima sembrava che la nostra penisola avesse avuto una funzione secondaria nelle origini e nello sviluppo delle stirpi più arcaiche che hanno abitato l'Europa, quasi che fosse stata totalmente fuori o alla periferia delle più primitive correnti umane, ora essa risulta chiaramente uno dei centri delle medesime, poichè i suoi primi abitanti vissero in un momento nel quale non era neppure raggiunta la costituzione definitiva geologica e geografica d'Italia. I neandertaliani, che per le prime scoperte sembravano accantonati in una limitata regione di Europa, per le recenti scoperte di questo ultimo decennio ci appaiono ora costituiti da varietà diverse più o meno affini, le quali si estendevano in tutto il bacino del Mediterraneo. L'Italia, immersa nel mezzo di questo mare, cominciò ad esercitare allora, fin dal primo apparire delle più antiche stirpi di Europa, quella funzione di centro di formazione e di attrazione delle genti cui era destinata per la sua posizione geografica e per le sue condizioni ambientali, che andò sempre più sviluppandosi nelle età che seguirono e che culminò nei periodi storici. Con questa funzione essa servì di ponte e di stazione per nuove evoluzioni somatiche e culturali degli uomini che si avviavano alla conquista delle terre di Europa.

NOTE E COMUNICAZIONI

Matematica. — *Equazione di Poisson e problema generalizzato di Dirichlet.* Nota di GIANFRANCO CIMMINO, presentata ⁽¹⁾ da MAURO PICONE, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

In una mia recente Memoria ⁽²⁾ ho esposto un metodo del tutto nuovo, per la dimostrazione dell'esistenza della soluzione nel problema di DIRICHLET relativo alle equazioni lineari alle derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico $Lu = f$.

Soltanto a titolo di metodo numerico d'approssimazione della soluzione, ove si presupponga già l'esistenza di questa, era stato usato, prima che nella detta mia Memoria, il procedimento consistente nella costruzione di una successione di funzioni $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(v)}, \dots$, tali che $Lu^{(v)}$ converga in media verso f , mentre i valori al contorno di $u^{(v)}$ convergano in media verso i valori al contorno φ assegnati per la u ⁽³⁾. Questo procedimento trova il suo naturale campo di applicazione, ove si supponga che $|\varphi|^p$ e $|f|^q$ siano sommabili, con p e q (esponenti relativi alle adottate definizioni di convergenza in media rispettivamente sul contorno e nell'interno del campo) non inferiori all'unità.

Si è condotti, così, allo studio del problema di DIRICHLET con dati al contorno discontinui, problema nel quale, per il caso particolare delle funzioni armoniche, risultati di grande generalità sono stati conseguiti, nell'ultimo decennio, da alcuni matematici americani ⁽⁴⁾, per mezzo di una adeguata estensione della teoria del potenziale di doppio strato.

⁽¹⁾ Nell'Adunanza del 19 gennaio 1940-XVIII.

⁽²⁾ G. CIMMINO, *Nuovo tipo di condizione e nuovo metodo di trattazione per il problema generalizzato di Dirichlet.* « Rend. del Circ. Mat. di Palermo », to. LXI (1937), pagg. 177-221.

⁽³⁾ M. PICONE, *Sul metodo delle minime potenze ponderate e sul metodo di Ritz per il calcolo approssimato nei problemi della Fisica Matematica.* « Rend. del Circ. Mat. di Palermo » to. LII (1928), pagg. 225-253.

⁽⁴⁾ G. C. EVANS and E. R. C. MILES, *Potentials of general masses in single and double layers. The relative boundary value problems.* « Amer. Journ. of Math. », vol. LIII (1931), pagg. 493-516. Altre notizie bibliografiche si trovano in G. C.

La prima difficoltà che si presenta in tale problema è quella di stabilire un opportuno teorema di unicità. Infatti, essendo i valori al contorno discontinui, in generale non limitati, e, di più, definiti a meno di un insieme di misura nulla, la soluzione che si ricerca non potrà assumerli che quasi dappertutto sul contorno stesso, e non sarà, in generale, limitata. Ora, sotto queste condizioni, è ben noto che il teorema di unicità non sussiste.

Nei lavori citati nella nota ⁽⁴⁾ della pag. prec., il teorema di unicità è stabilito solo limitatamente al campo delle funzioni armoniche rappresentabili mediante un potenziale generalizzato di doppio strato, e va notato che tale rappresentabilità implica certe ipotesi di regolarità sul contorno ⁽¹⁾; inoltre, non si suppone soltanto che la funzione armonica u assuma quasi dappertutto i valori assegnati al contorno, ma che essa li assuma in un senso generalizzato, convenientemente definito.

Nella teoria da me svolta, si impone alla soluzione u di assumere in media i valori φ prescritti sulla frontiera dell'insieme aperto A considerato, e precisamente nel senso che, presa una successione di domini interni ad A

$$[1] \quad D_1, D_2, \dots, D_k, \dots,$$

ciascuno contenuto nel successivo, le cui frontiere FD_k siano rappresentate parametricamente tutte rispetto a uno stesso dominio base T e approssimino uniformemente la frontiera di A , detti u_k i valori cui si riduce la u sulla frontiera del dominio D_k , si suppone che le u_k convergano in media di ordine p verso la φ in T .

Nel caso particolare dell'equazione di POISSON $\Delta u = f$ in quante si vogliano variabili, si possono ottenere risultati più precisi che non nel caso dell'equazione generale di tipo ellittico. Tali risultati, che formano l'oggetto di una mia Memoria di prossima pubblicazione, saranno qui rapidamente esposti ⁽²⁾.

1. IDENTITÀ FONDAMENTALE E TEOREMA DI UNICITÀ. — Per il nostro metodo di trattazione del problema generalizzato di DIRICHLET occorrono essenzialmente due strumenti: da una parte, una proprietà di media analoga al teorema della media di GAUSS per le funzioni armoniche, e d'altra

EVANS, *Complements of potential theory* II. « Amer. Journ. of Math. », vol. LV (1933), pagg. 29-49, *Modern methods of analysis in potential theory*. « Bull. of the Amer. Math. Soc. », vol. XLIII (1937), pagg. 481-502.

⁽¹⁾ Si veda particolarmente, per esempio, a pag. 504 e 494 della prima delle Memorie citate nella nota ⁽⁴⁾ della pag. precedente.

⁽²⁾ Sull'equazione di POISSON, si veda anche G. C. EVANS, *Discontinuous boundary value problems of the first kind for Poisson's equation*. « Amer. Journ. of Math. », vol. LI (1929), pagg. 1-18.

parte una identità riguardante l'integrale, esteso alla frontiera di un dominio interno ad A , del prodotto di $|u|^p$ per una opportuna *funzione peso*, identità che assicura una certa regolarità nel comportamento del detto integrale, al variare del dominio in modo che la sua frontiera si approssimi a quella di A .

Questa identità si ottiene alla maniera seguente: costruita una famiglia di domini $D(t)$, dipendenti da un parametro t variabile in un intorno destro dello zero, ciascuno dei quali risulti interno a tutti quelli corrispondenti a valori più piccoli del parametro, con la condizione che, per una certa successione t_1, t_2, \dots tendente a zero di valori di t , $D(t)$ si riduca ordinatamente ai domini della successione [1]; riferita la frontiera di ciascun $D(t)$ a un sistema di parametri s_1, s_2, \dots, s_{n-1} con uno stesso dominio base T ; indicata con $P(s_1, \dots, s_{n-1}, t)$ la suddetta funzione peso; si calcola la derivata

$$[2] \quad \frac{d}{dt} \int_T P(s_1, \dots, s_{n-1}, t) |u(x_1(s_1, \dots, s_{n-1}, t), \dots, x_n(s_1, \dots, s_{n-1}, t))|^p dt;$$

sotto opportune ipotesi per i domini $D(t)$ e per le funzioni $x_i(s_1, \dots, s_{n-1}, t)$, che forniscono le rappresentazioni parametriche delle frontiere di essi, si trova che la derivata in esame, se la u è continua e dotata di derivate parziali prime assolutamente continue, ammette un'espressione del tipo

$$[3] \quad \int_T Q \cdot |u|^p ds_1, \dots, ds_{n-1} - \\ - \int_{D(t)} \left[R \cdot \left\{ \frac{|u|^p}{u} \Delta u + (p-1) |u|^{p-2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial x_i}{\partial u} \right)^2 \right\} + S \cdot |u|^p \right] dx_1, \dots, dx_n,$$

dove Q, R, S sono certe funzioni dipendenti dalla funzione peso P e dalle $x_i(s_1, \dots, s_{n-1}, t)$.

Come prima conseguenza della nostra identità fondamentale, si trova il teorema di unicità:

Una funzione u armonica in A , nulla in media su FA , è nulla identicamente in A .

Ciò si ottiene, purchè, Q, R, S verifichino certe limitazioni, che possono rendersi soddisfatte in ipotesi molto larghe sull'insieme A ; tali ipotesi non rientrano, per esempio, in quelle occorrenti per la rappresentabilità di una funzione armonica in A mediante un potenziale generalizzato di doppio strato ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Nel nostro teorema di unicità, non è necessario, per esempio, supporre che la normale alla frontiera debba variare con continuità; cfr. la nota ⁽¹⁾ della pag. precedente.

2. PROPRIETÀ DI MEDIA E RELATIVA INVERSIONE. — La proprietà di media, cui abbiamo accennato poc'anzi, è ben nota, nel caso particolare dell'equazione di POISSON ⁽¹⁾. Detto $S(P, r)$ il dominio sferico di centro P e raggio r , essa può scriversi, supponendo che sia $n \geq 3$,

$$[4] \quad u(P) = \frac{n!!}{2^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \pi^{\left[\frac{n}{2}\right]} r^n} \int_{S(P, r)} \left[u(Q) - \frac{r^2}{n} \left(\frac{r^{n-2} - P\bar{Q}^{n-2}}{(n-2)P\bar{Q}^{n-2}} - \frac{r^2 - P\bar{Q}^2}{2r^2} \right) \Delta u(Q) \right] dQ.$$

Il campo naturale di validità di questa formola è quello delle funzioni $u(P)$ continue e dotate di derivate parziali prime assolutamente continue, con $|\Delta u|^q$ sommabile, per un esponente $q > \frac{n}{2}$.

Se poi $|\Delta u|^q$ riesce sommabile anche per un esponente $q > n$, allora dalla [4] si può ricavare, per derivazione, una formola analoga, esprimente il valore della derivata di u nel punto P , secondo una qualsiasi direzione, mediante i valori di u medesima e di Δu , nei punti di un qualsiasi dominio sferico avente il centro in P .

Si può dimostrare infine, con un'ulteriore derivazione, il seguente teorema:

Nell'ipotesi che: 1) $u(P)$ sia continua e dotata di derivate parziali prime assolutamente continue; 2) $|\Delta u|^q$ sia sommabile, per $q > n$; 3) il Δu esista nel punto P (cioè esistano in P le derivate parziali seconde di u rispetto a ciascuna delle variabili) e verifichi la condizione di HÖLDER

$$|\Delta u(Q) - \Delta u(P)| < H \cdot P\bar{Q}^h,$$

per due certe costanti positive H ed h e per Q quasi dappertutto in un intorno di P , si può affermare che nel punto P esisteranno anche le derivate parziali seconde miste di u .

Per le derivate seconde di u nel punto P , secondo una qualsiasi coppia di direzioni, si ha pure, nelle ipotesi del teorema enunciato, una formola relativa al dominio sferico $S(P, r)$, connessa con la proprietà di media [4].

I precedenti risultati a proposito della proprietà di media trovano, in certo senso, i loro inversi, nel seguente enunciato:

Nell'ipotesi che: 1) u ed f siano due funzioni sommabili in A ; 2) per ogni dominio sferico $S(P, r)$ contenuto in A , risulti

$$[5] \quad u(P) = \frac{n!!}{2^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \pi^{\left[\frac{n}{2}\right]} r^n} \int_{S(P, r)} \left[u(Q) - \frac{r^2}{n} \left(\frac{r^{n-2} - P\bar{Q}^{n-2}}{(n-2)P\bar{Q}^{n-2}} - \frac{r^2 - P\bar{Q}^2}{2r^2} \right) f(Q) \right] dQ,$$

⁽¹⁾ Questa proprietà di media è caso particolare di quella data in G. CIMMINO, *Su una proprietà di media relativa alle equazioni lineari alle derivate parziali di tipo ellittico del secondo ordine.* « Rend. Sem. Mat. della R. Università di Roma », s. IV, vol. I (1936), pp. 304-309.

si può affermare che: 1) se $|f|^q$ è sommabile per $q > \frac{n}{2}$, la u verifica una condizione di HÖLDER, di esponente uguale al minore dei due numeri 1 e $2 - \frac{n}{q}$, uniformemente in ogni dominio D contenuto in A ; 2) se $|f|^q$ è sommabile anche per $q > n$, la u è dotata di derivate parziali prime verificanti una condizione di HÖLDER di esponente $1 - \frac{n}{q}$, uniformemente in ogni dominio D contenuto in A , e l'equazione $\Delta u = f$ vale quasi dappertutto in A ; 3) se, di più, la f è definita nel punto P di A e se, per due certe costanti positive H ed h e per Q quasi dappertutto in un intorno di P , riesce verificata la condizione di HÖLDER

$$|f(Q) - f(P)| < H \cdot \bar{PQ}^h,$$

tutte le derivate parziali seconde della u esistono nel punto P , ed è $\Delta u(P) = f(P)$.

3. TEOREMA DI CONVERGENZA. — L'identità fondamentale e la proprietà di media, di cui ora si è parlato, sono i soli elementi che occorrono, per la dimostrazione del seguente teorema, che mi sembra presenti un notevole interesse anche per se stesso, indipendentemente dallo scopo cui esso deve qui servire, che è quello di dimostrare l'esistenza della soluzione nel problema generalizzato di DIRICHLET.

Nell'ipotesi che: 1) $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(v)}, \dots$ sia una successione di funzioni continue e dotate di derivate parziali prime assolutamente continue in A ; 2) ciascuna $u^{(v)}$ assuma in media su FA certi valori $\varphi^{(v)}$, con $\varphi^{(v)p}$ sommabile in T , per un certo $p > 1$; 3) le $|\Delta u^{(v)}|^q$ e le $|u^{(v)}|^{q'}$ siano sommabili in A , per certi q, q' , con $q > 1, q' > 1, q' > q \frac{p-1}{q-1}$; 4) esistano due funzioni $\varphi(s_1, \dots, s_{n-1})$ ed $f(x_1, \dots, x_n)$, con $|\varphi|^p$ e $|f|^q$ sommabili in T e in A rispettivamente, tali che riesca

$$[6] \quad \begin{cases} \lim_{v \rightarrow \infty} \int_T |\varphi^{(v)} - \varphi|^p ds_1, \dots, ds_{n-1} = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A |\Delta u^{(v)} - f|^q dx_1, \dots, dx_n = 0, \end{cases}$$

si può affermare che: 1) se è $q > \frac{n}{2}$, le $u^{(v)}$ convergono uniformemente in ogni insieme chiuso contenuto in A , verso una funzione u assumente in media su FA i valori φ , verificante, per ogni dominio sferico $S(P, r)$ contenuto in A , la [5], e tale che $|u|^{q'}$ risulta sommabile in A ; 2) se è $q > n$, anche le derivate parziali prime della $u^{(v)}$ convergono, uniformemente in ogni

insieme chiuso contenuto in A , verso le corrispondenti derivate della u , ed è verificata, quasi dappertutto in A , l'equazione $\Delta u = f$.

Detto Σ_{pq} lo spazio funzionale delle coppie $\{\varphi, f\}$ costituite da una funzione φ di p -ma potenza sommabile in T e da una f di q -ma potenza sommabile in A , e Σ'_{pq} quello delle funzioni u , convergenti in media di ordine p su FA , continue e dotate di derivate parziali prime assolutamente continue in A , tali infine che $|\Delta u|^q$ e $|u|^q$ siano sommabili in A , per un fissato $q > n$ e per qualche q' maggiore del più grande dei due numeri 1 e $q \frac{p-1}{q-1}$, ad ogni punto $u(x_1, \dots, x_n)$ di Σ'_{pq} si coordinerà un punto $\{u(s_1, \dots, s_{n-1}), \Delta u(x_1, \dots, x_n)\}$ di Σ_{pq} .

Fissiamo in Σ_{pq} una metrica, assumendo come *norma* della coppia $\{\varphi, f\}$ la

$$[7] \quad |\varphi, f| = \left(\int_T |\varphi|^p ds_1, \dots, ds_{n-1} \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_A |f|^q dx_1, \dots, dx_n \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Lo spazio Σ_{pq} risulta *completo*, cioè, data una successione di punti $\{\varphi^{(v)}, f^{(v)}\}$ di Σ_{pq} , convergente secondo la metrica stabilita, vi sarà sempre un punto ben determinato $\{\varphi, f\}$ di Σ_{pq} , verso il quale la successione stessa converge.

Fissiamo anche in Σ'_{pq} una metrica, assumendo come *norma* della $u(x_1, \dots, x_n)$ quella della corrispondente coppia $\{u(s_1, \dots, s_{n-1}), \Delta u(x_1, \dots, x_n)\}$ appartenente a Σ_{pq} . Allora il teorema di convergenza ora enunciato, per $q > n$, prova che anche Σ'_{pq} è completo.

4. TEOREMA DI CHIUSURA E TEOREMA DI ESISTENZA. — Secondo le considerazioni ora svolte, lo spazio lineare metrico completo Σ'_{pq} viene a identificarsi con uno spazio lineare metrico completo contenuto in Σ_{pq} . Si tratta ora di provare che Σ'_{pq} si identifica con l'intero spazio Σ_{pq} . A tal fine, dopo il teorema di convergenza del numero precedente, basterà dimostrare che Σ'_{pq} contiene un insieme Σ' dappertutto denso in Σ_{pq} . E ciò risulterà senz'altro ⁽¹⁾, ove si determini un insieme Σ^* di Σ'_{pq} , che sia *chiuso*, cioè tale che nessun vettore non nullo di $\Sigma \frac{p}{p-1}, \frac{q}{q-1}$ possa essere ortogonale a ogni vettore di Σ^* . A questo scopo risponde il seguente teorema di chiusura:

Se $\varphi(s_1, \dots, s_{n-1})$ ed $f(x_1, \dots, x_n)$ sono tali che $|\varphi|^{\frac{p}{p-1}}$ e $|f|^{\frac{q}{q-1}}$ risultino sommabili in T e in A rispettivamente e che, per ogni funzione

⁽¹⁾ Cfr., p. es., S. BANACH, *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa, 1932, p. 73. Ai termini *chiuso* e *completo* si dà, in questo trattato, un significato diverso da quello qui specificato nel testo.

$u(x_1, \dots, x_n)$, continua in $A + FA$ e dotata di derivate parziali prime uniformemente lipschitziane in A , riesca

$$[8] \quad \int_T \varphi u \, ds_1, \dots, ds_{n-1} + \int_A f \Delta u \, dx_1, \dots, dx_n = 0,$$

dovrà essere $\varphi = 0$, $f = 0$ quasi dappertutto in T e in A rispettivamente.

Come spazio Σ^* dotato della voluta proprietà si può dunque assumere quello delle funzioni $u(x_1, \dots, x_n)$ continue in $A + FA$, dotate di derivate parziali prime uniformemente lipschitziane in A .

La dimostrazione del nostro teorema di chiusura si compendia, nelle sue linee generali, come segue: costruita opportunamente, per ogni punto P_0 di A ed ogni r tale che il dominio sferico $S(P_0, r)$ sia contenuto in A , una certa successione $u^{(v)}(P; P_0, r)$ di funzioni appartenenti a Σ^* , si sostituisce $u^{(v)}(P; P_0, r)$ ad $u(P)$ nella [8], si passa poi al limite per $v \rightarrow \infty$ e si trova che, quasi dappertutto in A , la f deve verificare il teorema della media di GAUSS per le funzioni armoniche, sicchè f coincide quasi dappertutto in A con una funzione armonica \bar{f} . Mediante la stessa successione $u^{(v)}(P; P_0, r)$, ove P_0 ed r non si assoggettino più alla condizione di prima, si trova, col medesimo procedimento, che la \bar{f} deve ridursi identicamente a zero sulla frontiera di A , purchè questa verifichi alcune condizioni di natura molto generale, onde si conclude che f deve esser quasi dappertutto uguale a zero in A , e quindi, in base a [8], per l'arbitrarietà di u , anche φ dev'essere quasi dappertutto uguale a zero in T .

Dal teorema di convergenza e da quello di chiusura discende, come conseguenza immediata, dopo le considerazioni premesse, il seguente teorema di esistenza:

Date a piacere due funzioni $\varphi(s_1, \dots, s_{n-1})$ ed $f(x_1, \dots, x_n)$ tali che $|\varphi|^p$ e $|f|^q$ siano sommabili in T e in A rispettivamente, per $p > 1$, $q > n$ (1), esiste una, ed una sola, funzione $u(x_1, \dots, x_n)$, continua e dotata di derivate parziali prime assolutamente continue in A , assumente in media su FA i valori φ , verificante quasi dappertutto in A l'equazione $\Delta u = f$ e tale che $|u|^{q'}$ riesca sommabile in A , per ogni q' maggiore di 1.

Le ipotesi che, in tutta la teoria di cui abbiamo ora esposti i principali risultati, occorre fare su A , sui domini D_k , le cui frontiere approssi-

(1) Anche per $q \leq n$, purchè sia $q > \frac{n}{2}$, abbiamo un teorema di esistenza;

in tal caso, però bisogna sostituire all'equazione $\Delta u = f$ la proprietà di media [5]. Anche G. C. EVANS, nella Memoria citata nella nota (2) della pag. 2, sostituisce alla condizione che u verifichi quasi dappertutto l'equazione di POISSON un'altra condizione meno restrittiva, partendo, però, da un altro principio.

mano FA per $k \rightarrow \infty$, sulle rappresentazioni parametriche delle frontiere medesime, sono di formulazione piuttosto complicata; ma da alcuni esempi concreti si può rilevare che esse sono di una grande generalità. Mi limiterò a osservare, per esempio, che esse possono comprendere casi, in cui una porzione di FA è composta da una varietà a $n - 1$ dimensioni *aperta* (cioè da una varietà che non è la completa frontiera di nessun dominio chiuso ⁽¹⁾).

Di più, sempre sotto condizioni molto ampie per i domini D_k e per le rappresentazioni parametriche delle frontiere di essi, si avrà che ogni funzione $u(x_1, \dots, x_n)$ dello spazio funzionale Σ^* sopra definito assumerà in media i valori cui essa si riduce su FA , qualunque siano i domini e le rappresentazioni parametriche stesse, sicchè la soluzione u del problema generalizzato di DIRICHLET, della quale abbiamo dimostrato l'esistenza, risulterà indipendente da codesti elementi inerenti alla definizione di convergenza in media della u verso dati valori in FA .

⁽¹⁾ Per il problema ordinario di DIRICHLET, vedansi, a questo proposito, i lavori di C. MIRANDA, *Il teorema di esistenza per il problema di Dirichlet, in un campo privo piano di punti esterni*. « Rend. della R. Acc. di Sc. fis. e mat. di Napoli », ser. 3^a, vol. XXXVIII (1932), pagg. 50-53; *Il problema di Dirichlet, in campi dello spazio privi di punti esterni*. « Ann. di Mat. », ser. 4^a, to. XII (1934), pag. 1-11.

Matematica. — *Su un notevole teorema di confronto e su un teorema di unicità per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie* ⁽¹⁾. Nota di LANDOLINO GIULIANO, presentata ⁽²⁾ da LEONIDA TONELLI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

In una Nota in corso di stampa ⁽³⁾, ho stabilito un teorema di unicità delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali ordinarie che include, come caso particolare, un recente teorema del MCSHANE ⁽⁴⁾; ho quindi mostrato che il teorema da me dato, quando venga presentato in una forma leggermente diversa e, sotto un certo aspetto, un po' meno restrittiva, riducesi, nel caso di una sola equazione, ad un teorema di TONELLI ⁽⁵⁾, del quale esso costituisce pertanto la generalizzazione ai sistemi di equazioni differenziali ordinarie.

Proseguendo in quest'ordine di studi, dò qui un teorema di confronto (che racchiude, in particolare, un altro criterio di unicità) delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali ordinarie. Esso estende una proposizione stabilita dal TONELLI ⁽⁶⁾ per una sola equazione e nella quale è compreso un teorema di BOMPIANI ⁽⁷⁾.

In questa generalizzazione è contenuto, come caso particolare, un teorema di PERRON ⁽⁸⁾ (estensione ai sistemi, sotto ipotesi più larghe, del teorema di BOMPIANI ⁽⁷⁾), nel quale rientra, a sua volta, un criterio di

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel Seminario di Alta Matematica della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

⁽²⁾ Nell'Adunanza del 19 gennaio 1940-XVIII.

⁽³⁾ Nel « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana ».

⁽⁴⁾ E. J. MCSHANE, *On the uniqueness of the solutions of differential equations*. « Bulletin of the American Mathematical Society », Vol. 45, Number 10 (1939), pagg. 755-757.

⁽⁵⁾ L. TONELLI, *Sull'unicità della soluzione di un'equazione differenziale ordinaria*. « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », ser. 6^a, vol. I (1925), pagg. 272-277, in particolare pagg. 272-274.

⁽⁶⁾ Cfr. loc. cit. in ⁽⁵⁾, pagg. 274-277.

⁽⁷⁾ E. BOMPIANI, *Un teorema di confronto ed un teorema di unicità per l'equazione differenziale $y' = f(x, y)$* . « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », ser. 6^a, vol. I (1925), pagg. 298-302.

⁽⁸⁾ O. PERRON, *Ueber Ein- und Mehrdeutigkeit des Integrals eines Systems von Differentialgleichungen*. « Mathematische Annalen », B. 95 (1926), pagg. 98-101.

unicità per i sistemi dato da PERRON stesso ⁽⁹⁾, immediata estensione di quello stabilito da OSGOOD ⁽¹⁰⁾ per una sola equazione. Osservo infine come anche il noto criterio di unicità di LIPSCHITZ (per i sistemi), rientrando in quello di PERRON-OSGOOD, risulti un caso particolare del teorema che qui espongo.

* * *

1. — Supponiamo che le n funzioni reali $f_v(x, y_1, \dots, y_n)$ ($v = 1, \dots, n$) siano definite in un certo campo G dello spazio (x, y_1, \dots, y_n) ad $n + 1$ dimensioni. Detto $P \equiv (\xi, \eta_1, \dots, \eta_n)$ un punto di tale campo, R il rettangolo, appartenente a G :

$$|x - \xi| \leq \alpha \quad |y_v - \eta_v| \leq \beta \quad (v = 1, \dots, n)$$

sia $\bar{P} \equiv (\xi, \bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_n)$ un punto di R distinto da P (o anche coincidente) e avente la sua stessa prima coordinata.

Considerato il sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$[1] \quad y'_v = f_v(x, y_1, \dots, y_n) \quad (v = 1, \dots, n)$$

vogliamo dimostrare il seguente

Teorema: Se $\varphi(x, u)$ è una funzione reale, continua, definita nel campo:

$$\xi \leq x \leq \xi + \alpha, \quad u \leq 2\beta$$

con $\varphi(x, 0) \geq 0$ in tutto $(\xi, \xi + \alpha)$;

se le funzioni f_v verificano le disuguaglianze:

$$[2] \quad (y_v - Y_v) \{f_v(x, y_1, \dots, y_n) - f_v(x, Y_1, \dots, Y_n)\} \leq \\ \leq \text{Max}_{v=1}^n |y_v - Y_v| \varphi(x, \text{Max}_{v=1}^n |y_v - Y_v|) \quad (v = 1, \dots, n)$$

per ogni x di $(\xi, \xi + \alpha)$ ed ogni coppia y_v, Y_v tale che $-\beta \leq Y_v < y_v \leq \beta$ oppure $-\beta \leq y_v < Y_v \leq \beta$ ($v = 1, \dots, n$);

indicato con $u_0(x)$ il massimo integrale uscente dal punto $(\xi, \bar{u} = \text{Max}_{v=1}^n |\eta_v - \bar{\eta}_v|)$ dell'equazione differenziale ordinaria:

$$[3] \quad u' = \varphi(x, u)$$

e supposto $|u_0(x)| < 2\beta$ in tutto $(\xi, \xi + \alpha)$;

(⁹) Cfr. loc. cit. in (⁸), pagg. 100-101.

(¹⁰) W. F. OSGOOD, *Beweis der Existenz einer Lösung der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ ohne Hinzunahme der Cauchy-Lipschitzschen Bedingung*. « Monatshefte für Mathematik und Physik », 9 (1908), pagg. 331-345, in particolare pag. 344.

se

$$[4] \quad \begin{cases} y_1(x), \dots, y_n(x) \\ Y_1(x), \dots, Y_n(x) \end{cases}$$

sono, per tutti gli x di $(\xi, \xi + \alpha)$ due soluzioni del sistema [1] uscenti rispettivamente da P e da \bar{P} e giacenti in R (tali cioè che sia:

$$y_v(\xi) = \eta_v, \quad Y_v(\xi) = \bar{\eta}_v, \quad \xi < x \leq \xi + \alpha, \\ |y_v(x) - \eta_v| \leq \beta, \quad |Y_v(x) - \bar{\eta}_v| \leq \beta \quad (v=1, \dots, n);$$

si ha sempre, per ogni x di $(\xi, \xi + \alpha)$:

$$[5] \quad |y_v(x) - Y_v(x)| \leq u_0(x) \quad (v=1, \dots, n).$$

Se è poi $P \equiv \bar{P}$, $\varphi(x, 0) = 0$ in tutto $(\xi, \xi + \alpha)$ e $u_0(x) \equiv 0$ è il massimo integrale della [3] uscente dal punto $(\xi, 0)$, esiste, al più, una sola soluzione del sistema [1] uscente da P e giacente in R .

Si ponga

$$\varphi(x, u) = \begin{cases} \varphi(\xi, u) & \text{per } x < \xi \\ \varphi(\xi + \alpha, u) & \text{per } x > \xi + \alpha \end{cases}$$

e poi

$$\varphi(x, u) = \begin{cases} \varphi(x, 2\beta) & \text{per } u > 2\beta \\ \varphi(x, -2\beta) & \text{per } u < -2\beta \end{cases}$$

La $\varphi(x, u)$ è così definita in tutto il piano (x, u) e risulta ivi continua. L'equazione differenziale ordinaria:

$$u' = \varphi(x, u) + \varepsilon$$

possiede allora ⁽¹¹⁾, per ogni $\varepsilon > 0$ e minore di un certo $\bar{\varepsilon}$, delle curve integrali $u = u(x, \varepsilon)$ uscenti dal punto (ξ, \bar{u}) ed esistenti in tutto l'intervallo $\xi \leq x \leq \xi + \alpha$ ⁽¹²⁾; è inoltre uniformemente:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x, \varepsilon) = u_0(x)$$

Per dimostrare il teorema enunciato basterà far vedere che è, per $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}$, per tutti gli integrali $u(x, \varepsilon)$ indicati e per ogni x di $(\xi, \xi + \alpha)$:

$$[6] \quad |y_v(x) - Y_v(x)| \leq u(x, \varepsilon) \quad (v=1, \dots, n),$$

da cui si otterranno le [5] quando si faccia tendere ε a zero.

⁽¹¹⁾ Cfr. p. es. E. KAMKE, *Differentialgleichungen reeller Funktionen*. Leipzig, 1930. « Akademische Verlagsgesellschaft M. B. H. », pag. 83, N. 45, Satz 2.

⁽¹²⁾ Il prolungamento della φ in tutto il piano (x, u) ha appunto lo scopo di assicurarci dell'esistenza in tutto $(\xi, \xi + \alpha)$ di tali integrali $u = u(x, \varepsilon)$.

Se ciò non è, ci sarà un ε tale che $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}$ ed un integrale $u(x, \varepsilon)$ esistente in tutto $(\xi, \xi + \alpha)$ non verificante tutte le [6]; esisterà allora un limite inferiore \bar{x} ($\xi \leq \bar{x} < \xi + \alpha$) dei numeri $x \geq \xi$ per i quali qualcuna delle [6] (per l' ε e l' $u(x, \varepsilon)$ indicati) non è vera. Poichè le [6] valgono per $x = \xi$, per la continuità delle $y_v(x)$ e delle $Y_v(x)$, le [6] valgono anche per \bar{x} e deve aversi, per almeno un indice $v = \lambda$:

$$[7] \quad \begin{cases} y_\lambda(\bar{x}) - Y_\lambda(\bar{x}) = u(\bar{x}, \varepsilon) \\ y_\lambda(\bar{x} + h) - Y_\lambda(\bar{x} + h) > u(\bar{x} + h, \varepsilon) \end{cases}$$

oppure:

$$[8] \quad \begin{cases} Y_\lambda(\bar{x}) - y_\lambda(\bar{x}) = u(\bar{x}, \varepsilon) \\ Y_\lambda(\bar{x} + h) - y_\lambda(\bar{x} + h) > u(\bar{x} + h, \varepsilon) \end{cases}$$

per infiniti valori di h positivi tendenti a zero.

Se è $u(\bar{x}, \varepsilon) = 0$, dalle [7] (per fissare le idee, bastando, se valessero le [8], scambiare le y con le Y), essendo allora $y_v(\bar{x}) = Y_v(\bar{x})$ ($v = 1, \dots, n$), si ricava:

$$0 = f_\lambda(\bar{x}, y_1(\bar{x}), \dots, y_n(\bar{x})) - f_\lambda(\bar{x}, Y_1(\bar{x}), \dots, Y_n(\bar{x})) = \\ = y'_\lambda(\bar{x}) - Y'_\lambda(\bar{x}) \geq u'(\bar{x}, \varepsilon) = \varphi(\bar{x}, u(\bar{x}, \varepsilon)) + \varepsilon = \varphi(\bar{x}, 0) + \varepsilon$$

da cui $\varphi(\bar{x}, 0) \leq -\varepsilon < 0$, il che contraddice all'ipotesi che sia, per ogni x di $(\xi, \xi + \alpha)$, $\varphi(x, 0) \geq 0$.

Se è $u(\bar{x}, \varepsilon) > 0$, supposto che valgano le [7] (bastando, se valessero le [8], scambiare, come prima, le y con le Y), si ha:

$$(y_\lambda(\bar{x}) - Y_\lambda(\bar{x})) \{f_\lambda(\bar{x}, y_1(\bar{x}), \dots, y_n(\bar{x})) - f_\lambda(\bar{x}, Y_1(\bar{x}), \dots, Y_n(\bar{x}))\} = \\ = (y_\lambda(\bar{x}) - Y_\lambda(\bar{x})) (y'_\lambda(\bar{x}) - Y'_\lambda(\bar{x})) \geq (y_\lambda(\bar{x}) - Y_\lambda(\bar{x})) u'(\bar{x}, \varepsilon) = \\ = \max_{v=1}^n |y_v(\bar{x}) - Y_v(\bar{x})| \{ \varphi(\bar{x}, u(\bar{x}, \varepsilon)) + \varepsilon \} > \\ > \max_{v=1}^n |y_v(\bar{x}) - Y_v(\bar{x})| \varphi(\bar{x}, \max_{v=1}^n |y_v(\bar{x}) - Y_v(\bar{x})|)$$

il che contraddice alla λ -ma delle disuguaglianze [2]. Dunque le [6] devono valere in tutto $(\xi, \xi + \alpha)$ e la prima parte del teorema enunciato è così provata. Da essa deducesi subito il criterio di unicità espresso nella seconda parte del teorema stesso.

2. - Vale evidentemente un teorema analogo al precedente e relativo alle soluzioni $y_v(x)$ e $Y_v(x)$ ($v = 1, \dots, n$) del sistema [1] contenute in R e giungenti rispettivamente in P e in \bar{P} (per le quali sia cioè

$$\xi - \alpha \leq x \leq \xi, \quad |y_v(x) - \eta_v| \leq \beta, \quad y_v(\xi) = \eta_v \\ \text{e} \quad |Y_v(x) - \bar{\eta}_v| \leq \beta, \quad Y_v(\xi) = \bar{\eta}_v \quad (v = 1, \dots, n)).$$

Basterà sostituire nell'enunciato l'intervallo $(\xi, \xi + \alpha)$ con $(\xi - \alpha, \xi)$, la $\varphi(x, 0) \geq 0$ con la $\varphi(x, 0) \leq 0$ supposta valida in tutto $(\xi - \alpha, \xi)$, le disuguaglianze [2] con le

$$(y_v - Y_v) \{f_v(x, y_1, \dots, y_n) - f_v(x, Y_1, \dots, Y_n)\} \geq \\ \geq \max_{v=1}^n |y_v - Y_v| \varphi(x, \max_{v=1}^n |y_v - Y_v|) \quad (v=1, \dots, n)$$

per ogni x di $(\xi - \alpha, \xi)$ e $-\beta \leq y_v < Y_v \leq \beta$, oppure $-\beta \leq Y_v < y_v \leq \beta$ ($v=1, \dots, n$).

La dimostrazione è perfettamente analoga a quella del teorema del n. 1 mediante la sostituzione di $\varepsilon > 0$ con $\varepsilon < 0$, con gli opportuni cambiamenti di senso nelle disuguaglianze che compaiono nel ragionamento ivi fatto e sostituendo al teorema ricordato nella nota (9) il teorema del n. 45 di pag. 86 del libro ivi citato del КАМКЕ.

3. - Con ragionamento quasi identico a quello del n. 1, con evidenti facili cambiamenti, si provano i due seguenti teoremi, che ci limitiamo quindi ad enunciare:

I. Se:

$$y_1(x), \dots, y_n(x) \\ Y_1(x), \dots, Y_n(x)$$

sono per tutti gli x di $(\xi - \alpha, \xi)$ due soluzioni del sistema [1] contenute in R e giungenti rispettivamente in P e \bar{P} ;

se le ipotesi del teorema del n. 1 valgono nell'intervallo $(\xi - \alpha, \xi)$ invece che in $(\xi, \xi + \alpha)$;

detto $u^*(x)$ l'integrale minimo della [3] giungente nel punto (ξ, η) , è, in tutto $(\xi - \alpha, \xi)$:

$$|y_v(x) - Y_v(x)| \geq u^*(x) \quad (v=1, \dots, n).$$

II. Se

$$y_1(x), \dots, y_n(x) \\ Y_1(x), \dots, Y_n(x)$$

sono per tutti gli x di $(\xi, \xi + \alpha)$ due soluzioni del sistema [1] contenute in R uscenti rispettivamente da P e da \bar{P} ;

se le ipotesi del teorema del n. 2 valgono nell'intervallo $(\xi, \xi + \alpha)$ invece che in $(\xi - \alpha, \xi)$;

detto $u^*(x)$ l'integrale minimo della [3] uscente dal punto (ξ, η) , è, in tutto $(\xi, \xi + \alpha)$:

$$|y_v(x) - Y_v(x)| \geq u^*(x) \quad (v=1, \dots, n).$$

4. - Per $n = 1$ le [2] danno l'unica diseuguaglianza:

$$[2'] \quad (y - Y) \{f(x, y) - f(x, Y)\} \leq |y - Y| \varphi(x, |y - Y|)$$

e se supponiamo $\xi \leq x \leq \xi + \alpha$, $-\beta \leq Y < y \leq \beta$, dalla [2'] segue:

$$[2''] \quad f(x, y) - f(x, Y) \leq \varphi(x, x - Y)$$

per $\xi \leq x \leq \xi + \alpha$ ed ogni coppia y, Y , tale che $-\beta \leq Y < y \leq \beta$. La [2''] unita all'ipotesi $\varphi(x, 0) \geq 0$, $\xi \leq x \leq \xi + \alpha$ equivale all'unica diseuguaglianza che compare nella proposizione di TONELLI⁽⁶⁾. Si ottiene così, se è $P \equiv \bar{P}$, il teorema dato da questo Autore e relativo alle curve integrali dell'equazione differenziale ordinaria $y' = f(x, y)$ uscenti dal punto $P \equiv (\xi, \eta)$ e contenute nel rettangolo $R: |X - \xi| \leq \alpha$, $|y - \eta| \leq \beta$ in cui la $f(x, y)$ è definita.

Un'osservazione analoga vale per il teorema del n. 2, quando si tratti cioè di curve integrali della $y' = f(x, y)$ giungenti in $P \equiv (\xi, \eta)$.

5. - Se alle [2] e alla $\varphi(x, 0) \geq 0$, $\xi \leq x \leq \xi + \alpha$ si sostituiscono le diseuguaglianze più restrittive:

$$[2*] \quad |f_v(x, y_1, \dots, y_n) - f_v(x, Y_1, \dots, Y_n)| \leq \varphi(x, \max_{v=1}^n |y_v - Y_v|)$$

$$(v = 1, \dots, n)$$

essendo $\xi \leq x \leq \xi + \alpha$, $-\beta \leq y_v < Y_v \leq \beta$, oppure $-\beta \leq Y_v < y_v \leq \beta$ ($v = 1, \dots, n$), si ottiene, in particolare dal teorema del n. 1, il teorema di PERRON-BOMPIANI⁽⁸⁾, quando sia inoltre $P \equiv \bar{P}$.

Per le [2*] è, infatti, certamente $\varphi(x, 0) \geq 0$ per ogni x di $(\xi, \xi + \alpha)$ e inoltre

$$\begin{aligned} & (y_v - Y_v) \{f_v(x, y_1, \dots, y_n) - f_v(x, Y_1, \dots, Y_n)\} \leq \\ & \leq (y_v - Y_v) |f_v(x, y_1, \dots, y_n) - f_v(x, Y_1, \dots, Y_n)| \leq \\ & \leq \max_{v=1}^n |y_v - Y_v| \varphi(x, \max_{v=1}^n |y_v - Y_v|) \quad (v = 1, \dots, n), \end{aligned}$$

se è $\xi \leq x \leq \xi + \alpha$, $-\beta \leq y_v < Y_v \leq \beta$, oppure $-\beta \leq Y_v < y_v \leq \beta$ ($v = 1, \dots, n$).

Osservazione analoga vale per il teorema del n. 2 quando si tratti cioè di curve integrali giungenti in $P \equiv \bar{P}$ e contenute in R .

6. - Il criterio di unicità dato da PERRON⁽⁹⁾ per i sistemi, immediata estensione di quello di OSGOOD⁽¹⁰⁾ per una sola equazione, risulta conte-

nuto ⁽¹³⁾, come il PERRON stesso ha osservato, nel teorema di PERRON-BOMPIANI, mentre nel criterio di PERRON-OSGOOD rientra, a sua volta, quello di LIPSCHITZ ⁽¹⁴⁾. Per il n. 5 segue allora che ambedue tali criteri di unicità (di PERRON-OSGOOD e di LIPSCHITZ) sono contenuti nel teorema del n. 1 o in quello del n. 2, a seconda che si tratti di soluzioni del sistema [1] uscenti da P o giungenti in P .

⁽¹³⁾ Basta porre, nelle [2*] n. 5: $\varphi(x, u) = \omega(u)$ essendo $\omega(u) > 0$ per ogni $u > 0$, $\omega(0) = 0$ e $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^{u_0} \frac{du}{\omega(u)} = +\infty$ se $u_0 > \varepsilon > 0$. Sono infatti allora soddisfatte tutte le ipotesi del teorema che assicurano dell'unicità della soluzione del sistema [1].

⁽¹⁴⁾ Basta porre (vedi nota precedente) $\omega(u) = Ku = K \max_{v=1}^n |y_v - Y_v| \leq \leq K \sqrt{(y_1 - Y_1)^2 + \dots + (y_n - Y_n)^2}$, essendo K una costante positiva.

Matematica. — *Invarianti ed eminvarianti lineari dei tensori.* Nota ⁽¹⁾ di UMBERTO CISOTTI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Invariante lineare di un tensore, nello spazio ordinario, è a dirsi una combinazione lineare delle componenti cartesiane del tensore che rimane invariata di fronte a un qualsiasi cambiamento del sistema cartesiano di riferimento.

Eminvariante lineare di un tensore è invece una combinazione lineare delle sue componenti cartesiane che rimane invariata passando da un sistema cartesiano di riferimento ad altro ad esso *congruente*, muta solo di segno se i due riferimenti sono *simmetrici*,

Nel caso in cui tutte le singole componenti di un tensore sono invariantive si ha l'*isotropia* del tensore ⁽²⁾; quando invece le singole componenti sono eminvarianti il tensore è *emisotroppo* ⁽³⁾. Ho fatto constatare ⁽⁴⁾ che non esistono tensori isotropi dispari nè tensori emisotropi pari.

Nella presente Nota metto in rilievo il procedimento, che reputo il più semplice e sicuro, di ricerca di tutti gli invarianti o gli eminvarianti lineari di un dato tensore; in particolare si può parlare di invarianti lineari per i soli tensori pari mentre gli eminvarianti sono riservati ai tensori dispari. Ritrovato, in particolare, l'unico invariante lineare, ben noto, di un tensore doppio, metto in evidenza: i tre invarianti lineari distinti (linearmente indipendenti) di un tensore quadruplo; l'unico eminvariante lineare di un tensore triplo; e i sei eminvarianti lineari distinti di un tensore quintuplo. La Nota si chiude con alcuni esempi illustrativi. Le conclusioni sono facilmente estensibili anche a varietà riemanniane.

1. INVARIANTI LINEARI DI TENSORI PARI. — Il tensore doppio simmetrico di componenti cartesiane

$$[1] \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{per } i \neq k \\ 1 & \text{per } i = k \end{cases} \quad (i, k = 1, 2, 3),$$

⁽¹⁾ Presentata nell'Adunanza del 19 gennaio 1940—XVIII.

⁽²⁾ CISOTTI, *Tensori isotropi*. « Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei », vol. XI (1° sem. 1930—VIII), pag. 727. Cfr. altresì CISOTTI, *Meccanica razionale*, Terza ediz., Libreria Editrice Politecnica, Milano (1939—XVII), pag. 364.

⁽³⁾ CISOTTI, *Tensori isotropi e tensori emisotropi*. « Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei », vol. XI (1° sem. 1930—VIII), pag. 917. Cfr. pure *Mecc. raz.*, loco cit.

⁽⁴⁾ Loci citati.

detto *tensore fondamentale* o *tensore unitario* ⁽¹⁾ è isotropo; così pure è isotropo il tensore $(2m)^{plo}$ di componenti cartesiane

$$[2] \quad \delta_{i_1 k_1} \cdots \delta_{i_m k_m},$$

che è la potenza m^{ma} di $[1]$ ⁽²⁾. La introduzione del tensore $[2]$ rende agevole la ricerca degli *invarianti lineari* dei tensori pari, come ora vedremo. Sieno

$$[3] \quad T_{i_1 \cdots i_m k_1 \cdots k_m}$$

le componenti cartesiane di un tensore $(2m)^{plo}$; il prodotto scalare ⁽³⁾ dei due tensori $[3]$ e $[2]$ dà luogo all'*invariante*

$$[4] \quad T_{i_1 \cdots i_m k_1 \cdots k_m} \cdot \delta_{i_1 k_1} \cdots \delta_{i_m k_m} \quad (4)$$

manifestamente *lineare*. Si avranno tanti *invarianti lineari* distinti $[4]$ quante sono le potenze m^{me} distinte $[2]$ del tensore fondamentale, cioè ⁽⁵⁾

$$[5] \quad N = \sum_k^m \left[\binom{2m}{2k} - \frac{1}{2} \binom{2m}{2k-1} \right] \binom{2k}{k}.$$

Così si ha rispettivamente:

$$m = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

$$N = 1, 1, 3, 15, 91, 603.$$

Per $m = 1$, cioè per un tensore doppio di componenti cartesiane T_{ik} , è $N = 1$; si ha l'unico invariante lineare, ben noto:

$$\sum_{ik}^3 T_{ik} \delta_{ik} = \sum_i^3 T_{ii}.$$

2. I TRE INVARIANTI LINEARI DI UN TENSORE QUADRUPLO. - Per $m = 2$ si ha un tensore quadruplo; sieno

$$T_{ikjh}$$

⁽¹⁾ Loco cit., *Mecc. raz.*, pag. 337.

⁽²⁾ Loco ultimo cit., pag. 353.

⁽³⁾ Loco ultimo cit., pag. 343.

⁽⁴⁾ Seguendo l'uso invalso, invero tipograficamente comodo, sottintendiamo il simbolo di sommatoria relativo a tutti gli indici comuni, quando ciò non pregiudichi la chiarezza.

⁽⁵⁾ RACAH, *Determinazione del numero dei tensori isotropi indipendenti di rango n*, « Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei », vol. XVII (1° sem. 1933-XI), pag. 389.

le sue componenti cartesiane. Eseguendo il prodotto scalare di questo tensore con ciascuno dei tre seguenti quadrati distinti ⁽¹⁾ del tensore fondamentale:

$$\delta_{ik} \cdot \delta_{jh} \quad , \quad \delta_{ij} \cdot \delta_{kh} \quad , \quad \delta_{ih} \cdot \delta_{kj}$$

si ottengono i tre seguenti *invarianti lineari*:

$$[6] \quad \sum_1^3 T_{iik} \quad , \quad \sum_1^3 T_{ikik} \quad , \quad \sum_1^3 T_{ikki}.$$

3. EMINVARIANTI LINEARI DI TENSORI DISPARI. — Il tensore triplo di componenti cartesiane

$$[7] \quad \varepsilon_{ihl} = \begin{cases} 0 & , \text{ se } i, h, l \text{ non sono distinti,} \\ (-1)^c & , \text{ se } i, h, l \text{ sono distinti,} \end{cases}$$

designando c la classe della permutazione i, h, l rispetto alla fondamentale 1, 2, 3, per cui risulta:

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1 \quad , \quad \varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1,$$

è emisimmetrico ed *emisotropo* ⁽²⁾. Se si fa il prodotto ⁽³⁾ del tensore [7] colla potenza $(m-1)^{ma}$ del tensore fondamentale, di componenti cartesiane

$$\delta_{i_1 h_1} \dots \delta_{i_{m-1} h_{m-1}},$$

si ottiene il tensore $(2m+1)^{plo}$ di componenti cartesiane

$$[8] \quad \varepsilon_{ihl} \cdot \delta_{i_1 h_1} \dots \delta_{i_{m-1} h_{m-1}},$$

manifestamente *emisotropo*. Mediante questi tensori emisotropi si possono facilmente mettere in rilievo gli *eminvarianti lineari* dei tensori dispari.

Sieno, infatti,

$$[9] \quad T_{ihl i_1 \dots i_{m-1} h_1 \dots h_{m-1}}$$

le componenti cartesiane di un tensore $(2m+1)^{plo}$. Eseguendo il prodotto scalare dei due tensori [8] e [9] si ottiene la seguente combinazione *lineare* delle componenti che precedono:

$$[10] \quad T_{ihl i_1 \dots i_{m-1} h_1 \dots h_{m-1}} \cdot \varepsilon_{ihl} \cdot \delta_{i_1 h_1} \dots \delta_{i_{m-1} h_{m-1}},$$

manifestamente *eminvariante* per la emisotropia di [8].

⁽¹⁾ CISOTTI, *Tensori quadrupli isotropi*. « Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei », vol. XI (1° sem. 1930-VIII), pag. 1055.

⁽²⁾ Loco cit., *Mecc. raz.*, pag. 340.

⁽³⁾ Loco ultimo cit., pag. 350.

Si otterranno tanti *eminvarianti lineari* [10] distinti, quanti sono i prodotti distinti [8], cioè ⁽¹⁾

$$[11] \quad N' = \sum_k^{m+1} \left[\binom{2m+1}{k} - \frac{1}{2} \binom{2m+1}{2k+1} \right] \binom{2k}{k}.$$

Si ha così ordinatamente:

$$m = 0, 1, 2, 3, 4,$$

$$N' = 0, 1, 6, 36, 232.$$

4. L'EMINVARIANTE LINEARE DI UN TENSORE TRIPLO. — Per un tensore triplo è $m = 1$ e $N' = 1$, si ha dunque l'unico *eminvariante lineare*

$$T_{ihl} \cdot \varepsilon_{ihl} = T_{123} - T_{132} + T_{231} - T_{213} + T_{312} - T_{321}.$$

5. I SEI EMINVARIANTI LINEARI DI UN TENSORE QUINTUPLO. — Se è $m = 2$, risulta $N' = 6$; si hanno dunque sei *eminvarianti lineari*: essi si ottengono eseguendo i prodotti scalari del tensore quintuplo di componenti cartesiane

$$[12] \quad T_{ikjhl}$$

con ciascuno dei seguenti sei prodotti distinti ⁽²⁾ di componenti

$$\delta_{hl} \cdot \varepsilon_{ikj} \quad , \quad \delta_{jl} \cdot \varepsilon_{ikh} \quad , \quad \delta_{jh} \cdot \varepsilon_{ikl} \quad , \quad \delta_{kl} \cdot \varepsilon_{ijh} \quad , \quad \delta_{kh} \cdot \varepsilon_{ijl} \quad , \quad \delta_{kj} \cdot \varepsilon_{ihl}.$$

Si ottengono in tal modo i seguenti *sei eminvarianti lineari*:

$$\sum_h^3 (T_{123}{}_{hh} - T_{132}{}_{hh} + T_{231}{}_{hh} - T_{213}{}_{hh} + T_{312}{}_{hh} - T_{321}{}_{hh}),$$

$$\sum_h^3 (T_{12h}{}_{3h} - T_{13h}{}_{2h} + T_{23h}{}_{1h} - T_{21h}{}_{3h} + T_{31h}{}_{2h} - T_{32h}{}_{1h}),$$

$$\sum_h^3 (T_{12h}{}_{hh3} - T_{13h}{}_{hk2} + T_{23h}{}_{hh1} - T_{21h}{}_{hh3} + T_{31h}{}_{hh2} - T_{32h}{}_{hh1}),$$

$$\sum_h^3 (T_{1h}{}_{23h} - T_{1h}{}_{32h} + T_{2h}{}_{31h} - T_{2h}{}_{13h} + T_{3h}{}_{12h} - T_{3h}{}_{21h}),$$

$$\sum_h^3 (T_{1h}{}_{2h3} - T_{1h}{}_{3h2} + T_{2h}{}_{3h1} - T_{2h}{}_{1h3} + T_{3h}{}_{1h2} - T_{3h}{}_{2h1}),$$

$$\sum_h^3 (T_{1hh}{}_{23} - T_{1hh}{}_{32} + T_{2hh}{}_{31} - T_{2hh}{}_{13} + T_{3hh}{}_{12} - T_{3hh}{}_{21}).$$

⁽¹⁾ RACA, loco cit.

⁽²⁾ CALDONAZZO, Osservazione sui tensori quintupli emisotropi. « Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei », vol. XV (1° sem. 1932-X), pag. 842.

6. ALCUNI ESEMPI.

a) *Invariante lineare del prodotto di due vettori.* — Se a_i e b_k sono le componenti cartesiane di due vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} , il prodotto dei due vettori è il tensore doppio ⁽¹⁾ di componenti cartesiane:

$$a_i b_k,$$

il cui invariante lineare è

$$\sum_i^3 a_i b_i = \mathbf{a} \times \mathbf{b},$$

il prodotto scalare dei due vettori.

b) *Eminvariante lineare del prodotto di tre vettori.* — Se c_i sono le componenti cartesiane di un terzo vettore \mathbf{c} , il prodotto dei tre vettori ⁽²⁾ è il tensore triplo di componenti

$$a_i b_k c_l;$$

suo eminvariante lineare è:

$$a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2(b_3 c_1 - b_1 c_3) + a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \wedge \mathbf{c};$$

c) *I tre invarianti lineari del prodotto di quattro vettori.* — Sieno d_j le componenti cartesiane di un quarto vettore \mathbf{d} ; il tensore quadruplo di componenti

$$a_i b_k c_l d_j$$

è il prodotto dei quattro vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$. I tre invarianti lineari di questo tensore sono i prodotti a due a due dei prodotti scalari di ciascuna coppia di vettori, cioè:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) (\mathbf{c} \times \mathbf{d}),$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) (\mathbf{b} \times \mathbf{d}),$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{d}) (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

⁽¹⁾ Loco cit., *Mecc. raz.*, pag. 331.

⁽²⁾ Loco ultimo cit., pag. 337.

Fisica. — *Centrifugazione elettronica.* Nota ⁽¹⁾ di QUIRINO MAJORANA, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1.

La teoria elettronica dei metalli opportunamente perfezionata negli ultimi anni, interpreta oggi quasi tutti i fenomeni della conduzione elettrica. La statistica di FERMI ha a ciò contribuito. La presenza e la mobilità di elettroni liberi nell'interno di un metallo, oltre ad essere messa in evidenza, in modo intuitivo, dai fenomeni su ricordati, è stata controllata da esperienze di carattere meccanico. Infatti, in conseguenza del valore ben stabilito della massa materiale degli elettroni, questi, non essendo rigidamente legati agli atomi (pur non potendo sfuggire dal loro campo elettrico senza che venga compiuto dall'esterno, ed in qualche modo, un certo *lavoro di estrazione*) possono dar luogo a certe manifestazioni meccaniche dipendenti dalla loro inerzia materiale. Ad esse, debbono far riscontro altri fatti di natura elettrica. Esperienze atte a verificare una previsione del genere, costituiscono una prova diretta ed interessante della teoria elettronica dei metalli, e sono state tentate ed eseguite con successo da vari fisici. Fra esse sono notevoli quelle ben conosciute di TOLMAN e collaboratori eseguite fra il 1916 ed il 1926 ⁽²⁾, nelle quali, una accelerazione era impressa, a conduttori di varia forma; ed, in conseguenza, venivano osservate debolissime correnti elettriche istantanee od alternate, la cui intensità era in buon accordo con le previsioni teoriche. Una delle maggiori difficoltà di esperienze del genere, risiede nel fatto di dover usare spazzole o collettori mobili, per connettere il conduttore, di cui si muta la velocità, con un galvanometro fisso. Ma TOLMAN, negli ultimi suoi dispositivi, è riuscito ad evitare tale uso, e ad osservare, mediante fenomeni di induzione, le debolissime correnti, opportunamente amplificate.

Da anni, ho perseguito il proposito di generare spostamenti di elettroni nei conduttori, in modo continuo, mediante una sorta di centrifugazione meccanica. L'idea, che peraltro presenta caratteristiche di facile

⁽¹⁾ Presentata nell'Adunanza del 19 gennaio 1940-XVIII.

⁽²⁾ « Phys. Rev. », II, 8, 97, 1916; 9, 164, 1917; 21, 525, 1923; 23, 794, 1926; « Rendiconti Congresso dei Fisici a Como », 1927.

intuizione, non è nuova; ma essa deve aver trovato, da parte di chi ha voluto tradurla in atto, difficoltà praticamente insormontabili, dovute principalmente all'uso di contatti striscianti, il cui effetto è sovente incontrollabile. Io stesso ho avuto a più riprese, occasione di rilevare tale difficoltà, che ho potuto peraltro ridurre in modo assai considerevole. Ora, poichè tale lungo precedente periodo di ricerca, ha in certo modo, anticipato i concreti e più incoraggianti risultati, di cui dirò nella seconda parte di questa Nota, credo opportuno di dare intanto, al riguardo di tali mie ricerche, qualche notizia informativa.

Un dispositivo da me realizzato nel senso ora detto, consiste in un disco metallico D , (fig. 1), che, nella sua parte mediana, può essere formato da metalli diversi (rame, argento, alluminio), e che sul bordo esterno è costituito da ottone. Il disco ha un diametro complessivo di circa cm. 12: è girevole su di un asse verticale di acciaio, calettato in basso (fuori della figura) su due cuscinetti a sfere. Questo asse termina in alto con

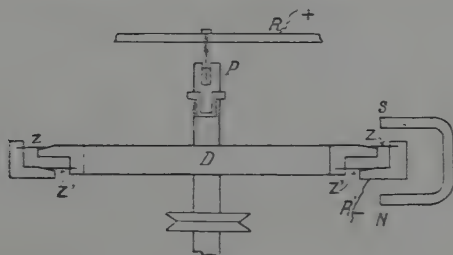


Fig. 1.

un pozzetto di mercurio P , centrale, di mm. 3 di diametro, praticato in un cilindro di rame; e nel quale pesca un filo pure di rame di mm. 0.5 di diametro, che fa capo al sostegno R , e che verrà a costituire il *reoforo positivo* del congegno. Sul bordo del disco, opportunamente sagomato, appoggiano delle spazzole Z , portate da un supporto circolare, pure di ottone R' , che costituirà il *reoforo negativo*. Il disco stesso porta altre spazzole Z' , che strisciano sulla parte bassa del cerchio R' , la cui sagoma è osservabile in figura. Entrambi i sistemi di spazzole, Z , Z' , sono costituiti da nastri di ottone dello spessore di mm. 0.03, larghi mm. 0.5, lunghi mm. 12. Essi, per la loro leggerezza e per la debolissima pressione che esercitano sul relativo bordo (fisso o mobile) di ottone, su cui strisciano, non provocano su questo alcuna corrosione, anche per velocità di rotazione elevate del disco, e durante intiere ore di continuo esperimento. Il numero di tali spazzole si è elevato, negli ultimi modelli da me costruiti, ad un migliaio circa per ognuno dei due gruppi Z , Z' .

Si comprende che, al ruotare del disco, le forze termoelettriche che si generano per la eterogeneità di forma (il metallo costituente è lo stesso) tra spazzole e collettore, debbono probabilmente compensarsi statisticamente. Ciò in causa del grande numero delle spazzole e della loro posizione inversa. Permane peraltro, una qualche lieve differenza tra la funzione delle spazzole condotte dal disco e quelle che su di esso strisciano. Infatti, le prime sono soggette a forza centrifuga, il qual fatto manca per le seconde, a causa della loro quiete. Tuttavia, le conseguenze di tale differenza si riducono al minimo possibile, perchè entrambi i due gruppi di spazzole hanno assestamento radiale, rispetto all'asse ruotante.

Passiamo ora a vedere quale effetto debba avere la presumibile centrifugazione elettronica nel disco. Ciascun elettrone è lanciato con una forza meccanica verso il bordo del disco, che può valutarsi, alla distanza r del centro di rotazione in $mr\omega^2$; dove m è la sua massa materiale; ω la frequenza angolare di rotazione. Il lavoro di tale forza lungo tutto il raggio a del disco è espresso da

$$\int_0^a mr\omega^2 dr = \frac{ma^2\omega^2}{2}$$

A questo valore corrisponde una f. e m. $\frac{ma^2\omega^2}{2e}$, essendo e la carica dell'elettrone. E se R è la resistenza elettrica del circuito, nel quale l'apparecchio è inserito, la corrente osservabile è data da

$$i = \frac{ma^2\omega^2}{2eR}$$

Se si fa $a = 6$ cm; $\omega = 314$ (50 giri a secondo); $R = 4$ ohm, si ha, tenendo conto del noto valore di $\frac{e}{m}$ per l'elettrone,

$$i = 3 \cdot 10^{-10} \text{ amp.}$$

Come si è detto, questa corrente deve avere il suo polo positivo sul centro del disco, ed il negativo sul bordo.

Dal punto di vista sperimentale, si deve tener conto *a priori* dell'azione del campo magnetico terrestre. Poichè il disco è tenuto per ragioni di comodità pratica, col suo asse verticale, esso è traversato dalle linee di forza di quel campo, con una inclinazione uguale al complemento dell'inclinazione magnetica terrestre. L'effetto del campo terrestre è di produrre una marcatissima deviazione nel galvanometro, che cresce proporzionalmente alla velocità di rotazione, e muta di segno con questa. L'effetto di eventuali forze termoelettriche dipende probabilmente dal quadrato della velocità; come pure tal legge segue, per quanto visto, il ricercato

effetto di centrifugazione. È facile correggere l'effetto del campo magnetico terrestre, avvicinando più o meno al disco ruotante il magnete NS della figura. Per tentativi si riesce così ad avere, nei due sensi di rotazione del disco, una deviazione che è sempre dello stesso senso. Essa può essere dovuta promiscuamente ad azioni termoelettriche residue o al ricercato effetto di centrifugazione. Realmente, ho frequentemente constatato che la deviazione osservabile al galvanometro, ha il senso previsto di quest'ultimo effetto; ma il suo valore risulta troppo grande per poter credere che realmente si tratti soltanto di esso. Probabilmente rimangono attive alcune azioni perturbatrici, che forse una ancora più accurata messa a punto del dispositivo, potrà eliminare. Su ciò mi riservo di ritornare, con future ricerche sperimentali.

2.

In relazione alle ricerche su cui ho riferito nella prima parte della presente Nota espongo altre esperienze, tendenti ancora a dimostrare la centrifugazione elettronica, con eliminazione della sospettata causa perturbatrice termoelettrica. Tale eliminazione corrisponde alla soppressione di qualsiasi contatto strisciante periferico; questo risultato è ottenuto provocando la libera uscita degli elettroni nello spazio esterno, vuoto od occupato da un dielettrico fluido (un gas nobile, p. es.). Se si prescinde dal metodo di MILLIKAN, che consiste nell'usare tensioni estremamente elevate per rompere la barriera di potenziale che tiene legati gli elettroni all'atomo; i metodi conosciuti per estrarre gli elettroni degli atomi sono due, e fondati rispettivamente sull'effetto termoionico e su quello fotoelettrico. Si comprende facilmente che, se con uno di questi due metodi (scaldando cioè il metallo, oppure illuminandolo) si raggiunge una fase di emissione elettronica stabile, l'aggiunta di forza centrifuga possa portare ad un incremento, nel tasso degli elettroni uscenti dal metallo.

Guidato da tale concetto, ho realizzato qualche anno addietro un dispositivo fondato sull'uso dell'effetto termoionico: un cerchio di filo di tungsteno scaldato nel vuoto da una corrente elettrica intermittente, avrebbe dovuto emettere un maggior numero di elettroni, quando veniva posto in rapida rotazione intorno al suo centro e nel suo piano; l'osservazione veniva fatta durante i periodi di tempo in cui la corrente di accensione era soppressa. Ma purtroppo, quest'esperienza, laboriosissima nella sua realizzazione pratica, ebbe esito negativo. L'emissione centrifuga elettronica, se mai realmente esisteva, veniva coperta da un certo numero di gravi cause perturbatrici, che, per brevità, qui non specifico.

Risultato, che a me appare interessante, ha avuto per contro, un'ulteriore ricerca nella quale ho utilizzato l'effetto fotoelettrico. Descrivo

senz'altro l'apparecchio che, seguendo tale concetto, ho realizzato in questi ultimi mesi.

Un asse ruotante *A* (fig. 2), verticale, messo in moto analogamente a quanto è esposto nella prima parte di questa Nota, è solidale con tre cellule fotoelettriche al sodio, in gas nobile. Queste cellule sono disposte intorno all'asse, nel modo simmetrico indicato in figura, dove ne sono indicate due invece di tre. Le placche catodiche di sodio, sono più prossime all'asse *A*, e le cellule sono sorrette meccanicamente anche dal disco metallico *BC*, isolato elettricamente da *A*, al quale fanno capo in parallelo le loro placche. Il pozzetto di mercurio *P*, in recipiente di rame, ha le stesse fun-

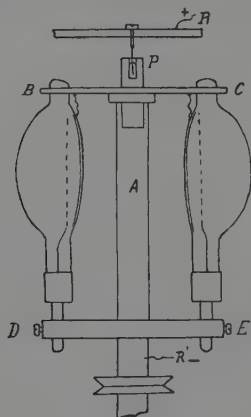


Fig. 2.

zioni che nella figura 1. Ad *R* si connette il reoforo che sarà positivo, se la centrifugazione avviene realmente. Le griglie delle cellule sono connesse con la base *DE*; tutta la massa metallica restante del congegno costituisce attraverso i cuscinetti a sfera di sostegno, il reoforo *R'*, negativo. Le cellule hanno un diametro di placca al sodio, fotoelettrica, di cm. 4,5; egual diametro hanno le griglie, che sono poste dinanzi alle placche ad una distanza di circa cm. 0,5. Le griglie sono costituite da sottile filo di nichel del diametro di mm. 0,1 formante una rete con maglie la cui area libera è di circa 3 o 4 mmq. Tanto le placche, che le griglie sono così, connesse in parallelo. Si comprende che si potrebbe adoperare un numero qualsivoglia di cellule, purchè disposte simmetricamente intorno all'asse di rotazione, per l'equilibrio dinamico, durante la rotazione; oppure sostituire ad esse una sola cellula cilindrica di opportuna fabbricazione.

Il tipo di cellule impiegate, dà sufficiente garanzia di poter esser messo in rotazione con la velocità di circa 50 giri a secondo. Ma realmente,

per sicurezza, non l'ho cimentato sinora mai, a velocità superiori a circa 32 giri.

I due reofori R, R' sono posti in connessione con un galvanometro della sensibilità di $7 \cdot 10^{-10}$ amp./mm., senza l'uso di alcuna f. e. m. acceleratrice, come invece si fa comunemente quando si adoperano delle cellule fotoelettriche. L'apparecchio, protetto da apposita custodia metallica fornita di finestra, può venire illuminato, attraverso questa, dalla luce di una lampada intensiva a filamento raccolto, di 40 watt, munita di lente condensatrice.

Si faccia ora ruotare assai lentamente il congegno (un mezzo giro a secondo); la luce batte successivamente sulle cellule; il galvanometro accusa una deviazione, media di quelle che esso subirebbe per le varie posizioni angolari del congegno, e che è dell'ordine di 0,5 microampère. Questa deviazione (stabile a causa del lento periodo di oscillazione del galvanometro: 8 secondi), è dovuta a puro effetto fotoelettrico; nessuna influenza può difatti avere sull'emissione elettronica, la lenta rotazione del congegno; inoltre, la deviazione non muta di segno al cambiare del senso di rotazione del disco, il che indica che nessuna azione ha il campo magnetico terrestre. La ragione della deviazione galvanometrica, va ricercata nella estrazione statistica di qualche elettrone, operata dalla luce; benchè nessuna f. e. m. sussidiaria intervenga. Al più, può avere qualche influenza, difficilmente precisabile, la differenza di f. e. m. di contatto fra griglia e placca fotoelettrica.

Se ora mettiamo in rotazione relativamente rapida, il congegno, ci sarebbe forse da attendersi, in conseguenza della sospettata centrifugazione elettronica, che un maggior numero di elettroni sfugga dal metallo, per venire a battere sulla griglia. Ma l'esperienza eseguita, smentisce in pieno questa previsione avanzata, forse, in modo troppo sommario. Al ruotare del congegno, la corrente del galvanometro anzichè crescere, diminuisce fortemente, riducendosi a circa $1/10$ del suo primitivo valore (da 0,5 a 0,05 μ a). La deviazione non muta cambiando il senso di rotazione. Il fenomeno è rappresentato nella figura 3, dove sono riportate sulle ascisse le velocità di rotazione, e come ordinate i valori della corrente osservabile al galvanometro. Le osservazioni fatte a più riprese, segnate mediante crocette, nella figura, non lasciano alcun dubbio, sull'andamento della curva. Si rileva, come basti già una velocità di rotazione di 10 giri a secondo, per abbattere di molto il valore della corrente galvanometrica.

Questo risultato, che forse sarebbe apparso *a priori* imprevedibile, può trovare forse, una agevole spiegazione. Si deve infatti ammettere, che quando il congegno è in riposo, gli elettroni appena emergenti dalla placca fotosensibile non raggiungono la griglia che con velocità assai piccola; e ciò in conseguenza della mancanza di un notevole campo acceleratore. Le loro traiettorie, spezzate probabilmente dagli urti elastici

sugli atomi del gas nobile ambiente, si dirigono sulla griglia, in conseguenza della accennata debole f. e. m. di contatto. Tanto più è debole tale f. e. m. in quanto, come è noto, la griglia può facilmente esser ricoperta da uno strato più o meno regolare di metallo alcalino, dovuto alle varie fasi di fabbricazione o di vita della cellula stessa. La lentezza del moto elettronico non può esser forse menomata dall'esistenza, nel fascio illuminante, di radiazioni con frequenza superiore alla soglia fotoelettrica del sodio. Tuttavia questo punto meriterà in avvenire maggior chiarimento sperimentale.

Ciò posto, si osserva che quando il congegno ruota, alla debole forza che sospinge ciascuno dei pochi elettroni che dalla placca migrano verso la

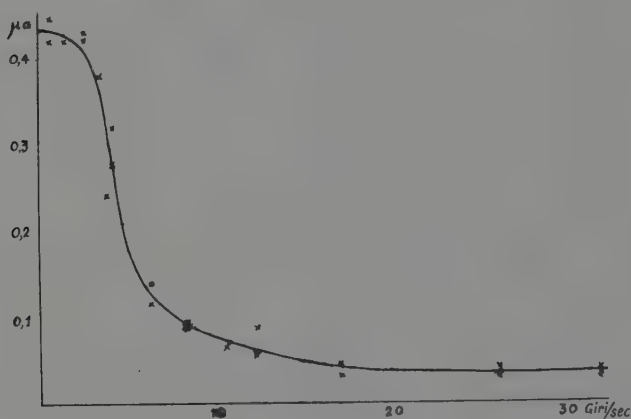


Fig. 3.

griglia, si aggiunge la forza centrifuga. Questa può agire già sulla superficie del metallo, nella prossimità del quale, sotto l'azione della luce si addensa una fitta, ma bassa, nebbia elettronica; ma può forse anche agire sugli elettroni vaganti tra placca e griglia in conseguenza della presenza del gas nobile, trascinato anch'esso in rotazione. Come risultato, si presume che essi decisamente attraversano in buon numero le maglie della griglia senza soffermarsi su questa. Da ciò l'osservata diminuzione della corrente.

La data spiegazione si appoggia dunque sull'ammissione che la accelerazione dovuta alla forza centrifuga, possa diventare notevole in confronto a quella impressa agli elettroni, dalle deboli forze elettriche agenti. Ma la spiegazione stessa non può avere ora che il valore di semplice *ipotesi di lavoro*, potendo ulteriori fatti ancora non constatati, smentirla, o confermarla.

A una riserva del genere, va inoltre aggiunto il seguente rilievo. Se pensiamo che il circuito conduttore composto dalla placca fotoelettrica, nube elettronica nel gas nobile, griglia (circuito che è chiuso sul galvanometro, e che non è come ora si dice, intieramente metallico), si possa comportare in modo analogo ad un vero circuito metallico, la forza centrifuga non può avere alcun effetto. Infatti la parte girevole del circuito è connessa al galvanometro mediante *contatti centrali, od assiali*. In conseguenza, si può pensare che opposte centrifugazioni avvengono nelle due connessioni, che partendo dal centro, vanno rispettivamente alla placca e alla griglia. Ma realmente la struttura del circuito non è tutta metallica, e non è lecito assimilare la conduzione elettronica nel gas nobile (od eventualmente nel vuoto) a quella metallica. L'esperienza fatta va dunque interpretata con tutta cura, e a ciò potrà servire la sua ripetizione in condizioni diverse da quelle descritte.

Sia per stabilire un controllo decisivo, sulla giustezza delle ipotesi più sopra avanzate, sia ancora per decidere quale realmente possa essere il comportamento di uno strato fotoelettrico o del gas elettronico nel libero spazio, sotto l'azione della forza centrifuga, sarà opportuno introdurre talune importanti modificazioni e semplificazioni nel dispositivo sperimentale descritto. Esse consisteranno principalmente nella soppressione del gas ambiente nell'interno della cellula; e nel costituire la griglia, mediante uno strato metallico continuo semi-trasparente. In tali condizioni sarà certamente più facile la interpretazione dei singoli fatti descritti, che ora si appalesano in modo complesso, ma pur sempre interessante.

Penso che le ulteriori prove che mi riservo di compiere nel senso ora detto, possano stabilire dei legami non del tutto prevedibili, tra conduzione metallica, fenomeno fotoelettrico, e dinamica dell'elettrone.

Fisica. — *Misura della sezione d'urto elastico tra neutroni e protoni.* Nota di EDOARDO AMALDI, DARIA BOCCIARELLI e GIULIO CESARE TRABACCHI presentata ⁽¹⁾ da GIULIO CESARE TRABACCHI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Dalla misura della sezione d'urto elastico tra protoni e neutroni è possibile dedurre importanti informazioni sulla natura delle forze con cui queste particelle interagiscono fra loro. Una parte delle misure eseguite fino ad ora di questa grandezza si riferisce a neutroni di alcuni milioni di volt ⁽²⁾; tali misure sono in generale risultate in soddisfacente accordo con i valori teorici dedotti dalla formula di BETHE e PEIERLS ⁽³⁾.

Per neutroni di alcune centinaia di migliaia di volt-elettrone di energia, la maggior parte dei risultati sperimentali fino ad oggi esistenti sembra invece non accordarsi bene con la predetta formula.

Infatti sia le misure di GOLDBABER ⁽⁴⁾ e di TUVE ed HAFSTAD ⁽⁵⁾ che alcune nostre recenti misure ⁽⁶⁾, hanno dato valori della sezione d'urto, per neutroni di 0,2-0,3 MV, notevolmente inferiori ai corrispondenti valori teorici. LEIPUNSKI, ROSENKERVITSCH e TIMOSHUK ⁽⁷⁾ hanno invece trovato, nel 1936, un valore in ottimo accordo con la formula teorica, mentre più recentemente GOLOBORODKO e LEIPUNSKI ⁽⁸⁾ hanno pubblicato, per neutroni di 0,2 MV, un valore notevolmente inferiore.

Abbiamo quindi ritenuto opportuno riprendere in esame il problema, usando una intensa sorgente di neutroni, ed avendo cura di eliminare le

(¹) Nell'Adunanza del 19 gennaio 1940-XVIII.

(²) E. T. BOOTH, C. HURST, «Proc. Roy. Soc.», 161, 248, 1937; R. LADENBURG, M. H. KANNER, «Phys. Rev.», 52, 911, 1937; W. H. ZINN, S. SEELY, V. M. COHEN, «Phys. Rev.», 53, 921, 1938; 55, 679, 1939; 56, 260, 1939; S. KIKUCHI, H. AOKI, «Phys. Rev.», 55, 108, 1939, «Scient. Papers of the I. P. C. R.», 34, 864, 1938.

(³) Vedi per esempio H. A. BETHE, R. F. BACHER, «Rev. Mod. Phys.», 8, 117, 1936.

(⁴) M. GOLDBABER, «Nature», 137, 824, 1936.

(⁵) M. A. TUVE, L. R. HAFSTAD, «Phys. Rev.», 50, 308, 1936.

(⁶) E. AMALDI, D. BOCCIARELLI, F. RASETTI, G. C. TRABACCHI, «Ric. Scient.», X, 633, 1939, «Phys. Rev.», 56, 881, 1939.

(⁷) A. LEIPUNSKI, L. ROSENKERVITSCH, D. TIMOSHUK, «Phys. Zeit Sowjetunion», 10, 625, 1936; 10, 751, 1936.

(⁸) T. GOLOBORODKO, A. LEIPUNSKI, «Phys. Rev.», 56, 891, 1939.

principali cause di errore che possono alterare i risultati di una simile misura.

I neutroni usati venivano prodotti a mezzo dell'impianto ad 1 milione di volt dell'Istituto di Sanità Pubblica ⁽⁹⁾.

Per tarare il voltmetro, a mezzo del quale veniva misurata la tensione applicata al tubo acceleratore, ci siamo serviti delle risonanze osservate da vari autori ⁽¹⁰⁾ nella emissione di raggi γ da parte di vari elementi leggeri bombardati con protoni. A tale scopo ci siamo serviti di una camera di ionizzazione ripiena di CO_2 , a 3 atmosfere, posta a cm. 5 dalla piastra

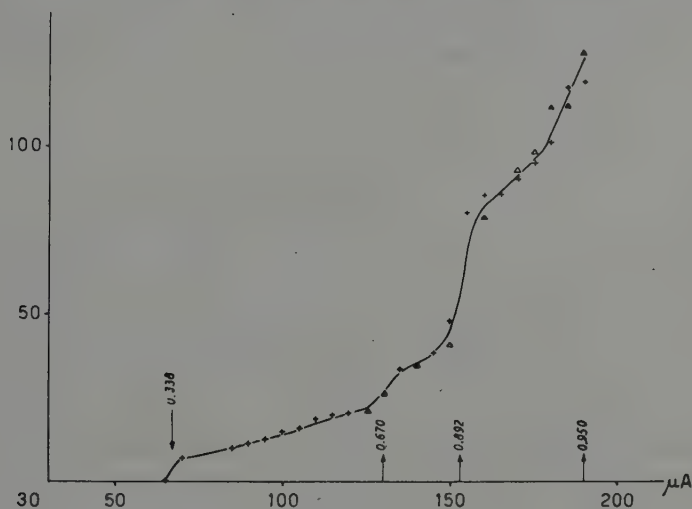


Fig. 1.

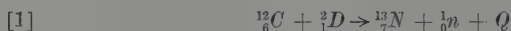
di materiale bombardato e protetta con cm. 1 di piombo dai raggi X molli provenienti dalle parti superiori del tubo. Con tale dispositivo abbiamo misurato, in funzione della differenza di potenziale applicata al tubo, la intensità delle radiazioni γ emesse nelle reazioni $H_1 + Li$, $H_1 + C$, $H_1 + F$, $H_1 + Al$. Abbiamo così individuato la risonanza del C a 0,4 MV, la risonanza del Li a 0,44 MV; quelle del F a 0,338; 0,670; 0,892, e 0,950 MV e quella dell'Al a 0,725 MV. Nella fig. 1 è riprodotta la curva ottenuta nel caso del fluoro. Mentre abbiamo potuto bombardare

⁽⁹⁾ G. C. TRABACCHI, E. AMALDI, D. BOCCIARELLI, F. RASETTI, « Ric. Scient. », X, 623, 1939.

⁽¹⁰⁾ L. R. HAFSTAD, M. A. TUVE, « Phys. Rev. », 48, 306, 1935; L. R. HAFSTAD, N. P. HEYDENBURG, M. A. TUVE, « Phys. Rev. », 49, 866, 1936; R. G. HERB, P. W. KERST, J. L. MEKIBBEN, « Phys. Rev. », 51, 691, 1937;

le altre sostanze sotto forma di dischetti dell'elemento stesso, per il fluoro abbiamo usato un miscuglio di P_2O_5 , CaF_2 ed acqua, avente consistenza mielosa. Questo miscuglio si è mostrato assai superiore ad un cristallo di fluorite che avevamo provato ad usare in un primo tempo, poichè questo, a causa del riscaldamento provocato dal bombardamento, si rompeva con emissione di notevoli quantità di gas che peggioravano il vuoto nel tubo. Per evitare che il miscuglio di acqua, anidride fosforica e fluoruro di calcio si essiccasse troppo rapidamente, dando così luogo ad inconvenienti simili a quelli presentati dalla fluorite, abbiamo dovuto ridurre notevolmente la corrente nel tubo, rispetto al normale, e non abbiamo potuto estendere la taratura a tensioni superiori a $0,95 \cdot 10^6$ volt, quali possiamo invece facilmente raggiungere quando si bombardano elementi come il Be.

Come nel nostro precedente lavoro ⁽⁵⁾ ci siamo serviti dei neutroni emessi nella reazione



dove $Q = -0,28$ MV ⁽¹¹⁾. Dato che il rendimento di tale reazione è relativamente basso abbiamo usato deutoni accelerati con $0,9 \cdot 10^6$ V in modo che i neutroni emessi, in una direzione a 90° con la direzione dei deutoni incidenti, avevano una energia massima di 0,45 MV. Lo spettro dei neutroni emessi si estende, a partire da questo valore fino a zero, decrescendo, circa esponenzialmente; basandoci sul dato che con deutoni di $0,7 \cdot 10^6$ V il numero dei neutroni emessi è circa 1/10 di quelli emessi con deutoni di $0,9 \cdot 10^6$ V, abbiamo valutato che l'energia media dei nostri neutroni fosse 0,40 MV, intendendo con questo che nelle nostre condizioni venissero emessi tanti neutroni di energia compresa fra 0,40 e 0,45 MV quanti con energia inferiore a 0,40; si aggiunga che il numero dei neutroni aventi energia inferiore a 0,3 MV rappresentava il 10 % del totale.

Mentre in un nostro precedente lavoro ⁽⁵⁾ per rivelare i neutroni emessi dalla [1] ci siamo serviti di una camera di ionizzazione ripiena di H_2 a 20 atmosfere in modo da misurare la ionizzazione totale provocata dai protoni di rinculo dei neutroni incidenti, in questa ricerca ci siamo serviti di un contatore proporzionale ripieno di H_2 a pressione atmosferica, avente il diametro interno di cm. 3 ed una lunghezza utile di cm. 5.

Il filo del contatore era di mm. 0,1; esso veniva fatto funzionare con una tensione di 2000 volt. A differenza da una camera di ionizzazione a pressione, la cui sensibilità è proporzionale al prodotto $\sigma (E_n) E_n$ della

⁽¹¹⁾ J. D. COCKCROFT, W. B. LEWIS, « Proc. Roy. Soc. », 154, 261, 1936; J. W. BONNER, W. M. BRUBAKER, « Phys. Rev. », 50, 308, 1936; T. W. BONNER, 53, 496, 1938.

sezione d'urto protone-neutrone $\sigma(E_n)$ per l'energia E_n del neutrone, un contatore proporzionale ha una sensibilità proporzionale a $\sigma(E_n)$ ogni qualvolta l'energia dei neutroni misurati risulti tale da dare protoni di rinculo aventi un percorso grande rispetto alle dimensioni lineari del contatore stesso.

Nel nostro caso poi, dato che i protoni di rinculo possono avere al massimo 0,4 MV di energia e quindi un percorso massimo in aria di cm. 0,5 (corrispondente a cm. 2,4 in idrogeno) la maggior parte di essi esaurisce tutto il proprio percorso entro il contatore. Connettendo tale contatore, attraverso ad un amplificatore, ad uno degli ordinari sistemi di conteggio, si ottiene così un dispositivo che registra quasi esclusivamente i protoni di rinculo di neutroni di 0,3-0,4 MV di energia.

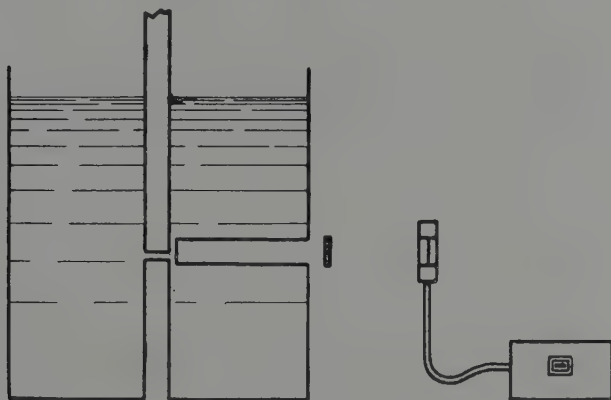


Fig. 2.

Un altro punto che abbiamo curato particolarmente rispetto ad altre ricerche di questo stesso tipo, è la canalizzazione dei neutroni. Infatti in tutte le esperienze di questo tipo la principale causa di errore è la mancanza di una buona canalizzazione dei neutroni e l'esistenza, nell'ambiente in cui si eseguono le misure, di neutroni diffusi dalle pareti e dagli oggetti circostanti che colpiscono il rivelatore pressochè isotropicamente dando così luogo ad un fondo difficilmente valutabile.

Per canalizzare i neutroni il più possibile, abbiamo posto l'estremità del tubo contenente la targhetta, nel centro di un recipiente cilindrico pieno di acqua del diametro di cm. 50 e alto cm. 50. Come risulta dalla fig. 2 due tubi di metallo del diametro interno di cm. 4,5 chiusi in fondo ed applicati uno alla parete del recipiente ed uno nel centro del fondo del recipiente stesso, permettevano ai neutroni provenienti dalla targhetta di uscire senza passare attraverso all'acqua (o quasi), solo in due ben determinate direzioni. Per verificare quanto fosse efficiente tale canaliz-

zazione abbiamo posto il nostro contatore a cm. 10 dalla parete laterale del cilindro di acqua ed abbiamo misurato il numero dei protoni di rinculo registrati da questo spostandolo a destra ed a sinistra dalla posizione

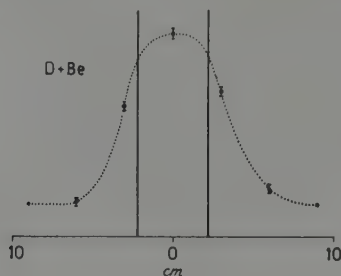


Fig. 3.

centrale. Nelle figg. 3 e 4 sono riportati i risultati ottenuti in questo esperimento usando sia i neutroni prodotti nella reazione $D + Be$ che nella reazione $D + C$. Come si riconosce da tali figure, la canalizzazione è ot-

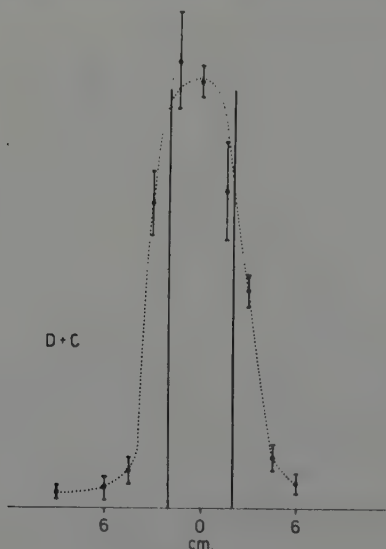


Fig. 4.

tima, dato che essa si estende su di una larghezza che risulta circa uguale alla somma della larghezza del foro da cui escono i neutroni più la lunghezza del contatore. Una analoga curva è stata ottenuta spostando il contatore lungo la verticale. Dalle figg. 3 e 4 si riconosce che nel caso dei neu-

troni prodotti nella reazione $D + C$, la canalizzazione è superiore che nel caso dei neutroni prodotti nella reazione $D + Be$, come del resto ci si deve attendere data la maggiore energia di questi ultimi. Nel caso dei neutroni $D + C$ per determinare il fondo, ossia il numero dei neutroni non provenienti dal tubo collimatore, riempiamo quest'ultimo con un

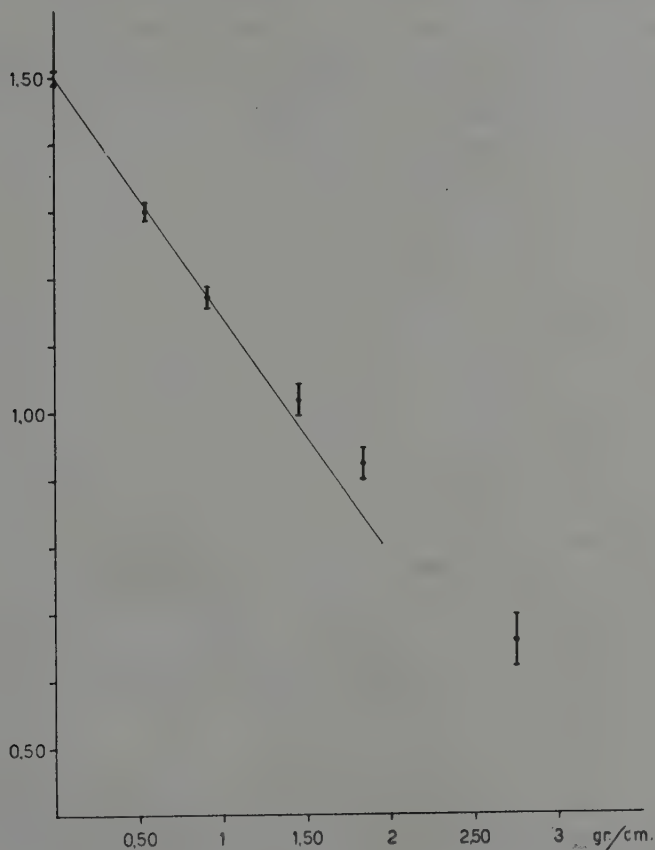


Fig. 5.

cilindro di paraffina lungo cm. 25. In queste condizioni il contatore contava un numero di impulsi eguale a circa 2 volte l'effetto di zero naturale.

Assicuratici in tal modo della buona canalizzazione dei neutroni usati, abbiamo posto il contatore a cm. 20 dalla parete esterna del cilindro di acqua, ed abbiamo contato il numero degli impulsi da esso registrati in funzione dello spessore di paraffina interposto sul cammino dei neutroni (vedi fig. 2).

Come controllo della costanza dell'emissione di neutroni, un secondo contatore, identico al primo, veniva immerso, entro un involucro metallico protettore, nell'acqua, il più vicino possibile all'estremità del tubo. Tale controllo si mostrò ben presto superfluo data la costanza e regolarità di funzionamento di tutto il sistema per periodi di molte ore.

I risultati raccolti nella tabella sono la media di 5 serie di misure e da essi è già stato detratto il fondo che risultava pari a 16 impulsi/min. Nella fig. 5 tali dati sono stati riportati in scala logaritmica. Per grossi spessori della paraffina l'andamento della curva di diffusione si scosta dall'andamento esponenziale come ci si deve aspettare a causa di urti multipli subiti dai neutroni nel diffusore.

TABELLA.

Gr/cm ² di paraffina	Impulsi/min.
0	316 ± 8
0,54	200 ± 7
0,91	150 ± 6
1,45	105 ± 5
1,84	84 ± 5
2,75	46 ± 4

Dalla fig. 5 si riconosce che lo spessore di paraffina che riduce l'intensità dei neutroni ad $1/e$ è pari a $1,2 \text{ gr/cm}^2$; da tale valore si deduce, assumendo per il carbonio una sezione d'urto pari a $2 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$, che la sezione d'urto elastico protone-neutrone, per un'energia dei neutroni incidenti di 0,4 MV, è pari a

$$[2] \quad \sigma = 8,7 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2.$$

Tale valore non è stato corretto per tener conto delle dimensioni finite della sorgente e del rivelatore. Dato però le loro piccole dimensioni e la grande distanza, tale correzione è di solo qualche per cento e andrebbe applicata nel senso di far diminuire il valore della sezione d'urto.

Per poter calcolare a mezzo della formula di BETHE e PEIERLS la sezione d'urto protone-neutrone per $E_n = 0,40 \text{ MV}$, è necessario, come è noto, conoscere la sezione d'urto protone-neutrone per neutroni aventi energia di qualche volt-elettrone.

(12) E. AMALDI, L. R. HAFSTAD, M. A. TUVE, « Phys. Rev. », 51, 896, 1937.

Un limite inferiore, pari a $12 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$, di tale grandezza, è stato dato da AMALDI e FERMI ⁽¹³⁾, usando i neutroni di risonanza del Rh.

Più recentemente COHEN, GOLDSMITH e SCHWINGER ⁽¹⁴⁾ hanno trovato, sempre per i neutroni di risonanza del Rh, $\sigma = 20 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ mentre SIMONS ⁽¹⁵⁾, usando i neutroni di risonanza dell'Ag e dello I, ha trovato $\sigma = 14,8 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$.

Abbiamo quindi ritenuto opportuno fare alcune misure intese a decidere quale di questi due valori fosse da assumersi per il calcolo della sezione d'urto dei neutroni di 0,4 MV.

A tale scopo ci siamo serviti dei neutroni di risonanza del Rh.

Attorno all'estremità inferiore del tubo, in cui veniva bombardata una targhetta di Be con D di 0,850 MV, abbiamo disposto un cilindro di paraffina di cm. 12,4 di diametro e cm. 9,5 di altezza, ricoperto interamente di uno strato di Cd di 0,52 gr/cm². in modo da eliminare completamente i neutroni termici. A cm. 50 dalla faccia inferiore della paraffina veniva disposto un rivelatore di Rh di $5 \times 5 \text{ cm}^2$ di area e dello spessore di 0,111 gr/cm². Questo era protetto a sua volta, sopra e sotto, da 0,52 gr/cm² di Cd. La sua attività veniva misurata a mezzo di una camera di ionizzazione, dopo averlo irradiato coprendolo, oppure no, dalla parte di sopra con uno strato di 0,36 gr/cm² di Rh. Come è evidente, la differenza fra le attività senza o con schermo di Rh è dovuta ai neutroni di risonanza di questo stesso elemento. I diffusori di paraffina in forma di dischi di cm. 9,2 di diametro e di spessori variabili da 0,14 a 0,83 gr/cm², venivano interposti a metà distanza fra la sorgente ed il rivelatore.

Dalla tangente iniziale alla curva di diffusione abbiamo trovato che lo spessore di paraffina che riduce ad 1/e l'intensità è pari a

$$0,7 \text{ gr/cm}^2$$

a cui corrisponde una sezione d'urto dell'idrogeno pari a

$$[3] \quad \sigma = 14,4 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$$

avendo assunto per il carbonio $\sigma = 4,8 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$.

Tale valore andrebbe inoltre diminuito di circa il 10 per cento, riducendosi così a circa

$$[3'] \quad \sigma = 13 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$$

⁽¹³⁾ E. AMALDI, E. FERMI, « Ric. Scient. », VII, 1, 454, 1936; « Phys. Rev. », 55, 899, 1936.

⁽¹⁴⁾ V. W. COHEN, H. H. GOLDSMITH, J. SCHWINGER, « Phys. Rev. », 55, 106, 1939.

⁽¹⁵⁾ L. SIMONS, « Phys. Rev. », 55, 792, 1939; D. Kgl. Danske Vidensk Selskab, « Mat. Phys. Medd. », XVII, 7, 1940.

per tener conto delle dimensioni finite sia della sorgente che del diffusore. L'errore delle singole misure da cui è stato dedotto il valore [3] è del 7 %. Riteniamo quindi che il valore [3'] possa essere errato non più del 15 o al massimo del 20 %. Il nostro risultato va quindi considerato in accordo con quello di SIMONS, mentre sembra incompatibile col valore di $20 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ dato da altri autori.

Una volta stabilito di prendere come valore della sezione d'urto per neutroni di 1V di energia $\sigma = 14,8 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ si può calcolare a mezzo della formula BETHE e PEIERLS la sezione d'urto per neutroni di 0,40 MV.

Nel fare questo abbiamo tenuto conto dei termini correttivi introdotti da KITTEL e BREIT ⁽¹⁶⁾ per tener conto del raggio finito delle forze nucleari, per quanto tale correzione sia assai piccola per energie dei neutroni di 0.4 MV. Il risultato è

$$\sigma = 6,9 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2.$$

Si riconosce così che il valore da noi trovato è del 20 % maggiore del valore teorico; esso va quindi considerato in buon accordo con la teoria che resta così confermata entro i limiti dei nostri errori sperimentali ⁽¹⁷⁾.

⁽¹⁶⁾ C. KITTEL, G. BREIT, « Phys. Rev. », 56, 744, 1939.

⁽¹⁷⁾ Roma, Istituto di Sanità Pubblica.

Chimica. — *Studi di spettrochimica nell'ultravioletto e ultrarosso.* — I. Osservazioni sulle bande di assorbimento degli acidi grassi a catena normale a 1,18 e 1,4 μ . Nota di MARIA FRERI e COSTANTINO ANZI, presentata ⁽¹⁾ da GIUSEPPE BRUNI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Si conosce lo sviluppo che hanno sia le ricerche sugli spettri di assorbimento nell'ultravioletto e ultrarosso che quelle sugli spettri di diffusione (effetto RAMAN) delle sostanze organiche; il vasto contributo sperimentale ha condotto a conclusioni notevoli sia dal lato pratico, perchè in alcuni casi i risultati si sono mostrati adatti a risolvere problemi analitici — sia soprattutto dal lato teorico dove si sono ottenuti importanti contributi a problemi di struttura molecolare.

Nel campo di cui ci interessiamo particolarmente, quello dell'ultravioletto vi sono importanti trattati ⁽¹⁾ oltre a lavori che riassumono in sintesi tanto chiara quanto breve e completa ⁽²⁾ i risultati raggiunti.

Il problema più delicato da risolvere innanzi tutto è quello dell'apparecchiatura. Noi ci siamo serviti di uno spettrografo KIPP e ZONEN già esistente nel nostro Istituto ⁽³⁾. Poichè però abbiamo modificato il sistema di riferimento ed abbiamo introdotto un sistema di amplificazione, crediamo utile per una maggiore chiarezza, dare in fig. 1. lo schema completo dell'apparecchio ed accompagnarlo da una dettagliata descrizione.

Il complesso è sostanzialmente costituito da una parte ottica, una parte elettrica e un sistema registratore.

La parte ottica — comprende:

- 1 sorgente luminosa: filamento di NERNST;
- 1 specchio concavo per la concentrazione della radiazione sulla fenditura dello spettrometro;
- 1 supporto fisso in metallo per vaschette di assorbimento;
- 1 spettrometro a prisma e specchi.

La parte elettrica — comprende:

- 1 pila termoelettrica di MOLL;

⁽¹⁾ Nell'Adunanza del 19 gennaio 1940—XVIII.

- 1 galvanometro primario;
- 1 amplificatore a termorelais;
- 1 galvanometro secondario
- interuttori, reostati di regolazione, amperometri ecc.

La parte registratrice:

- 1 registratore a tamburo con motore ad orologeria;
- 1 lanterna per il galvanometro;
- 1 lanterna per i tratti di riferimento.

PARTE OTTICA.

Quale sorgente emittente per le radiazioni infrarosse è stata utilizzata la lampada di NERNST date le caratteristiche emissive di questa che si avvicinano, per lunghezza d'onda fino a 20μ , a quelle del corpo nero, da cui differiscono solo per il fatto che l'emissione relativa della lampada di Nernst è uguale al 75 % di quella del corpo nero. La lampada di NERNST *N* fornisce inoltre un'emissione sufficientemente costante, con oscillazioni del $\pm 1\%$.

La corrente di alimentazione della lampada è stata sempre di 0,6 o 0,7 Amp. ed è continuamente controllata a mezzo di un amperometro (α) da 1 Amp. fondo scala inserito nel circuito di alimentazione. L'alimentazione viene ottenuta mediante una batteria di accumulatori da 120 volta con una capacità di scarica superiore di alcuni ordini di grandezza a quella usata; un adatto reostato r_2 permette la regolazione dell'intensità di corrente e un'interuttore Y_2 l'inserzione della batteria. La lampada è inoltre protetta contro le correnti d'aria da una custodia metallica munita di finestra.

La radiazione emessa dalla lampada viene raccolta da uno specchio concavo ad argentatura superiore S_1 che proietta l'immagine del filamento sulla fenditura dello spettrometro registratore; lampada e specchio sono mobili su uno stesso banco ottico, così possono essere perfettamente centrati anche l'uno rispetto all'altro.

Lo spettrometro registratore costruito dalla KIPP e ZONEN è del tipo a prisma e specchi; le radiazioni, entrando dalla fenditura vanno a riempire lo specchio S_2 il cui fuoco si trova sulla fenditura stessa; in tal modo i raggi vengono resi paralleli e riflessi sul prisma P da cui sono dispersi e deviati sullo specchio piano S_3 ; da questo essi vengono successivamente riflessi sullo specchio concavo S_4 che li concentra sulla fenditura della termopila Fp . Entrambe le fenditure sono state centrate sugli specchi con un catetometro.

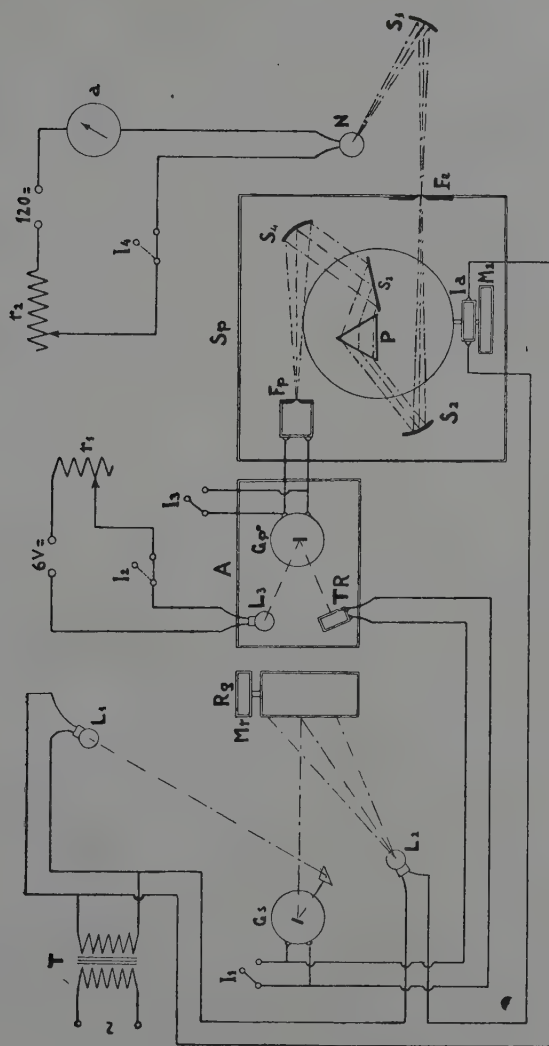


Fig. 1.

Il prisma e lo specchio piano sono riuniti secondo il montaggio di WADSWORTH e pertanto lo spettrometro funziona sempre secondo il metodo della minima deviazione; la rotazione del piano portante il prisma e lo specchio piano fa passare successivamente di fronte alla fenditura della termopila le radiazioni di lunghezza d'onda crescente. Un motore a orologeria a scappamento mette in moto il prisma e garantisce il sincronismo del movimento del prisma e quello del registratore fotografico. Lo spostamento del piatto porta-prisma è ottenuto mediante una vite micrometrica portante un tamburo graduato: ciò rende possibile una determinazione precisa della posizione del prisma.

Solidale con l'asse portante la vite micrometrica è fissato un disco I_n munito esternamente di tre sporgenze a 120° ; queste, durante la rotazione fanno chiudere un contatto elettrico che accende la lanterna L_2 che traccia una riga sulla carta del registratore. Abbiamo così che ad ogni giro della vite micrometrica corrispondono tre rette verticali di riferimento sul fotogramma che permettono una determinazione precisa della lunghezza d'onda.

PARTE ELETTRICA.

La pila termoelettrica di MOLL F_p fungente da rivelatore e misura della radiazione infrarossa è del tipo lineare, avente cioè tutte le saldature attive disposte in linea retta dietro la fenditura. Le saldature fredde sono fissate a blocchetti di rame isolati, la cui capacità termica è molto superiore a quella dei termoelementi in modo che la pila lavora stabile e risente poco delle variazioni di temperatura ambiente.

La pila è composta di 30 termoelementi di costantana-manganina dello spessore di circa 5μ e raggiunge l'equilibrio di temperatura in due secondi; la sua resistenza totale è di 20 Ohm e la f. e. m. prodotta è di $0,75 \cdot 10^{-8}$ volta per $1 \text{ erg/cm}^2 \text{ sec.}$ con la fenditura di mm. 1.

Le f. e. m. prodotte dalla pila termoelettrica vengono condotte mediante due grossi fili ben isolati, al galvanometro primario dell'amplificatore a termorelais G_p .

Questo galvanometro è del tipo originale di MOLL, a sospensione tesa, costruito dalla KIPP e ZONEN ed ha una resistenza interna di 55 Ohm con una sensibilità di circa $68 \cdot 10^{-8} \text{ V}$ e $90 \cdot 10^{-10} \text{ Amp. per mm. 1}$ di deviazione su una scala a 1 metro di distanza, quando è chiuso su una resistenza esterna di 20 Ohm.

Il funzionamento dell'amplificatore e termorelais è il seguente: un raggio luminoso, partendo da una lampada fissa L_3 va a cadere sullo specchietto del galvanometro primario G_p da cui viene riflesso e concentrato, mediante una lente cilindrica, nel centro del termorelais T_r che è

costituito da due termoelementi nel vuoto uniti a formare un'unica lamina dritta e connessi in serie ed in opposizione.

Quando il raggio è nel centro del termorelais le due saldature vengono riscaldate ugualmente per cui la f. e. m. prodotta è uguale dalle due parti e poichè le due pile sono in opposizione la differenza di potenziale agli estremi è nulla; se il raggio si sposta, in un senso o nell'altro, una delle saldature viene riscaldata più dell'altra ed agli estremi del termorelais si ha una differenza di potenziale data dalla differenza fra le f. e. m. prodotte dalle due saldature. Per una sufficiente intensità del raggio luminoso tale differenza di potenziale può essere anche 100 volte più grande di quella che produce la deviazione del galvanometro primario; l'amplificazione si regola variando, mediante il reostato R , la corrente di alimentazione della lampada L_3 , corrente che viene ricavata da una batteria di accumulatori da 6 volta a forte amperaggio, allo scopo di avere un'accensione costante.

Le f. e. m. amplificate del termorelais sono quindi condotte al galvanometro secondario G_s le cui deviazioni vengono rivelate mediante la lampada L_1 e registrate sul registratore a tamburo R_g . Questo apparecchio è munito di una divisione millimetrica esterna, di un sistema di fenditure e di una lente cilindrica per ottenere un punto luminoso netto, ed è fatto ruotare sincronicamente rispetto al prisma dello spettrometro da un motore ad orologeria a scappamento M_r . Di fronte alla fenditura del registratore è posta inoltre la lampada che registra, come abbiamo detto sopra, ad ogni terzo di giro della vite micrometrica dello spettrometro le rette di riferimento che determinano la posizione esatta del tamburo rispetto al prisma.

La messa in funzione e la regolazione dell'apparecchio si fanno nel modo seguente: mediante una lampada a sodio posta di fronte alla fenditura dello spettrometro si controlla la posizione degli specchi in modo che quando il tamburo della vite micrometrica è sullo zero la riga gialla del sodio coincida perfettamente con la fenditura della termopila. Fatto questo si accendono le lampade, NERNST compresa, affinché tutta l'apparecchiatura raggiunga l'equilibrio termico e le lampade vadano a regime.

Si cortocircuita il galvanometro secondario e si fissa lo zero della sua traccia luminosa sulla scala del registratore: poi si inserisce il termorelais e lo si regola mediante apposita vite micrometrica in maniera che il suo punto di zero coincida con quello del galvanometro; finalmente si collega al galvanometro primario la termopila dello spettrografo: se questa ha raggiunto l'equilibrio termico il galvanometro secondario non segna alcun passaggio di corrente.

Una volta raggiunto l'equilibrio termico si installa la vaschetta di assorbimento sull'apposito supporto di fronte alla fenditura e, togliendo lo sportello di chiusura della custodia, si fa cadere il raggio della lam-

pada NERNST, attraverso la vaschetta, sulla fenditura dello spettrometro. Si mette allora in moto lo spettrometro ed il registratore e, dopo aver aperto la fenditura di questo, si inizia la registrazione. La regolazione del galvanometro, del termorelais e dello spettrometro viene controllata quando si voglia mediante gli interuttori che, cortocircuitando i galvanometri, li fanno tornare alla posizione di zero.

Con ambiente a temperatura costante l'apparecchiatura raggiunge l'equilibrio termico in circa 30 minuti.

Il prisma usato è di vetro flint, fornitoci dalla casa KIPP e ZONEN, ha un angolo di rifrazione di $60^{\circ} 17' 31''$ ed un indice di rifrazione $= 1,7197$ misurato sul doppietto del sodio.

Per la taratura dell'apparecchio ci siamo serviti di righe spettrali note: partendo sempre come si è detto dalla riga gialla del sodio cioè da 5890 \AA che è lo zero del nostro strumento, abbiamo determinato la posizione esatta anzitutto della banda d'emissione del mercurio a $1,014 \mu$ già usata da FREYMAN (4) e delle due bande di assorbimento del benzolo a $1,1409$ e $1,770 \mu$ che furono misurate esattamente da BAZUES e FULWEILER (5) e furono usate con vantaggio da B. STANSFELD e ROTH (6) per tarare il loro strumento. Abbiamo così costruito una curva che ci ha permesso una approssimazione che per il momento riteniamo sufficiente: poichè le lunghezze d'onda che noi calcoliamo per le due bande di cui ci occupiamo particolarmente concordano abbastanza bene coi dati già esistenti nella letteratura.

Le esperienze sono state condotte preferibilmente di sera, per evitare i disturbi esterni di qualsiasi genere, in una sala mantenuta alla temperatura costante di 16° . Le vaschette di assorbimento usate, ci furono fornite dalla casa HILGHER e sono limitate da lastrine di vetro a faccie piane parallele; lo spessore di liquido è di mm. 4.

I prodotti usati, quasi tutti di KAHLBAUM, furono accuratamente ridistillati.

I primi autori che hanno effettuato misure di assorbimento degli acidi grassi a catena normale sono stati ABNEY e FESTING (7) che hanno studiato gli spettri di assorbimento dei primi quattro termini della serie, nel campo del visibile, cioè fino a circa 1μ ; COBLENTZ (8) ha esaminato un più vasto numero di acidi e cioè il caproico e l'oleico da 1 a 3μ e gli acidi acetico, n-valerianico, caproico, isocaproico, oleico, stearico, cerotico da 2 a 14μ .

Egli quasi non accenna alle due bande a $1,2$ e $1,4$ ma riconosce che negli acidi vi sono sei bande intense nel campo da $3,4$ a $13,8 \mu$. Più tardi, nel 1927 (9), BENNETT e DANIELS esaminando gli acidi cloroacetici in soluzione di tetracloruro di carbonio mettono in evidenza che la sostituzione di ogni atomo di idrogeno da parte del cloro, porta ad uno spostamento della banda a $5,8 \mu$ verso le minori lunghezze d'onda; altre misure

delle bande di assorbimento degli acidi sono state effettuate da SAPPENFIELD⁽¹⁰⁾ per l'acido butirrico, da EICHMANN⁽¹¹⁾ per l'acido propionico, e da ROTH⁽¹²⁾ per l'acido formico.

Gli unici autori che si sono occupati particolarmente delle bande di assorbimento a 1,2 e 1,4 μ sono SAPPENFIELD⁽¹³⁾ e BLANDINA STANNSELD⁽¹⁴⁾. Il primo ha rilevato fra l'altro come possa essere interessante considerare il variare dell'intensità delle bande di assorbimento nelle serie omologhe, cioè in gruppi di sostanze chimicamente simili, che differiscono per un $-\text{CH}_2$ l'una dall'altra. Prima di lui però, già BONINO⁽¹⁵⁾ aveva fatto importanti osservazioni sul variare della forma e dell'intensità delle bande col variare del peso molecolare e col variare del numero di gruppi sostituenti uguali nella molecola. Questo autore si è particolarmente occupato della banda doppia degli alcool a 3,0 e 3,4 μ ed ha messo in evidenza come, a parità di numero di atomi di carbonio, l'introduzione nella molecola di un nuovo ossidrilico porta un aumento nell'intensità del massimo della banda a 3,0 μ mentre diminuisce l'intensità della banda a 3,4 μ quindi « la sostituzione di un idrogeno legato direttamente al carbonio porta una diminuzione nel massimo della banda a 3,4 μ : questa conclusione, egli dice, aggiunge ancora una alle numerose conferme della dipendenza tra l'intensità del massimo a 3,4 μ circa ed il numero di atomi di idrogeno legati nella molecola direttamente al carbonio ».

Le due bande che noi consideriamo hanno, rispetto alla variazione d'intensità di assorbimento, lo stesso comportamento delle due bande degli alcool a 3,0 e 3,4 μ , come si può vedere dall'ultima colonna della

tabella I che dà il rapporto $\frac{I}{I_0}$. Questo rapporto è stato fatto secondo CORLENTZ⁽¹⁶⁾: e cioè, a parità di ogni altra condizione, ciascun fotogramma di acido grasso si è fatto precedere da un fotogramma della vaschetta vuota; e si è regolato l'apparecchio in maniera che a 1,2 μ la curva avesse sempre un'altezza di mm. 60 circa: poi si è fatto il rapporto fra l'altezza in millimetri delle due curve, nei massimi di assorbimento. La tabella

mostra chiaramente che il rapporto $\frac{I}{I_0}$ cresce per la banda a circa 1,4 μ e diventa più piccolo per la banda a 1,18 μ ; per entrambe tende verso un valore costante. C'è una eccezione per l'acido valerianico che dà un valore più grande di quello che dovrebbe essere: quello usato ci è stato fornito espressamente dalla ditta C. ERBA e bolliva a 184° sotto mm. 750 di pressione; le esperienze saranno quindi rifatte con acido valerianico sintetico per escludere ogni possibilità di inquinamento, poichè come ha dimostrato J. LECOMTE⁽¹⁷⁾ anche l'uno per cento di impurezze può essere rivelato da imperfezioni delle bande di assorbimento.

Nella stessa tabella abbiamo messo il valore del rapporto fra la massima e minima trasparenza dello strato liquido M/m_1 , per la banda

a 1,18 ed M/m_2 per la banda a $1,4\mu$; questi due rapporti sono stati calcolati anche per altri spessori dello strato assorbente, nella speranza che ogni sostanza avesse delle costanti caratteristiche; per il momento questo non si è verificato. Nella stessa tabella sono riportati i valori delle lunghezze d'onda che, come si vede, per l'introduzione di un nuovo CH_2 nella molecola, tendono verso valori di λ più grandi per la banda a 1,18 circa e più piccoli per la banda a $1,4\mu$ circa. Queste due bande quindi hanno un comportamento che è in certo senso l'uno il contrario dell'altro, sia rispetto al variare dell'intensità che rispetto al variare della lunghezza d'onda.

Possiamo quindi concludere con BLANDINA STANNFELD che queste bande hanno origine differente: essa le ha studiate misurando il loro spostamento quando il composto che le presenta è allo stato di liquido o di vapore. Per le bande che ci interessano ha ottenuti i dati dalla tabella II; e conclude che la banda a maggior lunghezza d'onda, che si sposta, è dovuta ad una oscillazione O—H, mentre quella che non si sposta all'oscillazione C—H. SAPPENFIELD considera accanto all'acido butirrico, alcuni alcoli: ora gli alcoli hanno una banda a 3,0 che è certo dovuta all'oscillazione O—H ed un'altra ad 1,5 che logicamente è il suo armonico; egli fa osservare che nè l'una nè l'altra si trovano nell'acido butirrico, e fa quindi qualche riserva circa l'origine della banda di questo composto a $1,4\mu$. Egli poi mette in evidenza in varie sostanze le variazioni di intensità delle bande a 1,2 e $1,4\mu$ e le confronta con quelle delle bande a 0,9 e 1,0 degli alcoli mettendo in relazione i risultati suoi con quelli di WENIGER⁽¹⁸⁾, e di ELLIS⁽¹⁹⁾, e formula l'ipotesi che la banda 1,2 si debba abbinare a quella a 0,9 e quella a $1,4\mu$ a quella ad $1,0\mu$.

Che la variazione d'intensità delle bande non sia un fenomeno del tutto trascurabile lo mostra la fig. 2 dove abbiamo riprodotto parte dei nostri fotogrammi; le linee verticali, sono le rette di riferimento dello strumento, le orizzontali rappresentano lo zero dei fotogrammi. Considerandoli nel loro complesso è evidente una cosa: che non pare sufficiente a definire le bande di assorbimento, o meglio le differenze fra queste bande nel gruppo di omologhi, il fare considerazioni e calcoli solo sul punto di massimo assorbimento; infatti la banda a $1,4\mu$ manca nell'acido formico, è appena accennata nell'acido acetico e si fa via via più ampia con il crescere del peso molecolare: questa cosa appare abbastanza

evidente nei rapporti $\frac{I}{I_0}$; per la banda a $1,18\mu$ invece il rapporto $\frac{I}{I_0}$

diminuisce poichè cresce il valore numerico del punto di massimo assorbimento, mentre nei fotogrammi la banda diventa anch'essa sempre più appariscente: per il momento però non si è trovato un sistema migliore di definire le bande stesse. C'è il fatto poi che la banda a $1,4\mu$ manca nell'acido formico; questo è confermato anche dalle ricerche di ROTH⁽²⁰⁾

che ha esaminato spessori diversi da 1 a 20 millimetri: c'è da domandarsi se veramente questa banda si debba ascrivere all'oscillazione O—H; in un recente lavoro DAVIES e SUTHERLAND ⁽²¹⁾ confermano questo punto di vista esaminando soluzioni di acido benzoico e acetico in tetracloruro

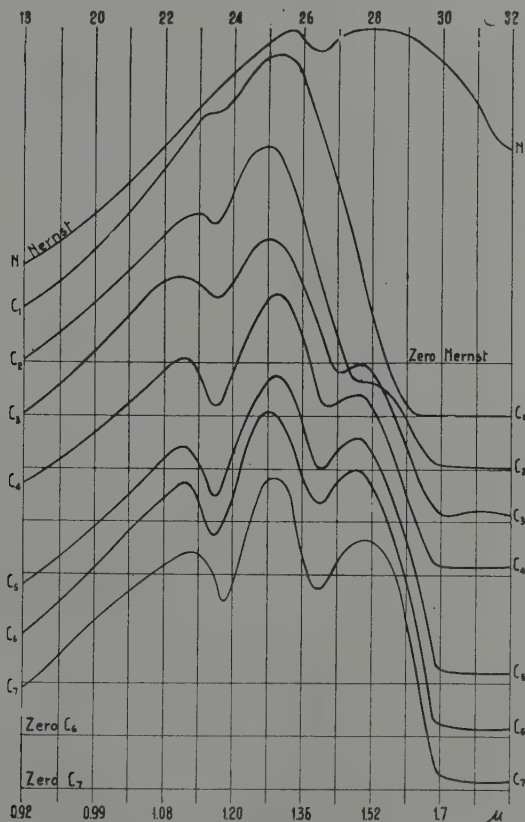


Fig. 2.

di carbonio a 18° e a 75°; essi trovano non solo la banda a 1,4 ma anche la fondamentale a 2,8 μ . Bisogna tenere conto che in questi composti l'associazione molecolare è particolarmente forte ⁽²²⁾.

Se consideriamo la formula dell'acido formico $\text{H}-\overset{\text{O}}{\parallel}{\text{C}}-\text{OH}$ è per lo meno strano immaginare che manchi del tutto una banda caratteristica dell'oscillazione O—H; i dati della letteratura non ci dicono se esso possiede almeno quella che appare la fondamentale a 2,8 μ ; come se ciò non

bastasse le misure di SALANT⁽²³⁾ dicono che l'aldeide formica ha a 1,44 ed a 1,40 μ due bande che appaiono come un doppietto: ed in questo caso non si può certo attribuirle all'oscillazione O—H. Ci proponiamo quindi di continuare gli studi anche in questo senso.

TABELLA I.

acido λ	M/m_1	M/m_2	$\frac{I}{I_0}$	%
formico	1,162	81	95,8	
acetico	1,170	76	90,8	
	1,466	28		27,0
propionico.	1,170	66,4	83,6	
	1,456	45		45,3
butirrico	1,176	62	75,0	
	1,400	60		49,2
capronico.	1,176	62	71,2	
	1,400	69		65,1
valerianico.	1,180	62	75,0	
	1,396	70		72,5
eptilico	1,190	62,5	65,3	
	1,396	67		63,4

TABELLA II.

alcool etilico . . .	liquido		1,576 μ
	vapore		1,622
acido acetico . . .	liquido	1,190 μ	1,460 μ
	vapore	1,190 μ	1,414 μ

da B. STANNSFELD, loc. cit.

BIBLIOGRAFIA

-
- (1) LECOMTE, *Le spectre infrarouge*, Paris, 1928; RAWLIS and TAYLOR, *Infrared Analysis*, Cambridge, 1929; SCHAEFER und MATOSI, *Das ultrarote Spektrum*, Berlin, 1930. Vedi anche il capitolo che J. LECOMTE dedica a questo argomento nel vol. II a pag. 43 del grande trattato *Chimie Organique*, diretto da V. GRIGNARD, Parigi, 1936.
 - (2) BONINO, « Gazz. Chim. It. », 53, 555 (1923).
 - (3) L. PASSERINI, « Gazz. Chim. It. », 63, 305 (1933).
 - (4) FREYMAN, *Thèse*, Paris, 1933.
 - (5) BARNES and FULWEILER, « Journ. of the Am. Chem. Soc. », 49, 2034 (1927).
 - (6) ROTH, « Zeit. f. Physik », 87, 192 (1933).
 - (7) ABNEY e FESTING, « Phyl. Trans. », 172, 887 (1881).
 - (8) COBLENTZ, *Investigations of infrared spectra*, 1905.
 - (9) BENNET and DANIELS, « Journ. of the Am. Chem. Soc. », 49, 50 (1927).
 - (10) SAPPENFIELD, « Phys. Rew. », 33, 37 (1929).
 - (11) EICHMANN, « Zeit. f. Phys. », 82, 461 (1933).
 - (12) ROTH, loc. cit.
 - (13) SAPPENFIELD, loc. cit.
 - (14) STANNSFELD, « Zeit. f. Phys. », 74, 466 (1932).
 - (15) BONINO, « Gazz. Chim. It. », 56, 286 (1926); « Atti della Soc. Ligustica », vol. I, pag. 1 (1926); « Gazz. Chim. It. », 56, 296. (1926).
 - (16) COBLENTZ, loc. cit.; « Astrophysic. Journ. », 20, 207 (1904).
 - (17) LAMBERT et LECOMTE, « Ann. de Physik », 18, 329 (1932); vedi anche FREYMAN « C. R. », 193, 928, 1931.
 - (18) WENIGER, « Phys. Rew. », 31, 388 (1910).
 - (19) ELLIS, « Phys. Rev. », 27, 298 (1926).
 - (20) ROTH, loc. cit.
 - (21) DAVIES e SUTHERLAND, « Nature », 141, 372 (1938).
 - (22) SALANT, « Phys. Rew. », 33, 640 (1929).
 - (23) NAHERNIAC, « C. R. », 200, 1742 (1935); LONGINESCU, « Chem. Rev. », 6, 381 (1919).
-

Geologia. — *Sulla tettonica dell'Appennino Romagnolo.*
Nota di ROBERTO SIGNORINI, presentata ⁽¹⁾ da GIUSEPPE
CHECCHIA RISPOLI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Espongo in questa Nota preliminare, a grandi linee riassuntive, i principali risultati degli studi e rilevamenti che ho finora compiuti nell'Appennino Romagnolo, prendendo in particolare considerazione quanto concerne la tettonica della formazione marnoso-arenacea costituente quella regione e i suoi rapporti con le argille scagliose.

FORMAZIONE MARNOSO-ARENACEA ROMAGNOLA E ARGILLE SCAGLIOSE.
— Due nomi che ricordano due dibattutissime e vastissime questioni di geologia appenninica. La prima, concernente l'età della formazione marnoso-arenacea romagnola, fa parte della così detta « questione eomiocenica dell'Appennino » che oggi si può considerare in linea generale terminata con l'attribuzione ammessa ormai da tutti, salvo per alcune zone particolari, al Miocene. La seconda questione « natura ed età delle argille scagliose », che tanta parte occupa nella letteratura geologica sull'Appennino Settentrionale, tende oggi ad avere una nuova impostazione col venire le argille scagliose sempre più considerate non in posto, ma in ricoprimento, sia per carreggiamento sia per scivolamento, sopra ai terreni terziari regolarmente sedimentati.

Il concetto che mi sono formato in proposito, e che risulta da miei precedenti lavori su varie regioni dell'Appennino Settentrionale ⁽²⁾, è che si tratti di materiale proveniente per ciascuna zona da una regione più interna, in seguito al sollevamento e al corrugamento orogenico della quale esso è scivolato a guisa di frana sulla superficie inclinata verso l'avanfossa, ricoprendo man mano terreni più recenti della zona più esterna non ancora

⁽¹⁾ Nell'Adunanza del 19 gennaio 1940-XVIII.

⁽²⁾ R. SIGNORINI, *Linee tettoniche trasversali nell'Appennino Settentrionale*. « Rend. R. Acc. Lincei », 1935; *Il ricoprimento di Casaglia e del gruppo del Monte Carzolino*. « Boll. Soc. Geol. It. », 1937; *Una vasta zona a strati rovesciati tra l'Idice e il Setta nell'Appennino Bolognese*. « Boll. Soc. Geol. It. », 1938; *Osservazioni geologiche sull'alto Appennino Bolognese*. « Boll. Soc. Geol. It. », 1939.

corrugata. Tale arrivo e avanzamento di materiale ha potuto rinnovarsi per ogni nuovo impulso di movimenti orogenici e propagarsi man mano a zone sempre più esterne, con ricoprimento su terreni sempre più recenti. Sopravanzamento avvenuto per azione della gravità, conforme al concetto del BONARELLI di scivolamento di materiale plastico lungo un piano inclinato ⁽¹⁾, e conforme al concetto delle « frane orogeniche » del MIGLIORINI quali spandimenti per gravità dei corrugamenti orogenici ⁽²⁾.

Con tali concetti le argille scagliose assumono un significato meccanico e tettonico, mentre non è più da porsi il problema generale della loro età: con i fossili si può determinare l'età di singole parti costituenti, che possono essere e sono varie. L'età del movimento, dell'arrivo delle argille scagliose è determinabile ed ha significato soltanto entro certi limiti, in quanto che tali movimenti sono stati multipli e si sono continuati e ripetuti per lunghi periodi, e risultano differenti da luogo a luogo.

Per lo più ha importanza determinare per una singola zona l'età del primo arrivo delle argille scagliose. Così ho trovato che nell'area dell'Appennino Romagnolo esse sono giunte soltanto dopo la sedimentazione mesomiocenica, su cui esse poggiano; mentre nell'alto Appennino Modenese il loro arrivo è soltanto postoligocenico, ricoprendo esse la formazione arenacea oligocenica mentre il Miocene medio è sedimentato sopra; e nell'alto Appennino Parmense e Piacentino è preoligocenico.

Nell'Appennino Emiliano si sviluppano ampiamente le argille scagliose con masse ofiolitiche e col caratteristico mosaico di placche di formazioni diverse smembrate, convogliate e giustaposte; e i terreni miocenici hanno facies mollassica, talora marnosa, e sono in lembi sempre sovrastanti alle argille scagliose. Al contrario nell'Appennino Romagnolo le argille scagliose rimangono limitate, salvo pochi e piccoli lembi interni, ai suoi lati estremi: zona della valle del Marecchia a SE che lo divide dall'Appennino Umbro-Marchigiano, e zona tra la valle del Sillaro e quella dell'Idice a NO che lo separa dall'Appennino Emiliano, corrispondenti a due grandi zone trasversali rispetto alle direttrici generali appenniniche.

Tra questi due limiti l'Appennino Romagnolo si estende per una lunghezza di 80 chilometri e una larghezza di 35, formato, con costituzione e carattere unitari, da sedimenti del Miocene medio di facies diversa da quella emiliana: marnoso-arenacea. Questa si presenta come una potentissima pila di materiale terrigeno, tutto regolarissimamente stratificato con alternanza di arenarie e marne, di colore grigio cenere, con carat-

⁽¹⁾ G. BONARELLI, *Regioni petrolifere italiane: Appennino Settentrionale*. « La Miniera It. », 1929; *Particolari di struttura nel Preappennino Bolognese*. « Boll. Soc. Geol. It. », 1931.

⁽²⁾ C. MIGLIORINI, *Considerazioni su di un particolare effetto dell'orogenesi*, « Boll. Soc. Geol. It. », 1933.

teri uniformi per grande estensione sia orizzontale sia verticale. I fossili sono scarsi, ma sparsi su tutta l'estensione e sufficienti ad assicurarne l'età mesomiocenica. Non sono invece tali da permettere delle suddivisioni in piani, nè queste possono farsi in base a differenze litologiche. Al bordo NE la formazione marnoso-arenacea giunge al Miocene superiore, caratterizzato dalla zona dei gessi; questo si immerge a sua volta sotto alle argille plioceniche della zona marginale padano-adriatica. Questo limite settentrionale segnato dalla « linea del gesso » decorre per Mercato Saraceno, Linaro, Cusercoli, Monte Casole, Brisighella, Tossignano e Gesso.

Il bordo SO è segnato pure da un limite netto, corrispondente a una linea tettonica lungo la quale la formazione marnoso-arenacea romagnola viene accavallata dalla formazione marnoso-arenacea immediatamente più interna e più antica: quella cioè che si sviluppa al bordo NE del bacino casentino e tutt'intorno al bacino del Mugello e che è riferibile per la sua fauna a Lepidocicline e Miogypsine all'Oligocene e forse anche al Miocene inferiore. Questa linea di dislocazione, limite SO, passa per Corezzo, Val della Meta, Badia a Prataglia, Passo dei Fangacci, Passo Porcareccio, Monte Giogarello, Monte Falterona, a SO di Castagno e di San Godenzo, Villore, Gattaia, Ronta, fino all'Ommorto sotto al Giogo; essa decorre tutta sul versante toscano dell'Appennino la cui dorsale è costituita quindi dalla formazione marnoso-arenacea mesomiocenica come tutto il versante romagnolo fino alla linea dei gessi.

Non ha dunque luogo di esistere la grande linea di ripartizione tra due terreni (Eocene e Miocene o Miopliocene) segnata longitudinalmente attraverso l'Appennino Romagnolo nelle varie carte geologiche del Sacco (al 500.000 e al 100.000) e nella carta geologica d'Italia al milionesimo del 1931. Tra le due regioni che risultano così divise si constata sul terreno identità litologica, continuità di strati, omologia di reperti paleontologici. Entro i limiti sopra indicati, tutta l'estensione dell'Appennino Romagnolo è costituita da un'unica formazione marnoso-arenacea del Miocene medio e va quindi segnata, finchè non si avranno criteri più precisi di suddivisione, con un solo colore, salvo alcuni lembi di argille scagliose e materiale convogliato di cui dirò più avanti.

IL TIPO DI STRUTTURA. — L'assenza, o quasi, delle argille scagliose in tutta la vasta estensione dell'Appennino Romagnolo mi aveva condotto a ricercare quivi un tipo di struttura dell'Appennino Settentrionale, non mascherato e alterato come nell'Appennino Emiliano. Ho trovato infatti nell'Appennino Romagnolo ampie strutture che si ripetono con legge costante e che i rilievi morfologici vivi e giovanili della formazione marnoso-arenacea, tutta bene stratificata, rendono facilmente osservabili.

Il tipo strutturale dominante in tutto l'Appennino Romagnolo è caratterizzato da un succedersi di ampie zone a strati molto regolari e

tranquilla, ora con pendenze medie a SO ora suborizzontali, e di zone ristrette di brusca intensa dislocazione, sempre a pieghe ribaltate verso NE. Queste linee di dislocazione hanno andamento longitudinale e risultano parallele fra loro. Non vi è proporzione tra l'intensità di dislocazione lungo queste linee e la tranquillità delle larghe zone intermedie. La spinta che ha prodotto le deformazioni non può essersi trasmessa tangenzialmente attraverso la massa degli strati marnoso-arenacei. Questa struttura, a deformazione discontinua, rappresenta il riflesso nel complesso plastico superiore dei movimenti di un substrato più rigido spezzatosi, in corrispondenza dei piani di dislocazione che appaiono alla superficie, in blocchi scuneantisi e accavallantisi, secondo il modo di fratturazione e di scorrimento di un corpo sottoposto a compressione.

Ogni zona a strati tranquilli della formazione miocenica tende a disporsi con una lieve sinclinale presso la dislocazione a monte, e va sollevandosi verso valle con generale pendenza a SO man mano crescente fino a flettersi bruscamente con sovraspinta a NE. Si avvicina a una struttura a scaglie embricate, ma attenuate, appena iniziate. Appare ovvio che la continuazione del movimento avrebbe portato all'accavallarsi di una zona sopra la successiva a valle.

L'accavallamento con sovraspinta a NE, spesso con scaglie multiple vergenti a NE, l'ho realmente osservato nella regione più interna, sul bordo settentrionale del Casentino ⁽¹⁾ e sul bordo settentrionale del Mugello ⁽²⁾; tale movimento tende a continuare, attenuandosi, nella più esterna regione romagnola, dando luogo al tipo strutturale sopra indicato. La struttura del substrato rigido calcareo a blocchi separati da piani di scorrimento e di accavallamento è quella che si constata in altre regioni appenniniche dove questo substrato è sollevato ed inciso, come per esempio nell'Appennino Latino-Abruzzese ⁽³⁾. Il MIGLIORINI ha interpretato con questo tipo di struttura la tettonica casentinese ⁽⁴⁾, più interna rispetto a quella qui descritta; e ritiene che questo sia il motivo strutturale dominante in tutto l'Appennino, come ha figurato nella sua sezione geologica attraverso la Fossa Bradanica ⁽⁵⁾.

⁽¹⁾ R. SIGNORINI, *Osservazioni geologiche sul bordo settentrionale del Casentino*, « Boll. Soc. Geol. It. », 1936.

⁽²⁾ R. SIGNORINI, *Osservazioni geologiche sul bordo settentrionale del Mugello*. In preparazione.

⁽³⁾ E. BENE, *Sezione geologica della penisola italiana dal Tirreno all'Adriatico attraverso l'Appennino Laziale ed Abruzzese*. « Boll. R. Uff. geol. It. », 1939.

⁽⁴⁾ C. MIGLIORINI, *Alcune questioni geologiche casentinesi*. Firenze, 1936.

⁽⁵⁾ C. MIGLIORINI, *Cenno sullo studio e sulla prospezione petrolifera di una zona dell'Italia meridionale*. Roma, 1937.

Descrivendo ora, pure in compendio stretto, le singole linee e zone tettoniche dell'Appennino Romagnolo, si ha un'illustrazione delle caratteristiche strutturali ora indicate.

LINEE TETTONICHE. — Sul bordo settentrionale del Casentino, dal Poggio dei Tre Vescovi al gruppo della Falterona, la formazione marnoso-arenacea romagnola ha inizio lungo la linea di accavallamento precedentemente indicata e si erge, con pendenze a SO a formare una prima lunga piega anticlinale ribaltata a NE. Questa costituisce la dorsale spartiacque dell'Appennino: Monte Nero, Montalto, Alpuccia, Zuccherodante, Mandrioli, Termine; poi continua verso NO, lungo le pendici settentrionali della dorsale, per il Poggio della Bertesca, il Poggio Capannino e le Case Castagnoli a NE di Campigna.

Parallelamente a questa piega, lunga oltre 25 chilometri, decorre a 5-7 km. più a valle un'altra anticlinale con la stessa struttura ribaltata a NE. Questa ha inizio presso S. Piero in Bagno e passa per Monte Marino, Corniolo, e il Monte dell'Avorgnolo, fino ad attraversare la valle del Rabbi poco sotto Castel dell'Alpe. Tra le due linee di intensa dislocazione gli strati rimangono tranquilli: essi formano una sinclinale a lievi pendenze prossima al margine del primo ribaltamento e poi si estendono a monoclinale con sentite pendenze a SO che infine crescono rapidamente per rovesciarsi nella nuova dislocazione. Segue a valle di quest'ultima una seconda zona tranquilla, disposta in sinclinale con pendenze sui 15° e fondo pianeggiante; l'asse è avvicinato alla dislocazione a monte e quindi prevale la parte pendente a SO. Questa è limitata a valle da una nuova brusca dislocazione dello stesso tipo, parallela alla precedente da cui dista 7-8 km. e passante per Saviana, S. Sofia, Monte Crocetta, Monte Prignolaia e Monte S. Marco fino a sud di Portico.

Lungo il bordo settentrionale del Mugello, sul decorso già indicato della linea di dislocazione dalla valle di Castagno fino sotto al Giego, gli strati marnoso-arenacei romagnoli, per la sovraspinta dell'altra formazione, sono bruscamente raddrizzati e ribaltati verso NE. Dopo il piano assiale, assai abbattuto, della cerniera a gomito di questo ribaltamento marginale, gli strati si stendono tranquilli, lievemente inclinati a NE, e poi delineano ampie lievi sinclinali: quella che dal Poggio Piano, a nord della Falterona, passa per il Muraglione e Castagneto, ha l'ala settentrionale limitata da una nuova brusca dislocazione ad anticlinale ribaltata a NE passante per Casa Forcone in valle del Rabbi e per la Fonte in Val Montone, parallelamente alla dislocazione marginale da cui dista km. 5.

Più a NO, tra la dislocazione marginale nel tratto Villore-Gattaia-Ronta e una parallela dislocazione pure vergente a NE, che passa per Farfereta di Campigno, la Grogana degli Allocchi, Razzolo, e si prolunga fin presso Osteto, si stende una zona tranquilla larga 4 km., a strati con

lievissime pendenze a NE che soltanto alle pendici meridionali della Gio-gana si volgono in dolce sinclinale. Più a valle della seconda linea di dislocazione si estende un'altra zona tranquilla, con larghezza crescente da SE verso NO. In prossimità della detta dislocazione Farfaretà-Razzolo-Osteto, vi si svolge un'ampia sinclinale che si inizia periclinalmente a Campigno e con immersione assiale verso NO prosegue allargandosi per Crespino e l'alta valle del Rovigo. Lo sviluppo dell'ala NE con crescente pendenza, dà luogo a una larga zona monoclinale in cui gli strati inclinano sempre a SO sui 20-25°. L'inclinazione va poi crescendo rapidamente fino a ripiegarsi e rovesciarsi nell'erta anticlinale ribaltata a NE che si svolge con continuità per tutta la lunghezza dell'Appennino Romagnolo. In continuazione del tratto visto precedentemente fino al Monte dell'Avor-gnolo e a Castel dell'Alpe, essa decorre per Monte Gemelli, San Bene-detto, Monte Susinelli, Monte del Becco, Monte di Gamogna, passa il Lamone tra Biforcio e Marradi, continua al Monte Carnevale, poco a valle di Palazzuolo, sulle pendici SO del Monte Faggiola, per Tirli e San Michele. Questa dislocazione si segue così per una lunghezza di 60 km. Struttu-ralmente essa si presenta pressochè costante lungo tutto il suo decorso: gli strati pendenti a SO della grande monoclinale a monte accrescono rapidamente la loro inclinazione da 20 a 40 e 50° fino a ripiegarsi e ribal-tarsi; agli strati rovesciati con forte inclinazione a SO e spesso con spiegaz-zamenti, fa seguito un raccordo a gomito, con piano assiale vergente a NE, con immediato passaggio alla successiva zona a strati quasi pianeg-gianti. L'andamento di questa dislocazione lunghissima non è parallelo al margine SO della formazione marnoso-arenacea e alla cresta dell'Appen-nino, ma va allontanandosi sempre più da questi man mano che procede verso NO: mentre nella valle del Montone essa non dista che 4 chilometri dalla dislocazione precedente a monte, la distanza diviene di 11 chilometri presso Palazzuolo.

La grande area a strati poco dislocati, piuttosto pianeggianti, che si estende a NE dell'anticlinale principale ora descritta, ha inizio per lo più con un'ampia sinclinale a lievi pendenze. Tra la parte orientale della anti-clinale principale e la successiva piega di Santa Sofia-Monte San Marco precedentemente indicata, il fondo della sinclinale passa per Isola e il Monte della Fratta, attraversa il Rabbi 2 chilometri a monte di Premil-cuore; poi attraversa il Montone tra San Benedetto e Bocconi e prosegue fino a Gamogna. Da poco prima di Gamogna a poco dopo Marradi, in corrispondenza del tratto di massimo sollevamento dell'Appennino Ro-magnolo, sorge adiacente alla piega principale ribaltata, una dolce onda anticlinale regolare, lunga 7 km., passante per il Monte di Gamogna, il Monte Scarabattole e Marradi. La sinclinale del tipo sopra descritto riprende a valle di questa onda: è la sinclinale di Popolano, il cui asse si accosta sempre più, verso NO, alla piega principale ribaltata, finchè nei

pressi di Palazzuolo non ne rimane più che l'ala settentrionale. Ma tosto un po' più all'esterno si forma, nella valle del Senio, presso Casa della Croce, un'altra sinclinale che sostituisce la precedente: è la sinclinale del Monte Faggiola e di Moraduccio sul Santerno.

Al solito queste sinclinali si trovano nella parte SO dell'area a strati tranquilli che poi si sollevano verso NE, fino ad un'ulteriore brusca piega ancora ribaltata a NE: la dislocazione che dalla Valle Acerreta, passando per il Monte Budrialto e a sud di San Cassiano in valle del Lamone, prosegue fino a Mercatale in Val Senio ed oltre, distando 6-7 km. dalla piega principale. Condizioni che si ripetono ad est della Valle Acerreta con sostituzione di pieghe: a valle della sinclinale di Tredozio, che è nel cuore di un'ampia area a pendenze lievissime, prevale l'inclinazione leggera a SO fino al brusco ribaltamento nella dislocazione del solito tipo che passa tra Rocca San Casciano e San Ruffillo, per il Monte Porticino, il Monte Pratello e le Capanne in Valle Acerreta. A una distanza di 4-5 km. più a valle, dopo una dolce sinclinale passante per San Ruffillo, Modigliana e Fognano, si ha un'ultima piega anticlinale da Dovadola a Strada presso Brisighella, oltre la quale gli strati marnoso-arenacei si immergono sotto alla formazione gessifera marginale.

I LEMBI INTERNI DI ARGILLE SCAGLIOSE. — Le argille scagliose, che tanto si sviluppano nelle due aree fiancheggianti, feltresca e bolognese, non si trovano che in rari piccoli lembi nell'interno dell'area romagnola. Uno di questi lembi, situato presso Casaglia nell'alta valle del Lamone, con una lunghezza di km. 4 $\frac{1}{2}$ e una larghezza massima di 1 km., che non figura sulle carte geologiche (Foglio « Faenza » della Carta geologica d'Italia al 100.000), presenta un notevole interesse tettonico ⁽¹⁾ perchè rivela l'esistenza di un ordine di fenomeni nuovo nell'Appennino Romagnolo.

Questo lembo di argille scagliose infatti riposa sopra alla formazione marnoso-arenacea mesomiocenica, entro la sinclinale di Crespino adiacente al fianco esterno dell'anticlinale ribaltata della Grogana e di Razzole precedentemente indicata, e sostiene a sua volta una potente pila di strati marnoso-arenacei eguali a quelli sottostanti e foggianti nella stessa piega sinclinale. In continuazione dei due estremi di questo lembo di argille scagliose ho trovato una sottile zona anomala in cui si localizzano intense azioni meccaniche e che si intercala come un orizzonte costante nella grande pila di strati marnoso-arenacei tranquilli, circoscrivendo completamente la massa marnoso-arenacea soprastante (gruppo del Monte Carzolanò), così da farmi ritenere quest'ultima sopravanzata in ricoprimento insieme alle argille scagliose, dopo staccata dal substrato

⁽¹⁾ R. SIGNORINI, *Il ricoprimento di Casaglia ecc.* « Boll. Soc. Geol. It. », 1937.

più a SO. L'età dell'arrivo di queste argille scagliose risulta qui posteriore al Miocene medio, su cui poggiano, e anteriore al corrugamento che ha piegato insieme il substrato e il ricoprimento.

Un altro lembo di argille scagliose si trova a partire dal bordo NO della formazione marnoso-arenacea tra Belmonte e Visignano, e si addentra in lunga stretta striscia longitudinale fin sulla destra del Santerno, compresa tra i sottostanti strati del fianco settentrionale dell'anticlinale principale e la soprastante pila del Monte la Fine. In continuazione di quella striscia ho trovato una sottile zona di frizione nel gruppo del Monte Faggiola, la quale, con un fenomeno analogo a quello di Casaglia, delinea un altro lembo di ricoprimento, anch'esso foggato in sinclinale, nel gruppo del Monte Faggiola e del Monte la Fine.

Questi lembi di ricoprimento si trovano ambedue all'estremità NO dell'Appennino Romagnolo, dove le pieghe immergendosi verso NO lasciano conservate le parti più alte. Non ne ho trovati nella parte centrale dell'Appennino Romagnolo, tra il Lamone e il Bidente, dove esso è più sollevato. Avvicinandosi invece all'altra estremità, con l'immergersi delle pieghe verso SE ricompaiono simili fenomeni.

Infatti a SE di Santa Sofia ha inizio una lunga zona longitudinale in cui compaiono delle argille marnose grigie nella parte superiore della formazione marnoso-arenacea, e sopra ad esse poggiano lembi di tipiche argille scagliose con placche di arenarie diverse dalla solita formazione marnoso-arenacea romagnola, di tipo più antico (analogo a quello che ho chiamato « di Monghidoro » nelle mie descrizioni dell'Appennino Bolognese ⁽¹⁾); queste arenarie presentano talora alla base strati di calcare marnoso con breccioline nummulitiche. Sono costituiti da questa diversa formazione il Poggio del Carnaio, Montegranelli e, al di là del Savio, il gruppo del Monte Comero col Poggio le Corsicchie. Alcuni lembi di argille scagliose di questa zona anomala sono indicati sulla recentissima carta geologica del PRINCIPI (Foglio « Mercato Saraceno » della Carta geologica d'Italia al 100.000) che le interpreta però come intrusioni diapiriche di sottostanti argille scagliose entro un'unica serie di sedimenti mesomiocenici ⁽²⁾.

È invece da porre in rilievo la continuità di questo complesso eteroclitico disposto in striscia longitudinale, a forma sinclinale, nettamente distinta dalla solita formazione marnoso-arenacea che la fiancheggia a SO e a NE. Ad est del Monte Comero essa si prolunga nel Monte Fumaiolo,

⁽¹⁾ R. SIGNORINI, *Una vasta zona ecc.* « Boll. Soc. Geol. It. », 1938; *Oss. geol. sull'alto Appennino Bolognese.* « Boll. Soc. Geol. It. », 1939.

⁽²⁾ P. PRINCIPI, *Relazione al rilevamento geol. del quadrante al 50.000 Mercato Saraceno.* « Boll. R. Uff. geol. It. », 1936.

con sviluppo delle argille scagliose, sparse di placche di calcari marnosi e di lembi di un Miocene medio arenaceo e calcareo organogeno di facies litoranea, ben diversa da quella marnoso-arenacea. Queste argille scagliose occupano tutta la sommità spartiacque tra l'alta valle del Tevere e il versante Romagnolo, mentre le pendici e i fondivalle di ambedue i versanti sono incisi nella grande massa della formazione marnoso-arenacea, per me indubbiamente sottostante. Questa striscia longitudinale raggiunge presso Badia Tedalda la striscia trasversale feltresca che limita a SE l'Appennino Romagnolo.

Per completare il quadro dei lembi di argille scagliose interni all'area della formazione miocenica romagnola, segnalo l'esistenza di una serie di piccoli affioramenti di argille scagliose nei pressi di Sarsina, che non figurano sulla recentissima carta del R. Ufficio Geologico (Foglio « Mercato Saraceno »), ma che hanno un particolare significato, in parte diverso da quelli precedenti.

Essi si trovano alla sommità della serie marnoso-arenacea, là dove questa si immerge sotto alla formazione gessifera, e costituiscono, pur con discontinuità, due orizzonti distinti. I lembi del primo orizzonte riposano direttamente sopra alla serie marnoso-arenacea: così un affioramento tra Sarsina e Sorbano sulla sinistra del Savio, giacente sul fondo della sinclinale che con immersione assiale a SE si apre ad abbracciare, sulla destra del Savio, la formazione gessifera di Sapigno; un altro affioramento del medesimo orizzonte si trova sull'ala SO della suddetta sinclinale, a sud di Sarsina fin sotto Casa Roncaccio; un terzo affioramento l'ho osservato a SO di Fanante, sul costone tra il T. Marecchiola e il Riomaggio presso la casa quota 251. Questi affioramenti si trovano alla base della zona argillosa, del Miocene superiore, che sorregge a sua volta le bancate di gesso.

Intercalate dentro a queste argille regolarmente stratificate, si trovano, in un secondo orizzonte costante poco sotto alle grosse bancate di gesso, altre lenti di argille scagliose grigie scure e rossigne, con pezzetti pirolusitici e frammenti di calcari e di breccioline nummulitifere. Così sulla stessa ala SO della sinclinale dei gessi di Sapigno e di Maiano, presso quest'ultima località, l'intercalazione tra le argille supramioceniche di Casa Monselmo. Così a nord di Sapigno, sempre poco sotto al gesso. Così ancora, a NE della sinclinale, nel vallone di Casa Cerri dove le bancate di gesso di Sapigno, oltrepassato il torrente Chiusa, risalgono sulla destra di questa valle verso Monte Pietra.

Tutti questi affioramenti di argille scagliose intercalati nella serie regolare della porzione basale del Miocene superiore, mi pare indichino un arrivo di argille scagliose in questa zona, posteriore alla formazione marnoso-arenacea e contemporaneo alla sedimentazione del Miocene superiore stesso.

IL BORDO SUD-EST DELL'APPENNINO ROMAGNOLO. — Al bordo SE l'area della formazione marnoso-arenacea mesomiocenica romagnola termina al contatto con le argille scagliose della zona trasversale feltresca. È importante stabilire la struttura di questo contatto e la posizione reciproca delle formazioni.

La formazione marnoso-arenacea dell'estremità orientale dell'Appennino Romagnolo (zona di Casteldelci) si spinge fin sulla destra del Marecchia a nord di Badia Tedalda. Il Marecchia l'incide a partire da Ranco fino a metà distanza tra Cicognaia e Pennabilli: in tutto questo tratto sul fianco destro del Marecchia si vede la formazione marnoso-arenacea soltanto nella parte inferiore, mentre nella parte alta del fianco stesso si stendono le argille scagliose. Queste costituiscono tutta la sommità della dorsale tra il bacino del F. Marecchia e quello del F. Foglia. Sull'opposto versante di questa dorsale, la valle del Foglia con i suoi affluenti è incisa, come la valle del Marecchia, nella potente massa della formazione marnoso-arenacea.

La distesa delle argille scagliose con masse ofiolitiche e con placche di calcari nummulitici ha inizio presso Badia Tedalda e si allunga verso NE occupando tutta la cresta montana sulla destra del Marecchia, poi si allarga progressivamente verso NO tagliando il fondo valle del Marecchia tre chilometri a valle della confluenza del Senatello. Già nei pressi di Badia Tedalda le argille scagliose appaiono sovrapposte alla formazione marnoso-arenacea, come giacenti in una conca svasata poggiante con discordanza sugli strati marnoso-arenacei che costituiscono dappertutto il potente basamento. Lembi grandi e piccoli di una coltre di argille scagliose rimangono sospesi in alto sopra la grande massa marnoso-arenacea profondamente incisa dall'erosione dei torrenti.

Anche sul fianco meridionale del poggio su cui sorge il paese di Badia Tedalda si vede chiaramente come gli argilloscisti, con i blocchi di calcari nummulitici della sommità, riposano sopra alla formazione marnoso-arenacea che il Presale incide assai profondamente. Gli strati marnoso-arenacei hanno una generale lieve pendenza a SO nei monti a sud del Presale, ma in corrispondenza del letto di questo si volgono anticlinalmente prendendo inclinazioni a nord e NE e immergendosi così sotto agli argilloscisti di Badia Tedalda con contatto discordante. Proseguendo verso NE per Palazzi, Colcellalto ecc. il contatto tra le argille scagliose e la formazione marnoso-arenacea del bacino del Foglia si presenta molto tipico. Gli strati marnoso-arenacei sono inclinati verso le argille scagliose e vengono da queste ricoperti, ma secondo un piano obliquo a quello di stratificazione: gli strati sono come rosi, ciò che non si può spiegare che con un diastrofismo e un'erosione avvenuta prima del ricoprimento da parte delle argille scagliose, oppure più semplicemente con l'azione meccanica dell'avanzamento delle argille scagliose stesse.

Appare assai evidente in questa regione che la formazione marnoso-arenacea costituisce il grande substrato unico che passa sotto alla striscia delle argille scagliose. Queste si presentano come una colata di materiale scivolato sopra, scorrendo verso valle e convogliando masse grandi e piccole di formazioni resistenti varie smembrate: i calcari con brecciole nummulitiche di Badia Tedalda in tre caratteristiche piccole scaglie; la grande massa calcarea del Monte Canale e del Monte Carpegna; le tipiche placche galleggianti, con spiccata morfologia, della formazione organogena littoranea miocenica. Questo pittorico miscuglio di formazioni e forme varie nella distesa delle argille scagliose, limitato, quasi incanalato, tra l'Appennino Romagnolo e quello Marchigiano, è il Montefeltro.

L'avanzamento delle argille scagliose in data posteriore al Miocene medio e con provenienza da SO è confermato dalla presenza lungo tutta la striscia ed esclusivamente in questa, di quella serie di lembi di calcari organogeni mesomiocenici poggianti sempre sopra argille scagliose, che hanno una facies nettamente diversa da quella pure mesomiocenica che affiora e si estende ai due lati della striscia; facies diversa, più interna, littoranea (pietra fratescana), che qui compare nella zona della facies più esterna, di avanfossa subsidente; facies identica invece a quella delle masse mesomioceniche che si trovano più a SO nel Casentino. D'altra parte al di là del Metauro la formazione marnoso-arenacea miocenica poggia con continuità e concordanza su un Oligocene in facies di scaglia cinerea; e sempre con continuità la scaglia cinerea sulla scaglia rosata, e questa sulla grande serie calcarea mesozoica. E non si trovano affatto argille scagliose in tutta questa serie regolare.

Tre chilometri a valle della confluenza del Senatello, il F. Marecchia lascia la formazione marnoso-arenacea dell'estremo SE dell'Appennino Romagnolo per entrare nella distesa delle argille scagliose feltresche. Ciò perchè il limite tra le due formazioni prende una direzione longitudinale, verso NO. Molto significativa è la struttura di questo nuovo contatto. Presso lo sbocco del Senatello gli strati marnoso-arenacei, che nell'ampio tratto più a monte avevano per lo più un andamento assai tranquillo, accrescono gradatamente la loro inclinazione a SO passando, a valle del Senatello, a una dislocazione multipla costituita da tre pieghelette anticlinali di cui la terza è ribaltata a NE. Gli ultimi strati marnoso-arenacei sono fortemente inclinati a SO e sicuramente rovesciati fino al contatto con le argille scagliose che si presentano quindi come soprastanti.

Questa struttura, perfettamente analoga a quelle precedentemente indicate tipiche dell'Appennino Romagnolo, continua verso NO con una linea di dislocazione che limita a NE la formazione marnoso-arenacea e che decorre per il Fosso della Rocca e poi per la valle del Marecchiola verso Sarsina. Lungo quest'ultima valle gli strati marnoso-arenacei pendono verso ENE con inclinazione crescente e spesso giungono a ribaltarsi

assumendo forti inclinazioni ad OSO, di cui ho constatato il rovesciamento. Ad est di questa dislocazione si stendono le argille scagliose feltresche e la formazione gessifera. Gli strati marnoso-arenacei si immergono così sotto a questa come sotto a quelle; ed è in questa zona che ho trovato, alla base delle argille gessifere o intercalati tra queste, i piccoli affioramenti di argille scagliose che ho indicati sopra.

Il Monte Ercole, ad est di S. Agata Feltria, è costituito da una formazione arenacea diversa da quella solita mesomiocenica, e analoga invece a quella del Monte Comero e di Montegranelli. È una placca poggiata sopra alle argille scagliose al pari dei vicini piccoli massi di calcari a briozoi mesomiocenici.

A valle di Sarsina, in tutta la zona di Mercato Saraceno, la formazione marnoso-arenacea va immergendosi verso SE e va così sotto alla formazione gessifera sulla destra del Savio; anche la formazione gessifera ha generale immersione verso SE, finché sulla cresta compaiono, soprastanti, le argille scagliose con calcari marnosi, che poi si estendono sull'opposto versante del Marecchia. Che realmente la formazione gessifera continui sotto alle argille scagliose è confermato dai lavori della miniera di zolfo di Perticara: nessun pozzo ha ivi incontrato sotto ai gessi le argille scagliose, bensì una serie marnosa monotona; invece il Pozzo Mezzena situato nelle argille scagliose al bordo orientale dell'area gessoso-solfifera, dopo avere attraversato per trecento metri le argille scagliose, è entrato nella formazione gessifera; una galleria della miniera scende verso est sempre nel banco maestro del gesso verso il Pozzo Mezzena, mostrando la continuità della formazione gessifera anche sotto alle argille scagliose e la sua immersione ad est; un'altra galleria attualmente in avanzamento passa sotto alla rupe della Perticara mantenendosi sempre nella formazione gessifera, la rupe soprastante essendo costituita da un lembo di arenarie e conglomerati mesomiocenici poggiante sopra alle argille scagliose.

IL BORDO NORD-OVEST DELL'APPENNINO ROMAGNOLO. — Ad occidente della valle del Lamone si osserva la generale immersione assiale delle pieghe verso NO e tale immersione va accentuandosi in modo che oltre la valle del Santerno gli strati marnoso-arenacei assumono una generale pendenza a NO e con questa giungono al bordo della formazione romagnola, limitata dalla striscia trasversale di argille scagliose del bacino di Firenzuola e della zona tra il Sillaro e l'Idice.

Esaminando il contatto tra le due formazioni lungo tutto questo bordo, ho constatato che le argille scagliose non sono certamente sottostanti alla formazione marnoso-arenacea; piuttosto questa si immerge costantemente sotto a quelle, ma la pendenza degli strati è in generale minore di quella del piano di contatto tra le due formazioni, così che gli strati marnoso-arenacei non vanno tutti sotto alle argille scagliose, ma

sono gradualmente tagliati, come mangiati, con discordanza generalmente assai lieve. Così nel gruppo del Monte Frena la pila di strati marnoso-arenacei ha una pendenza generale di 10–15° verso ovest e sul declivio occidentale vi si sovrappone, con lieve discordanza e con una zona marnoscistosa al contatto, il complesso delle argille scagliose del bacino della Viola e di Firenzuola. Ad est di quest'ultima località, nell'incisione del Santerno, il contatto appare disturbato; ma poco più a nord, nell'incisione della Diaterna Valica sotto il Carpine, si vedono chiaramente i banchi marnoso-arenacei scendere con una pendenza di 10° verso NO immergendosi sotto a una zona di marnoscisti cui fan seguito le tipiche argille scagliose. Il piano di contatto ha un'inclinazione di 15°, cioè un po' maggiore di quella degli strati marnoso-arenacei che appaiono così come rosi, in modo del tutto analogo a quello visto presso Badia Tedalda. L'analogia tra le due striscie, o colate, di argille scagliose e dei loro rapporti con la massa marnoso-arenacea romagnola appare evidente.

Continuando oltre il Carpine, la linea di contatto prende una direzione decisamente trasversale, verso NE. Gli strati marnoso-arenacei di questo tratto (poggio della Collina) si immergono nettamente a NO sotto alle argille scagliose. Passando oltre alla striscia longitudinale di argille scagliose tra Belmonte e Visignano, si ha ancora la stessa struttura: gli strati del gruppo del Monte la Fine hanno generale inclinazione a NO e si immergono sotto alle argille scagliose lungo l'incisione del Sillaro. Dai pressi di Piancaldoli si osserva costantemente fino a Casa Bagura, sulla sponda sinistra del Sillaro, una parete di testate di strati marnoso-arenacei inclinati a NO e sormontati da marnoscisti grigi e poi dalle argille scagliose che costituiscono tutta la zona tra il Sillaro e l'Idice. A valle di Casa Bagura, dove termina bruscamente contro le argille scagliose la placca sovrascorsa del Monte la Fine, il contatto prosegue spostato più ad est, sempre con la sovrapposizione delle argille scagliose del Sillaro sugli strati marnoso-arenacei inclinati a NO.

Presso Gesso la grande colata di argille scagliose oltrepassa la « vena del gesso » che rimane bruscamente interrotta, e dilaga, cosparsa di piccoli lembi di Miocene medio in facies emiliana evidentemente convogliati, sopra la zona pliocenica fino al margine della pianura. Si vede così anche su questo bordo occidentale nella porzione più a valle, come su quello orientale presso Perticara, il sovrascorrimento delle argille scagliose in età posteriore alla formazione gessifera.

È in base a tutte queste osservazioni, accennate in riassunto, che ritengo, contrariamente all'opinione generalmente ammessa, che la formazione marnoso-arenacea romagnola non riposa sopra le argille scagliose come la coeva formazione del Miocene medio emiliano, ma al contrario le argille scagliose si trovano sempre soprastanti alla formazione marnoso-arenacea dell'area romagnola dove sono giunte, nel loro avanzamento

da SO, soltanto dopo il Miocene medio. In un primo tempo sono venuti gli esigui lembi di argille scagliose che accompagnano il movimento di placche staccate, non lontano, dallo stesso substrato; successivamente le grandi colate laterali sono sovrascorse sull'insieme del substrato e delle soprastanti placche, continuando poi il loro multiplo avanzamento, nel tratto più a valle, anche durante la sedimentazione del Miocene superiore e posteriormente a questo, fino al margine della pianura padana.

Tra la zona trasversale di depressione feltresca e quella bolognese, l'Appennino Romagnolo corrisponde a un'area di sopraelevazione del substrato, analogamente all'Appennino Umbro-Marchigiano.

Antropologia. — *Nuove manifestazioni di arte paleolitica superiore nella Grotta Romanelli in terra d'Otranto* ⁽¹⁾. Nota di ALBERTO CARLO BLANC, presentata ⁽²⁾ da SERGIO SERGI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

È noto che la presenza in Italia di manifestazioni di arte paleolitica è stata a lungo discussa. Veniva infatti sostenuto da alcuni autorevoli paleontologi che il Paleolitico superiore non era rappresentato nella Penisola, e che il Neolitico vi si sarebbe direttamente sovrapposto al Paleolitico inferiore e medio. A questa dottrina è stata dovuta l'attribuzione al Neolitico di una serie di giacimenti preistorici italiani, la cui appartenenza al Paleolitico superiore, oggi dimostrata, è stata riconosciuta solo dopo decenni di controversie.

Il giacimento della Grotta Romanelli in Terra d'Otranto ha fornito le prove più chiare della presenza del Paleolitico superiore in Italia, ed ha anche rivelato tipiche manifestazioni di arte rupestre ed eseguite su oggetti mobili, attribuibili a quella cultura, paragonabili ad alcune delle manifestazioni classiche dell'Europa centrale ed occidentale.

P. E. STASI ed E. REGALIA ⁽³⁾ vi segnarono, nel 1901 e 1905, alcuni graffiti rupestri, sottolineando la loro analogia con i graffiti paleolitici di Francia e di Spagna. Inoltre, in seno ad un deposito detritico, contenente industria di tipo paleolitico e fauna estinta, gli AA. raccolsero alcuni frammenti di ossa presentanti incisioni ornamentali. Uno di questi frammenti era un'estremità di metacarpale di *Equus hydruntinus*. La contemporaneità degli artisti della Grotta Romanelli con la fauna pleistocenica era dunque provata. Ma le opposizioni non cessarono per questo, ed alcuni autori continuarono sia a porre in dubbio l'antichità di quelle manifestazioni di arte, sia a considerarle con alquanto disprezzo.

Dopo una lunga parentesi, scavi regolari, condotti secondo i moderni criteri naturalistici ed ecologici, furono iniziati nella Grotta Romanelli

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto Italiano di Paleontologia Umana.

(2) Nell'Adunanza del 19 gennaio 1940-XVIII.

(3) P. E. STASI ed E. REGALIA, *Grotta Romanelli (Castro, Terra d'Otranto) Stazione con faune interglaciali calda e di steppa, Sulla fauna della Grotta Romanelli (Castro, Lecce)*. « Archivio per l'Antropologia e l'Etnologia », XXXIV, Firenze, 1904, pag. 17 e 33; *Grotta Romanelli (Castro, Terra d'Otranto) Due risposte ad una critica*. XXXV, 1905, pag. 113 e 157.

nel 1914 da GIAN ALBERTO BLANC ⁽¹⁾. Essi confermarono in ogni particolare le affermazioni del Regalia, e portarono alla scoperta di nuovo ed abbondante materiale paleontologico e paleontologico. Altri graffiti furono riconosciuti, sia sulle pareti esterne della caverna, sia su quelle interne a mano a mano che lo scavo ne rendeva visibili nuovi lembi. Numerosi frammenti di calcare, coperti di graffiti analoghi a quelli già segnalati del Regalia furono estratti dagli strati intatti del giacimento, contenenti una fauna pleistocenica, il cui significato climatico nettamente glaciale fu rafforzato dalle nuove determinazioni. Veniva così affermato, su basi bene accertate, l'eccezionale valore delle manifestazioni d'arte contenute in quella caverna, costituenti il più antico monumento artistico d'Italia sicuramente datato.

Gli scavi sono stati proseguiti anche in questi ultimi anni, dopo la pubblicazione della monografia di GIAN ALBERTO BLANC, ed hanno considerevolmente aumentato la serie delle opere d'arte. Alcune pietre graffite sono state affidate per lo studio a L. A. STELLA, che vi ha riconosciuto un rozzo tentativo di scultura rappresentante un « volto umano », un animale graffito che l'A. ha interpretato come un Bovide, ed un altro, in verità problematico, come un Lupo ⁽²⁾. GIAN ALBERTO BLANC ha anche estratto dai medesimi livelli della Grotta Romanelli un grande blocco calcareo, una faccia del quale è ricoperta di segni pettiniformi, risultanti dall'allineamento di singoli segni dipinti con ocre i quali richiamano i disegni schematici antropomorfi e zoomorfi dell'Aziliano ⁽³⁾. È questo il primo dipinto paleolitico, ed insieme il più antico dipinto d'Italia.

In scavi recenti sono stati rinvenuti, nei medesimi livelli a fauna glaciale, altri blocchi graffiti che arricchiscono la serie già nota di alcuni elementi di nuovo ed insuperato valore.

Il primo (fig. 1) proviene dallo strato *Ci* di terra bruna, che segue, nella serie stratigrafica, l'intensa ripresa del disfacimento termoclastico delle pareti calcaree della Grotta, e che ha fornito la fauna ad *Alca impennis*.

Esso consta di un blocco di calcare compatto, triedrico, che presenta una faccia di frattura ad asperità vive, e tre facce dalla superficie consunta, che sono state esposte per lungo tempo ad azioni alteranti naturali. Una delle facce, e precisamente quella più piana, subtriangolare, delle dimensioni di cm. $15 \times 13 \times 18$, è coperta di graffiti, i quali hanno

⁽¹⁾ BLANC G. A., *Grotta Romanelli I e II*, « Archivio per l'Antropologia e l'Etnologia », L., Firenze, 1920, LVIII, 1928.

⁽²⁾ STELLA L. A., *Rappresentazioni figurate paleolitiche a Grotta Romanelli*, « Riv. di Antropologia », XXX, Roma, 1935.

⁽³⁾ BLANC A. C., *Dipinto schematico rinvenuto nel paleolitico superiore della Grotta Romanelli in Terra d'Otranto*. « Riv. di Antropologia », XXXII, Roma, 1938.

scalfito la superficie giallo-brunastra del calcare patinato e sono quindi più chiare del fondo. Anch'essi però sono alquanto patinati e sono ricoperti in alcuni punti da concrezioni ferruginose. I graffiti possono distinguersi in due disegni sovrapposti. Quello più antico è costituito da un fascio di cinque linee subparallele, racchiuse da una linea periferica, costituenti così il riempimento di una specie di rettangolo. Da due margini di questo si dipartono linee disposte a raggera, che coprono quasi tutta la superficie della faccia. A questo disegno si sovrappone il profilo di un animale, graffito con un procedimento del tutto analogo. Sono visibili il dorso, la coda, le due zampe posteriori fornite di artigli, il ventre, una zampa anteriore, anch'essa con artigli, ed una parte del petto. Il disegno è purtroppo interrotto dalla frattura più recente del blocco, effettuata però *ab antiquo*, prima della dispersione del blocco stesso entro il terreno. L'area interna del profilo è riempita di fini graffiti lineari subparalleli la cui direzione varia nelle diverse parti del corpo. Nella coda essi sono trasversali, leggermente obliqui, ed analogamente nelle gambe. Sotto il ventre essi seguono manifestamente la forma del corpo, contribuendo a conferire al disegno una notevole efficacia. La tecnica adoperata ricorda sia i graffiti appartenenti alla migliore arte naturalista franco cantabrica ⁽¹⁾ sia, per alcuni particolari (come l'orientamento trasversale delle linee riempienti la coda e le gambe) i graffiti praticati sulle uova di struzzo dai Capsiani del Nord-Africa.

La forma del dorso, il portamento della coda, la forma delle zampe, i cui artigli, rappresentati con ingenuo ma espressivo convenzionalismo, sono evidenti, e la grande larghezza della regione anteriore, purtroppo interrotta dalla frattura, indicano chiaramente che l'animale è un grande felino, verosimilmente il Leone delle caverne.

La rappresentazione è altrettanto efficace di quelle dei felini graffiti nella caverna del Font-de-Gaume ⁽²⁾. Un tentativo di riprodurre convenzionalmente gli artigli, molto analogo all'artificio adoperato nel nostro graffito, e con la medesima distorsione della prospettiva, si trova nel felino, d'altronde malamente abbozzato, figurato a p. 156, fig. 126 della monografia sul Font-de-Gaume, già citata.

Qual'è il significato che può attribuirsi ai due disegni sovrapposti ?

⁽¹⁾ ALCADE DEL RIO H., BREUIL H. e SIERRA L., *Les cavernes de la Région Cantabrique*, Monaco, 1912, pag. 168 a 175, figure 164 a 171; R. BATTAGLIA, *I graffiti antropomorfi di Grotta Romanelli*, Ist. It. di Paleont. Um., Firenze, 1935, ha già posto in evidenza che anche per le figurazioni antropomorfe graffite sulle pareti della Grotta Romanelli, non mancano elementi comparativi nelle stazioni dell'Europa occidentale.

⁽²⁾ CAPITAN L., BREUIL H., PEYRONY D., *La caverne de Font de Gaume aux Eyzies*, Dordogne, Monaco, 1910, pag. 156 e 157, fig. 127 e 129.

È da notarsi che quello più antico, sottostante, rammenta i disegni frequenti nell'arte paleolitica iberica, che H. OBERMAIER ha così efficacemente paragonato alle « trappole per gli spiriti » che i selvaggi attuali delle Celebes appendono attorno alle loro dimore, perchè gli spiriti cattivi vi si impiglino e vi rimangano imprigionati ⁽¹⁾. Il motivo è molto analogo a quelli descritti da H. BREUIL ad Altamira, e che egli si meravigliò di ritrovare, pressochè identici, sulle pareti del « Santuario » de La Pileta ⁽²⁾.

Supponendo che i due disegni abbiano un nesso, e che la loro sovrapposizione non sia casuale, potrebbe immaginarsi che l'autore abbia rappresentato una « trappola » e vi abbia poi figurato dentro un Leone: il disegno avrebbe avuto in tal caso un carattere magico propiziatorio. Per tale interpretazione depone il fatto che i due disegni, di intensità analoga, sembrano esser dovuti alla medesima mano ed al medesimo strumento.

L'abbinamento e la sovrapposizione di graffiti paleolitici rappresentanti animali e motivi geometrici, interpretati come possibili « trappole da caccia », sono frequenti nell'arte franco cantabrica. Se ne trovano esempi a Bernifal ⁽³⁾ ed al Font-de-Gaume ⁽⁴⁾.

Non si dimentichi che nella Grotta Romanelli, una testimonianza di pratiche magico-artistiche è già fornita dal supposto Bovide, trafitto da un arpone, graffito su una parete della grotta e che richiama le analoghe figurazioni paleolitiche di Niaux (Ariège) ⁽⁵⁾, d'El Pindal (Oviedo) ⁽⁶⁾ ecc.

Su l'altra faccia, altrettanto grande, ma più ondulata, del medesimo blocco calcareo, vi sono vari segni graffiti, il cui significato appare enigmatico.

Sulla terza faccia utile, la più piccola, è figurato un animale, molto rozzamente graffito, presentante una specie di criniera su un dorso forte-

⁽¹⁾ OBERMAIER H., *Trampas cuaternarias para espiritus malignos*, « Bol. de la Real Soc. Españ. de Historia Natural », XVIII, Madrid, 1918.

⁽²⁾ BREUIL H. OBERMAIER H. e WILLOUGHBY VERNER, *La Pileta a Benaojan* (Malaga), Monaco, 1915, pag. 44. « L'étonnement de Mr. Breuil à examiner ces images fut grand d'y reconnaître clairement une de celles qui ornent le recoin des tectiformes noirs du couloir terminal de la caverne d'Altamira. Le type fondamental se compose d'une masse centrale rectangulaire dont les lignes des côtés se prolongent au delà des angles et donnent naissance en ce point à un faisceau peu régulier de lignes divergentes droites ou plus ou moins courbes. A l'intérieur du motif central il y a parfois des lignes parallèles qui lui donnent un aspect scalariforme ».

Il nostro motivo assomiglia al 5° disegno figurato nella fig. 13, pag. 44.

⁽³⁾ REINACH S., *Répertoire de l'art quaternaire*, Parigi 1913, pag. 27, n. 1.

⁽⁴⁾ CAPITAN L., BREUIL H. e PEYRONY D., op. cit., pag. 87, fig. 57.

⁽⁵⁾ REINACH S., op. cit., pag. 161, nn. 3, 6, 7.

⁽⁶⁾ REINACH S., op. cit., pag. 165, nn. 1, 5.

mente ricurvo, ed appendici cefaliche (corna od orecchie) su una testa appena abbozzata, nella quale un piccolo rilievo naturale è stato tagliato da un'incisione, per figurare l'occhio. Il corpo è riempito di linee graffite subparallele, antero-posteriori: le zampe sono appena accennate. Potrebbe trattarsi di un Capriolo o di un Asinide, ma rimarrebbe enigmatica l'accentuata incurvatura del dorso.

Un altro blocco calcareo, più piccolo, subquadrangolare, provenienti dallo stesso strato *Ci* della Grotta Romanelli, presenta su una delle facce principali, misurante cm. 9×10 , un disegno graffito (fig. 2). Esso rappresenta un profilo zoomorfo semplicissimo, costituito dal solo contorno, ma espressivo, eseguito con spirito e facilmente interpretabile. Sono visibili il dorso, le orecchie, la testa, le due zampe anteriori ed il ventre. La parte posteriore è interrotta da una frattura. Le zampe sono eseguite molto rozzamente, senza alcuna accuratezza. Il disegno sembra rappresentare un Cinghiale.

Un terzo blocco, di calcare assai duro, diverso da quello costituente le pareti della grotta, proveniente dallo strato *D*, presenta una grande faccia piana, subtrapezoidale, di cm. $21 \times 19 \times 14 \times 10$, ricoperta di disegni geometrici (fig. 3 e 4). Questi sono stati eseguiti apparentemente con vari strumenti, tali da conferire alle incisioni maggiore o minore rilievo ed intensità. I tratti sono in genere tracciati con mano sicura e spesso con molta forza, come può dedursi dal profondo solco praticato in una pietra assai dura. Molti sembrano esser stati incisi da un bulino bifido. I disegni si intrecciano, con una meravigliosa varietà di motivi ornamentali. Più che una lunga descrizione varrà l'esame delle due fotografie eseguite con luci diverse.

La serie delle rappresentazioni zoomorfe paleolitiche d'Italia si accresce così di due manifestazioni notevoli di arte naturalista e semi-naturalista e compare una nuova manifestazione di arte ornamentale di tipo geometrico. Si afferma sempre più la potenza espressiva degli artisti paleolitici della Terra d'Otranto, che, nel graffito riproducente il felino, si avvicina a quella posseduta dagli artisti magdaleniani franco-cantabrici.

P. Graziosi ha posto efficacemente in evidenza certe affinità delle manifestazioni artistiche della Grotta Romanelli con quelle della Cova del Parpallò e de la Pileta, nella penisola iberica (¹). Vorrei far notare

(¹) GRAZIOSI P., *Nuovi elementi per lo studio dei graffiti di Grotta Romanelli. Le incisioni della Cova del Parpallò (Valenza)*. « Archivio per l'Antropologia e l'Etnologia », LXII, Firenze, 1932.

Les gravures de la Grotte Romanelli. (Puglia, Italie) Essai comparatif. Ipek., VIII, Berlino, 1932-33.

che l'abbondanza e la varietà dei graffiti ornamentali geometrici richiama anche i giacimenti paleolitici superiori dell'Europa orientale, dove, a Predmost e a Mezine sono rappresentati esempi di un'arte nella quale il naturalismo è sostituito da uno spiccato convenzionalismo, realizzato spesso mediante la combinazione di motivi geometrici. Nella Grotta Romanelli manifestazioni di arte naturalista e geometrico-ornamentale si trovano associate nei medesimi strati, analogamente a quanto è stato riscontrato nei giacimenti magdaleniani dell'Europa occidentale (cfr. ⁽¹⁾).

Convien sottolineare inoltre che i motivi geometrici ornamentali, che si ritrovano poi, molto analoghi, nell'arte mesolitica dell'Europa occidentale e settentrionale, e finalmente nelle ceramiche graffite e dipinte del Neo-Enolitico, erano già adoperati largamente, in pieno Pleistocene, dai cacciatori paleolitici della Terra d'Otranto. Da noi, come del resto hanno già osservato H. BREUIL ed H. OBERMAIER in Spagna, l'arte schematica e convenzionale del Neo-Enolitico, utilizzando largamente motivi geometrici, possiede indubbiamente le sue radici nel Paleolitico. I graffiti e la pietra dipinta contenuti negli strati a fauna glaciale della Grotta Romanelli ne forniscono un'abbondante e varia documentazione.

Ho potuto inoltre porre in evidenza che la presenza, nei medesimi livelli, di tipici «microbulini tardenoisiani», considerati in Europa occidentale e settentrionale elementi caratteristici del Mesolitico e dell'età post-glaciale, costituisce un'indicazione parallela sulla precocità dell'evoluzione culturale fini-paleolitica nell'Italia meridionale, in confronto di altre regioni d'Europa ⁽²⁾.

Il proseguimento delle ricerche potrà forse un giorno fornirci maggiori elementi per giudicare le affinità psicologiche ed estetiche di questi nostri più antichi artisti, e dedurre i loro rapporti etnici e culturali con altre popolazioni paleolitiche d'Europa.

I nuovi graffiti qui descritti dimostrano ad ogni modo quanto fosse ingiustificato il ritenere che il Paleolitico superiore italiano non possedesse forme di arte paragonabili alle ben note manifestazioni del Magdaleniano franco-cantabrico, opinione basata su argomenti negativi. Cade, così, dinanzi ai nuovi fatti accertati, un altro luogo comune, posto da paleontologi stranieri ed italiani a base della nostra Preistoria.

Il nostro Paleolitico superiore possedeva invece, associata alla tendenza tipicamente mediterranea di semplificare e sintetizzare in schemi le forme naturali (presupposto necessario all'apparire delle pictografie schematiche, vere scritture primordiali), la facoltà di ritrarre le forme naturali stesse, con una fedeltà ed un'efficacia ammirevoli.

⁽¹⁾ Ved. nota ⁽¹⁾ pag. 386.

⁽²⁾ BLANC A. C., *Dei «microbulini» e della precoce comparsa del Mesolitico in Italia*. « Riv. di Antropologia », XXXII, Roma, 1939.

Lo schematismo, che si era voluto costituisse una forma inferiore e degenerativa, propria di culture incapaci di produrre arte naturalista, appare invece quale un elemento di ricchezza e di versatilità della nostra arte paleolitica, accanto a forme di ottimo stile naturalista.

La vitalità ed il dinamismo di questo elemento verrà poi dimostrata dopo alcuni millenni, quando esso accompagnerà il grande rivolgimento del Mesolitico, e si imporrà quindi all'Europa intera, assieme alle fondamentali conquiste della civiltà neolitica.

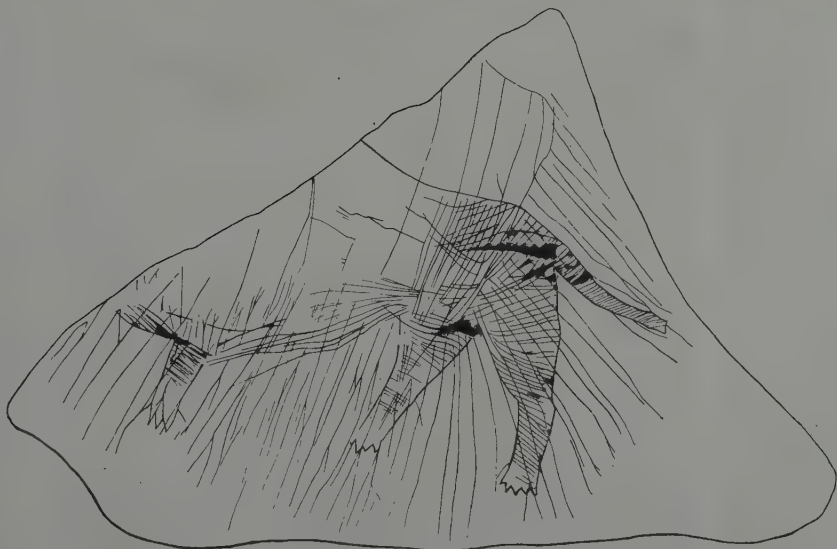
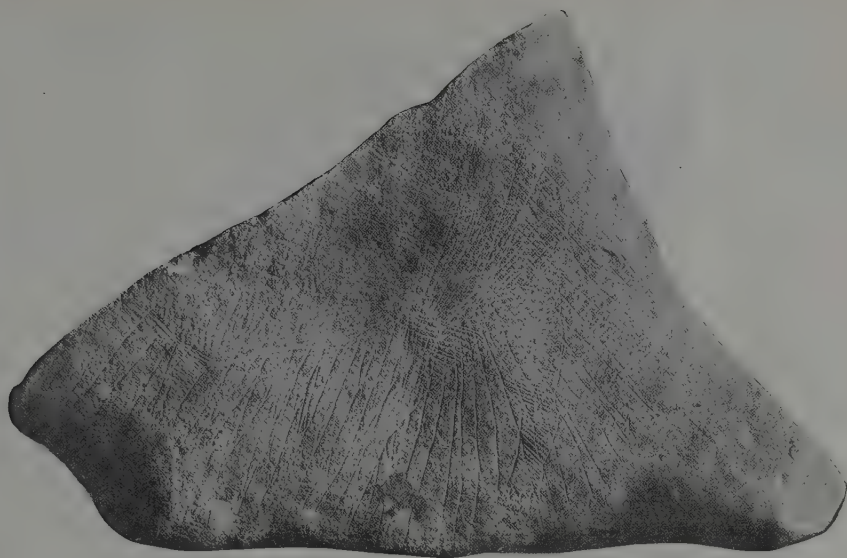


Fig. 1. - Il Felino della Grotta Romanelli, a circa $\frac{2}{3}$ della grandezza naturale.

A. C. BLANC.

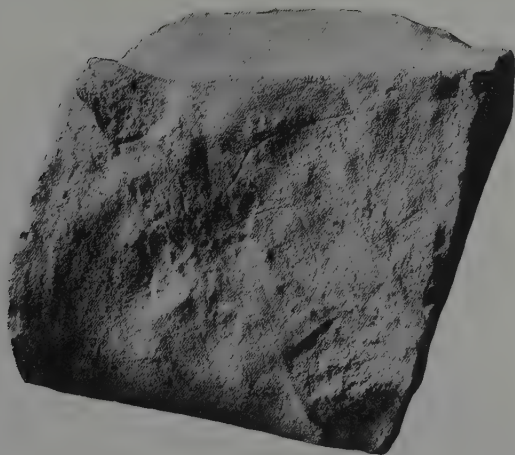


Fig. 2. - Il Cinghiale (?) della Grotta Romanelli,
a circa $\frac{2}{3}$ della grandezza naturale.

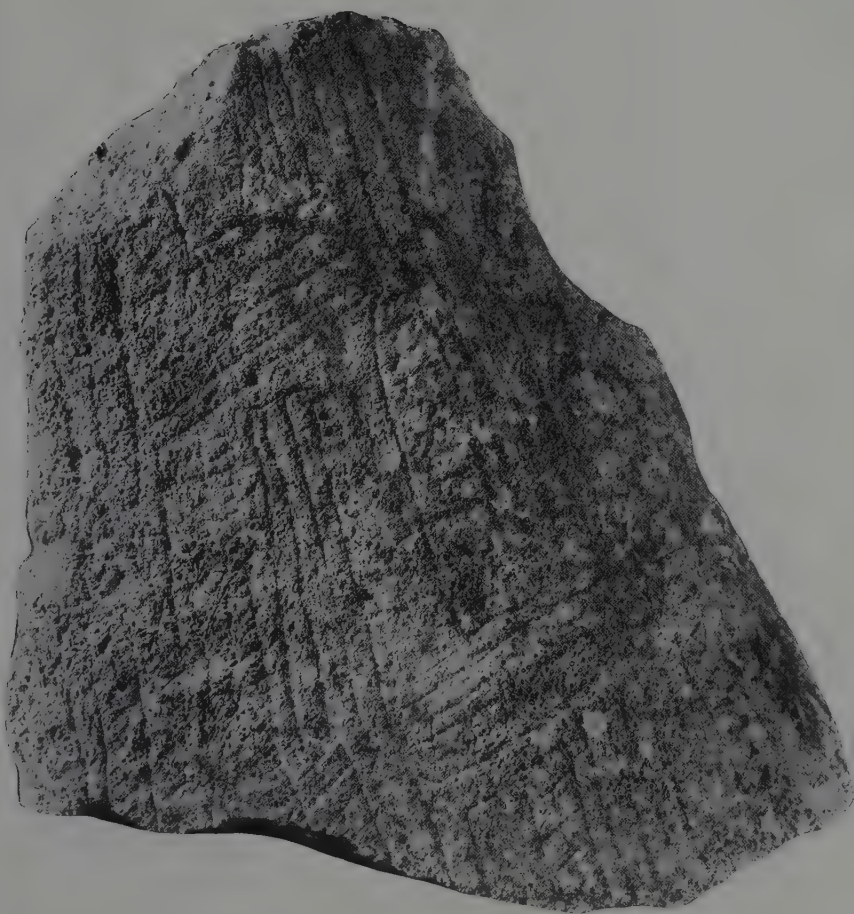


Fig. 3. - Blocco coperto di graffiti ornamentali geometrici, della Grotta Romanelli,
a poco più della $1/2$ della grandezza naturale.

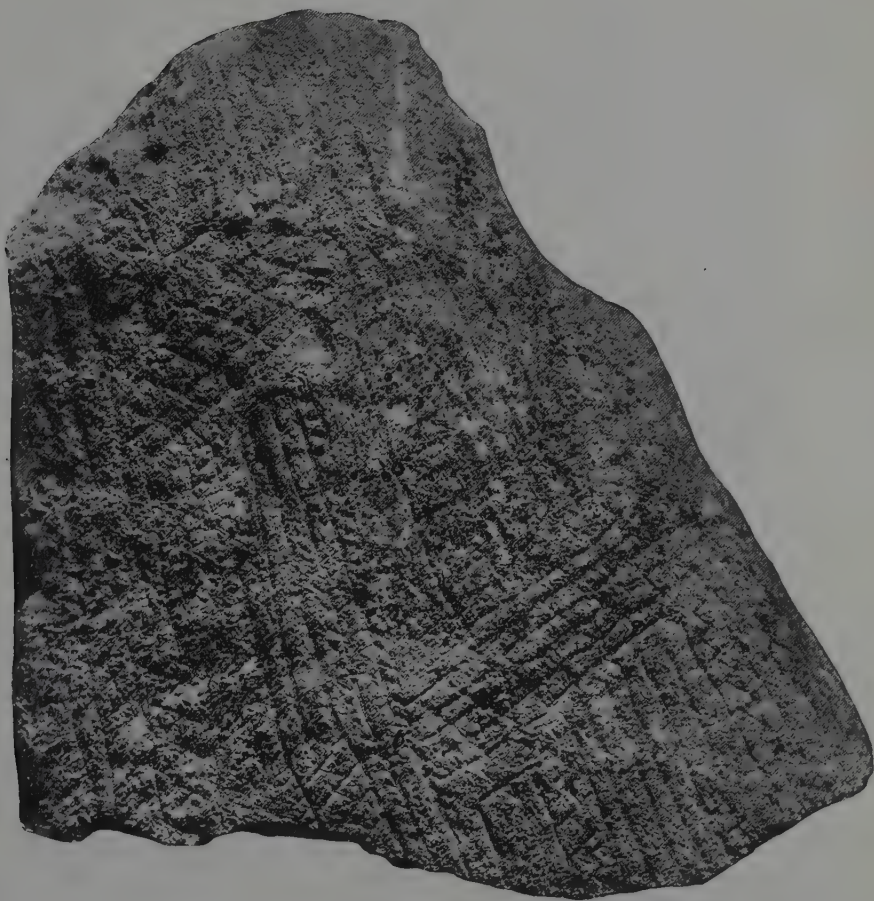


Fig. 4. - Blocco coperto di graffiti ornamentali geometrici, della Grotta Romanelli, a poco più della 1/2 della grandezza naturale.

Biologia. — *Bonifica idrobiologica del litorale albanese.*
Comunicazione ⁽¹⁾ di GUSTAVO BRUNELLI, Aggregato alla
R. Accademia d'Italia.

Sono note le condizioni di malaricità del litorale albanese, non facili a combattere per gli imponenti tributi delle acque fluviali, gli impaludamenti, la presenza di numerosi stagni, e anche di lagune litoranee.

Sotto alcuni riguardi si presenta in taluni tratti una condizione simile a quella del litorale pontino e del litorale maremmano. Perciò l'Italia, e per queste condizioni e per le sue gloriose tradizioni della scienza malarologica e idraulica, è pronta a studiare e risolvere tali problemi essenziali per la redenzione del litorale albanese, senza trascurare naturalmente la bonifica già iniziata.

Nella crociera della R. Nave *Ciclope* effettuata nell'anteguerra nelle acque albanesi, e alla quale ebbi l'onore di partecipare, ritornandovi poi sempre come talassografo, e nei successivi studi proseguiti in questi ultimi anni dall'Ispettorato tecnico della pesca, da me diretto, e col sussidio delle indagini fisiche, chimiche e biologiche del R. Laboratorio Centrale di idrobiologica ho rilevato importanti dati per effettuare la bonifica idrobiologica del litorale albanese.

Nel maggio del 1935 furono effettuati sopralluoghi allo stagno di Arta presso Valona; alla baia di Patok, a S. Giovanni di Medua, a Kravastà, in alcuni laghi interni (Okrida, Prespa), alla foce a mare del Drin; a Butrinto, che pur non essendo malarico di per se, ha nelle adiacenze una zona di allagamento intensamente malarica; a Durazzo.

Per l'interesse particolare che Butrinto presentava nei riguardi della pesca, in quanto vi si verificavano straordinarie morie di cefali, nel sopralluogo che fu compiuto nel gennaio 1936 si procedette al prelevamento di campioni non solo in stazioni di superficie ma anche a varie profondità; nello stesso gennaio 1936 si prelevarono campioni nella laguna di Kravastà, ad Arta presso Valona, e a Durazzo. Nel maggio-giugno 1936 furono di nuovo prese in esame le acque costiere di Durazzo, Arta, Patòc, foce del Drin, Morteps, Kravastà, Ducati, e Butrinto, sempre effet-

(¹) Letta nell'Adunanza del 19 gennaio 1940-XVIII.

tuando per quest'ultimo, che presenta notevole profondità, prelevamenti in serie verticali.

Infine nel luglio 1937 furono ancora prese in osservazione le lagune di Arta e di Durazzo.

Occorre però che io premetta, perchè poco noti, i fondamenti di quella che ho designato come Bonifica Idrobiologica.

Come Bonifica Idrobiologica quale fu da me proposta, si deve intendere la bonifica che non si affida al solo esaurimento meccanico, ma altresì alle pratiche biologiche del diserbo e della disanofelizzazione, colla regolazione della salinità e altresì del complessivo regime delle acque, senza la necessità (molte volte antieconomica) di prosciugarle, ma anzi in molti casi con l'intendimento di incrementare il reddito della pesca.

Altri che hanno ribadito le mie idee hanno poi voluto indicare tale bonifica come bonifica peschereccia, ma questa è solo un caso, benchè importante, della bonifica idrobiologica e nulla toglie ai canoni fondamentali della prima.

La storia della Bonifica Idrobiologica è poco nota; benchè in questi ultimi tempi anche docenti e studiosi di idraulica (BULLO, VELATTA, DE ANGELIS) l'abbiano accolta e discussa, dovette, per affermarsi, attraversare diverse fasi. Nel dopoguerra infatti sorsero delle preoccupazioni per le sistemazioni vallive del Veneto, accusate a torto di generare la malaria in quella regione; ciò causò per provvida iniziativa di S. E. GIURATI, allora Ministro dei Lavori Pubblici, un opportuno studio sistematico eseguito dal R. Magistrato alle acque di Venezia, e a cui ebbi l'onore di partecipare coi Colleghi GIARDINA e ALESSANDRINI e cogli ingegneri del Magistrato.

Detto studio, in una notevole monografia ⁽¹⁾, confermò e ribadì quanto a Venezia stessa io avevo studiato più di venti anni addietro proponendo la Bonifica Idrobiologica, e cioè che la malaria dei dintorni di Venezia deriva specialmente dal disordine delle acque della conterminazione lagunare, e non in modo particolare dalle valli da pesca e dalla laguna.

Tali studi insieme ad altri, nonchè la propaganda della piscicoltura antimalarica della quale mi occupai per incarico della Direzione della Sanità, valsero definitivamente a combattere quella che io chiamai la mania prosciugatoria, che anche il prof. PEGLION dimostrava per molti terreni litoranei erronea nei riguardi del rendimento agrario.

Ricordo questi precedenti studiati nel Veneto, in quanto si tratta precisamente di terreni salmastri assai simili a quelli del litorale albanese,

(1) G. BRUNELLI, *Un nuovo aspetto della bonifica integrale: «La Bonifica idrobiologica»*. Roma, Tip. del Senato, 1913.

(2) *Bonifica e Vallicoltura nei riguardi idraulici, igienici ed economici*. Magistrato delle Acque. Istituto Poligrafico dello Stato. Roma, 1937.

nei quali la bonifica idrobiologica apparisce perciò sotto ogni aspetto più conveniente.

Alla affermazione della bonifica Idrobiologica si devono i mutati orientamenti delle bonifiche costiere, così che per tale decennale esperienza anche nel Pontino si è giunti alla sistemazione degli stagni litoranei che il geniale idraulico OMODEO voleva salsificare fino a raggiungere la salinità delle acque marine, cosa ardua, e direi quasi impossibile per gli imponenti apporti di acqua dolce, mentre il GRASSI avrebbe voluto procedere al taglio periodico subacqueo della canna palustre, operazione certamente costosa e di dubbio esito.

La cannuccia palustre invece è stata fatta sparire nello stagno di Fogliano specialmente mediante l'artificio della fossa circondaria ⁽¹⁾ da me proposta, modificando le caratteristiche della fossa circondaria delle valli venete che ha altri scopi preminenti.

Per le finalità che oggi, sulle basi dell'esperienza acquistata sulla costa italiana, vogliamo raggiungere in Albania, si può ritenere che tale sistemazione con fossa circondaria potrà essere adottata per la imponente laguna di Kravastà, di basso fondale e di salinità non molto alta. Nel gennaio del 1936 furono riscontrati valori compresi fra 19,43 e 20,10 ‰, sebbene nel maggio dello stesso anno si giungesse a qualche valore superiore a gr. 30 ‰.

Naturalmente per stagni minori non è necessario procedere all'escavo della fossa circondaria.

Nelle lagune, come quella di Durazzo, che per il bassissimo fondale presentano un notevole disseccamento estivo, occorre migliorare radicalmente le comunicazioni col mare; la tentata sistemazione della ROCKFELLER con tubi di cemento, concepita come piccola opera di bonifica anti-malarica, come ha visto il mio collaboratore ed alunno DE ANGELIS, non era riuscita in alcun modo. Resta quindi giustificato il proposito di prosciugare radicalmente la Laguna di Durazzo, anche in vista dello sfruttamento industriale e agrario dei terreni ottenuti.

La malaricità della Laguna di Durazzo per la sua più elevata salsedine (nel luglio del 1937 superò il 39 ‰, cioè quella del mare) era in ogni modo minore di quella della Laguna di Kravastà. Si tratta di un disordine diverso, ma sempre dannoso, sia agli effetti dell'igiene che a quelli della pesca.

In condizioni non buone si trova anche la baia di Patoc per i numerosi scoli di acqua dolce, che fanno sì che la sua salinità scenda talvolta fino al 10 ‰, (DE ANGELIS). Essa potrebbe trovare una siste-

⁽¹⁾ G. BRUNELLI, *La fossa circondaria e la Bonifica Idrobiologica*. « Rend. della R. Accademia dei Lincei », vol. XVII, aprile 1933.

mazione collegata all'industria del pesce novello che, ivi rimonta in grande quantità.

In condizione di simile sfruttamento si trovano alcuni impaludamenti vicino alla foce delle Skumbi e altrove, secondo i rilevamenti della crociera del *Ciclope*.

Nei minori impaludamenti sarà utile anche la semina di *Gambusie* mentre il *Cyprinodon calaritanus*, già esistente, esercita già un'azione antilarvale come avevo osservato a Durazzo, ma è di più difficile diffusione.

Il problema idraulico, per realizzare la bonifica idrobiologica del litorale albanese, è di evitare il paludismo e non di abolire le lagune: necessità quindi di sottrarle alle piene tumultuose dei fiumi, di sistemare le gronde, e di munirle di ampie foci a mare, in modo da creare per esse un regime idraulico, entro certi limiti, costante. Ciò si presenta tanto più conveniente, ai fini industriali, in quanto le lagune albanesi opportunamente arginate ed approfondite, saranno in grado di non risentire troppo delle dannose evaporazioni estive e potranno sempre oculatamente fruire di apporti di acque dolci, così abbondanti nella regione, e così utili ai fini della pesca.

Patologia. — *Linfosarcoma maligno trapiantabile del pollo.*

Nota ⁽¹⁾ di FRANCESCO PENTIMALLI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

L'oncologia sperimentale ha messo in evidenza, in questi ultimi tempi, una lunga serie di tumori trapiantabili del pollo, tutti derivanti dal tessuto connettivale, dei quali quelli ad elementi immaturi (sarcoma, e sue varietà) si dimostrarono filtrabili. D'altra parte, la trapiantabilità e filtrabilità di entità morbose dei tessuti emopoietici (leucosi) che nella loro essenza sono da considerarsi perfettamente analoghe ai neoplasmi, furono dimostrate, per i polli, dalle ben note ricerche di ELLERMANN e BANG. Altri autori notarono l'associazione del sarcoma con la leucosi, senza riuscire a determinare i rapporti etiologici tra queste due malattie, ma la maggior parte di essi ritiene che lo stesso agente può produrre entrambi i processi morbosi, per un cambiamento delle sue proprietà biologiche (OBERLING e GUÉRIN ⁽²⁾, TROISIER ⁽³⁾, ROTHE MEYER e ENGELBRETH-HOLM ⁽⁴⁾). STUBBS e FURTH ⁽⁵⁾ descrissero un agente (cosidetto ceppo 13) che originatosi in un pollo inoculato con leucosi, era capace di produrre proliferazioni endoteliali negli organi emopoietici ed eritroblastosi.

Se dallo studio comparativo dei processi patologici che si osservano negli animali noi vogliamo risalire alla patologia umana, sono di grande importanza per la conoscenza e la comprensione dei rapporti tra leucemia e tumori quei speciali quadri nosologici che già descritti negli uomini, dove peraltro non sono stati appieno identificati e districati dal complesso dominio dei tumori e delle leucemie, si possono riscontrare anche negli animali, e ciò costituisce lo scopo della presente comunicazione.

⁽¹⁾ Presentata nell'Adunanza del 19 gennaio 1940-XVIII.

⁽²⁾ OBERLING et GUÉRIN, « Bull. Ass. franc. pour l'étude du Cancer », vol. 22, 1933.

⁽³⁾ TROISIER, « Bull. Ass. franc. pour l'étude du Cancer », vol. 23, 1934.

⁽⁴⁾ ROTHE MEYER and ENGELBRETH-HOLM, « Acta path. et microbiol. Scand. », vol. 10, 1933.

⁽⁵⁾ STUBBS and FURTH, « Journ. of exper. medic. », vol. 63, 1935.

Un pollo di razza livornese è separato dall'allevamento per il suo aspetto denutrito, con cresta pallida. Si fa l'esame morfologico del sangue, che rileva una grave alterazione a tipo eritroblastico, con presenza di numerosi elementi a carattere patologico, di difficile classificazione, per quanto la struttura del nucleo, provvisto di nucleoli, e la forte basofilia del protoplasma avvicinino questi elementi talvolta ai linfoblasti, tal'altra agli emocitoblasti. Molti di questi elementi patologici sono in cariocinesi. Assenza quasi completa di granulociti. Alla sezione dell'animale si osserva il fegato ingrandito (del peso di gr. 130), cosparso di chiazze bianco-grigiastre di diversa grandezza (da una testa di spillo ad una moneta di venti centesimi) tra le quali si trovano appena residui di parenchima epatico con colorito naturale. Al taglio, eguale aspetto dell'organo, che appare trasformato in un ammasso di noduli bianco-grigiastri di diversa grandezza. Milza della grandezza di una noce, di colorito rosso-bruno uniforme, senza macchie o noduli biancastri. Reni straordinariamente ingrossati, di colorito biancastro uniforme. Ovaio con qualche piccolo nodulino biancastro. Midollo osseo femorale di colorito rosso cupo, difficilmente scollabile. Nulla di importante da segnalare nei polmoni, e negli organi rimanenti.

Microscopicamente, si vede che il tessuto proprio del fegato è ridotto a sottili liste di trabecole epatiche residuanti tra i noduli di tessuto neoplastico. In questi si osserva uno stroma di tessuto connettivale a maglie molto larghe, che racchiudono accumuli di elementi neoplastici, grandi, rotondeggianti, con nucleo ricco di cromatina, e provvisto generalmente di nucleoli, con protoplasma ora scarso, ora più abbondante. Altri elementi neoplastici presentano il nucleo meno ricco di cromatina, che è disposta a formare un reticolo, ed il citoplasma più largo, e meno intensamente colorabile. Entrambi questi elementi si presentano frequentemente in cariocinesi. Essi si infiltrano numerosissimi tra le trabecole epatiche dissociandole, e provocando fenomeni degenerativi delle cellule epatiche stesse. Per riguardo ai vasi, il tessuto neoplastico sembra rispettare i vasi arteriosi, ma nei confronti delle vene si comporta in modo evidentemente aggressivo, poichè è frequente osservare la usura e distribuzione della parete di esse in qualche punto, e il conseguente sporgere del tessuto neoplastico nell'interno del vaso. Se spazi periportalì sono in qualche punto riconoscibili, le piccole vene di questi spazi sono, invece, piuttosto compresse, fino a collabire. Il tessuto del tumore, è poi scarsissimo di vasi propri, ma nonostante la insufficiente irrorazione, non si constatano fatti notevoli di necrosi.

Gli elementi cellulari propri del tessuto neoplastico appaiono essere di due specie non tanto nel preparato microscopico del tessuto, quanto negli strisci del tessuto neoplastico, colorati col MAY GRÜNWALD + GIEMSA. Le diverse caratteristiche di entrambi queste specie cellulari sono ora

facilmente evidenti. La maggior parte delle cellule sono elementi di grandezza variabile che hanno un nucleo ricco di cromatina omogenamente distribuita, con uno o due nucleoli, nucleo circondato talvolta da un sottile protoplasma, tal'altra da protoplasma più abbondante, sempre intensamente basofilo, senza granulazioni. Un sottile alone meno intensamente basofilo può anche trovarsi intorno al nucleo. Questi elementi non hanno riscontro con forme cellulari normali, essi sono assolutamente patologici, e tutto al più potrebbero corrispondere a linfoblasti dai quali differiscono anche perchè sono notevolmente più grandi; sarebbero, quindi, in ogni caso, dei linfoblasti atipici. Essi si trovano frequentemente in cariocinesi. L'altra specie cellulare, che si trova però in minor quantità, è costituita da elementi più voluminosi dei precedenti, che hanno un nucleo grande, con la cromatina disposta a formare un reticolo grossolano, le cui strie sono separate da spazi chiari, ed un protoplasma egualmente largo, molto più largo della prima specie di cellule, lievemente basofilo, privo anch'esso di granulazioni. Anche queste cellule è frequente trovare in cariocinesi. Esse potrebbero corrispondere a grandi monoblasti atipici della serie delle cellule del reticolo. La diversità delle due specie cellulari dimostratasi specialmente nei preparati a striscio per i particolari caratteri della cromatina nucleare, fu poi confermata dalle successive ricerche fatte sul neoplasma, dopochè fu ottenuta la sua trapiantabilità. Difatti, traendo partito dalla capacità, o meno, che hanno alcune cellule di assumere il carminio sotto forma granulare, si è visto che trattando per molti giorni animali che avevano sviluppato il tumore trapiantato nel muscolo pettorale con iniezioni endovenose di litio carminio, mentre la prima specie di cellule assolutamente non presenta granuli di carminio nel suo citoplasma, la seconda specie, invece, può presentare in esso qualche singolo granulo di questa sostanza colorante.

Le alterazioni microscopiche rinvenute nei reni sono perfettamente corrispondenti a quelle trovate nel fegato, per quanto riguarda la struttura dei noduli neoplastici, i quali si ingrandiscono distruggendo per compressione la sostanza propria dell'organo, ovvero si infiltrano tra i tubuli renali facendo assumere all'organo il caratteristico aspetto che presenta quando è alterato da formazioni leucemiche. Anche i piccoli noduli osservati macroscopicamente nell'ovaio, corrispondono microscopicamente a noduli neoplastici della medesima struttura. Nella milza, le alterazioni istologiche sono diverse. L'architettura della milza è completamente scomparsa, inquantochè non è più possibile distinguere neanche residui dei follicoli, e tutta la polpa è trasformata in un tessuto dove appena sono riconoscibili i seni venosi infarciti di elementi cellulari con caratteri di eritroblasti in vario grado di maturazione, emocitoblasti, scarsi mielociti, cellule di RIEDER, ed infine numerosi eritrociti normali. Il midollo osseo è trasformato in un tessuto compatto ricchissimo di

elementi cellulari immaturi della serie emoglobinica e mielocitaria, in cui non sono più evidenti vasi e seni sanguigni. Alcuni gruppi cellulari hanno caratteristiche simili a quelli degli elementi neoplastici riscontrati nel fegato, ma non si osserva una disposizione a formazioni nodulari che sostituiscano il tessuto del midollo.

Con una emulsione di tessuto epatico furono inoculati quattro polli nel muscolo pettorale e cinque polli nella vena dell'ala. Inoltre, poichè da altre ricerche mie è risultato che è facile trasmettere la comune leucosi dei polli con proteine ottenute dagli estratti di tessuti leucemici mediante precipitazione con solfato di ammonio, estratti di fegato furono precipitati con questa sostanza a 0,3 e 0,6 saturazione, e i precipitati lavati con solfato di ammonio, disciolti in tampone di fosfato a pH. 7,4, riprecipitati e ridisciolti, ed infine dializzati, furono inoculati endovenosamente in sei polli. La annessa tabella indica il risultato ottenuto: risultato negativo in tutti i polli inoculati endovenosamente sia con emulsione di tumore, sia con precipitati proteici di esso, ridisciolti; risultato positivo in uno solo dei quattro animali inoculati nel muscolo pettorale, il quale animale, in ottava giornata, presentava una neoformazione cm. 3×2 di aspetto lardaceo, di consistenza molle, encefaloide, nello spessore del muscolo. L'esame istologico ha dimostrato trattarsi di un neoplasma con struttura perfettamente eguale a quella del tumore originario, con spiccata tendenza ad invadere il tessuto, infiltrandosi fra le fibre muscolari, come risulta evidente dalla microfotografia N. 1. Le particolarità di struttura degli elementi cellulari si ripetono anche in questo caso, e le due diverse specie di cellule che compongono il tumore sono anche qui molto evidenti, come risulta dalla microfotografia N. 2 fatta su un preparato per striscio, colorato col MAY GRÜNWARD + GIEMSA. Scarsissimi sono i vasi nel tessuto del tumore, a pareti sottili, talvolta formate da un semplice strato di cellule endoteliali.

Con la solita emulsione furono inoculati quattro polli nel muscolo pettorale, e dai tumori ottenuti si è proceduto a trapianti successivi nel muscolo pettorale, e così via via per ventitré generazioni nel tempo di un anno, ottenendosi sempre tumori con le stesse caratteristiche del tumore originario. Come dimostra la annessa tabella, il tumore acquistò rapidamente una forte virulenza, nel senso che, verso la ottava generazione, il trapianto riusciva quasi sempre positivo: poi parve presentare un periodo di minore virulenza; ma in seguito riacquistò un'alta percentuale di attecchimento. Il tumore raggiunge nel corso di 1 o 2 settimane la grandezza di una noce, e si diffonde in seguito in tutto il muscolo pettorale, portando a morte gli animali in un tempo variabile da 1 a 2 mesi.

Alla sezione di questi animali si osservano generalmente normali gli organi interni, e solo qualche volta la milza appare leggermente ingrandita, ma sempre di aspetto e consistenza normale.

Metastasi non sono frequenti ad osservarsi: sopra 92 animali in cui l'inoculazione nel muscolo pettorale è risultata positiva, tre volte si osservò metastasi nel fegato e nel rene, due volte nel polmone e nel cuore, una sola volta nella milza. Con l'esame istologico degli organi, si sarebbe forse trovata una maggiore frequenza di metastasi; ma gli organi non furono sistematicamente esaminati al microscopio.

Oltrechè nel muscolo pettorale, furono fatte inoculazioni endovenose non solo in cinque polli con emulsione di tumore originario, ma anche in due animali alla 4^a generazione del tumore, in 6 animali alla 9^a generazione, in 4 animali alla 13^a generazione. In nessun caso si ebbe sviluppo di tumore negli organi. Tanto degli animali inoculati nel muscolo pettorale, quanto di quelli inoculati endovena, fu fatto sistematicamente l'esame morfologico del sangue ogni 6-7 giorni. Ma al di fuori di alterazioni transitorie, più frequentemente monocitosi senza caratteri di immaturità cellulare, talvolta anche condizioni anemiche di discutibile origine, nulla di particolare si è potuto osservare.

In conformità di quanto oggi si pratica comunemente per ogni nuovo tumore, questo fu saggiato varie volte, e cioè alla 3^a, 8^a e 12^a generazione per riguardo alla sua filtrabilità, senza però ottenere mai risultato positivo, nè con candela BERKEFELD V nè con candela N.

Parimenti la trapiantabilità dopo essiccamento del tessuto del tumore fu saggiata alla 4^a, 8^a, 12^a, 18^a e 20^a generazione, anche con risultato negativo.

Infine, alla 20^a generazione fu sperimentata la resistenza del tumore alla glicerina, ottenendosi risultato negativo dopo permanenza del tessuto per 8 giorni nel 20 % di glicerina.

Non è facile riportare il caso sopradescritto nel quadro della comune nomenclatura nosologica. In primo luogo è certo che non si tratta di una malattia sistematica, nonostante la molteplicità degli organi che risultavano affetti dal processo morboso. Gli elementi cellulari che compongono il tessuto neoplastico, nonostante i caratteri di profonda atipia, derivano molto probabilmente da quelle cellule indifferenti del mesenchima, pluripotenti, che si trovano diffuse in tutti i tessuti, ma specialmente intorno alle pareti dei vasi, delle quali MARCHAND, MAXIMOW, HERZOG ecc. hanno dimostrato l'importanza nella vita embrionale come nella vita dell'adulto, per l'origine delle cellule del reticolo, dei linfoblasti, e dei linfociti. Se, pertanto, questo speciale elemento cellulare, ammesso un momento disponente come costituzionale, avesse dovuto subire l'azione dell'ignoto momento realizzante, avremmo avuto un processo morboso dell'intero sistema, in tutti gli organi, e non soltanto in alcuni, come invece nel caso presente. Nel nostro caso non possiamo dire con sicurezza se vi fu un organo affetto in modo primario, ma se consideriamo l'estensione del processo

morboso nei vari organi affetti dell'animale, possiamo pensare che il fegato abbia subito per primo, e forse da solo, l'azione dell'agente neoplastico, in modo che dagli elementi indifferenziati del suo parenchima sia derivato il primitivo nucleo neoplastico. Le caratteristiche delle cellule neoplastiche sono tali che al tessuto da esse formato si può dare il nome di Linfosarcoma, e con ciò faccio rientrare nella stessa derivazione genetica entrambi le due specie di elementi cellulari riscontrate nel tessuto tumorale, di cui una ho descritto come derivazione atipica del linfoblasto, e l'altra può essere considerata come derivazione egualmente atipica di quegli elementi monocitici che oggi si comprendono generalmente sotto il nome di cellule del reticolo. La denominazione di Linfosarcoma non è però sufficiente a imprimere il carattere di questa neoplasia. Se ci riportiamo alla patologia umana, il Linfosarcoma che KUNDRAT prima e PALTAFU dopo hanno individuato nel difficile e confuso campo delle neoformazioni del tessuto linfatico, è un tumore che insorge dovunque si trovi tessuto linfatico, generalmente in un gruppo di glandole linfatiche, che può eventualmente estendersi alle glandole linfatiche regionali, ed anche ai tessuti vicini, perfino anche ad organi lontani, purchè connessi col tumore originario per vie linfatiche che risultano anch'esse affette dal processo morboso. Ma in esso non si verificano vere e proprie metastasi, se non molto raramente, perchè i vasi sanguigni generalmente non sono usurati nelle loro pareti dalla neoplasia, ma soltanto circondati e ristretti nel lume. Invece il comportamento di fronte ai vasi del tumore originario in discussione, e la constatazione di metastasi nei reni, nel midollo osseo, nell'ovaio (ma non nella milza) constatazione che si può fare per quanto non frequentemente, anche nei trapianti delle generazioni successive, indica una caratteristica particolare che deve essere notata anche nella denominazione, e perciò l'appellativo di maligno.

Una speciale considerazione deve essere fatta del comportamento del sangue. L'esame morfologico del sangue nel caso originario parla evidentemente per una leucosi a tipo prevalentemente eritroblastico. In conseguenza, l'ipotesi di una connessione, in senso genetico, delle alterazioni del sangue col processo morboso riscontrato alla sezione negli organi interni fu, a prima vista, e fino all'esame istologico dei tessuti neoplastici, non solo consentita, ma giustificata. Tuttavia, poichè l'affezione non si dimostrò sistematicamente negli organi, e principalmente perchè la qualità delle cellule del tumore è differente dagli elementi immaturi del sangue circolante, questa ipotesi si dimostrò non sostenibile, e fu invece sostituita dalla considerazione che il processo morboso che aveva così largamente preso, e quasi interamente distrutto, il fegato, aveva prodotto condizioni di estrema anemia nell'animale. Si deve a tali condizioni anemiche se il midollo osseo si è trovato iperplastico, e la milza con focolai estesi di eritropoiesi. Nel midollo osseo l'alterata funzione era anche da ascriversi

alle metastasi tumorali rinvenute. In tal modo una condizione leucemica del sangue è perfettamente spiegabile. Gli altri elementi cellulari immaturi riscontrati nel sangue, del tipo linfoblastico, è possibile provenissero dai tessuti del tumore, il cui particolare comportamento rispetto alle vene è stato riferito. Che il tumore da me descritto come Linfosarcoma maligno debba rimanere sotto tale denominazione nosologica e non possa essere confuso con una leucemia risulta anche da quanto si è constatato negli ulteriori trapianti di esso. Nei quali, non si è mai verificata una alterazione del sangue nel senso di una leucosi, e se non si trovano in questi animali portatori di tumori neanche alterazioni del tipo eritroblastico-anemico, è perchè in essi il tumore non raggiunge mai una diffusione così estesa negli organi, come l'aveva raggiunto il tumore originario. Del resto, tanto le cellule del tumore originario, quanto quelle del tumore trapiantato, se inoculate nel circolo non si dimostrarono capaci di svilupparsi nè nell'ambiente sanguigno, nè nell'intimo degli organi dove sono arrestate, come prova l'esito costantemente negativo delle inoculazioni fatte. Solo se inoculate nella compagine di un tessuto quale il muscolo pettorale (che è il solo tessuto fin'ora adoperato) esse sono capaci di ulteriore sviluppo e formano in esso veri tumori; è evidente, quindi, che per tali elementi che non hanno capacità di sviluppo nell'ambiente sanguigno non si possa trattare di elementi leucemici. Anche l'esame del sangue negli animali portatori di tumore per trapianto, ripetutamente fatto ad epoche diverse dello sviluppo del tumore, non rivela alterazioni leucemiche, ma soltanto, come ho già riferito, talvolta un aumento transitorio dei globuli bianchi mononucleati e senza elementi con caratteri di immaturità o di atipia.

La conclusione generale che si può trarre dal comportamento di questo tumore è che uno stipite oncogenico di cellule di evidente appartenenza ai tessuti emopoietici può svilupparsi localmente in senso maligno senza portare necessariamente ad una leucosi, come si verifica, del resto, anche nella patologia umana. E ciò deve tener distinto questa entità nosologica da altri processi patologici degli stessi stipiti cellulari, in cui non vi è soltanto una enorme diffusione della malattia, ma anche una condizione leucemica caratteristica. Oggi l'oncologia sperimentale ci consente di dare una dimostrazione di questi fatti già faticosamente accertati sulla base di semplici osservazioni anatomo-patologiche nell'uomo. Difatti noi sappiamo che la leucosi dei polli è una malattia trapiantabile per mezzo del sangue, come per mezzo del filtrato, o del tessuto essiccato, resistente alla glicerina, trapiantabile perfino, come risulta da mie precedenti ricerche, per mezzo di precipitati proteici reversibili. Il Linfosarcoma maligno da me descritto non possiede alcuna di queste capacità: è una neoproduzione autonoma, fortemente atipica, che non è filtrabile, non essiccabile, non resiste all'azione della glicerina, non è trapiantabile per mezzo di precipitati proteici reversibili, e soltanto è trapiantabile

per mezzo di cellule viventi nell'ambiente di un tessuto, alla stessa guisa di tanti altri neoplasmi degli animali. Il Linfosarcoma maligno del pollo è dunque un processo morboso diverso dalla leucosi del pollo, così come, nella patologia umana, la Linfosarcomatosi di KUNDRAT è diversa dalla Leucosarcomatosi di STERNBERG.

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

I numeri in grassetto indicano esito positivo dell'inoculazione.

———— animali inoculati con emulsione di tumore.

..... animali inoculati con filtrato attraverso candela Berkefeld.

~~~~~ animali inoculati con tumore essiccato nel vuoto.



animali inoculati con liquido di perfusione del tumore.

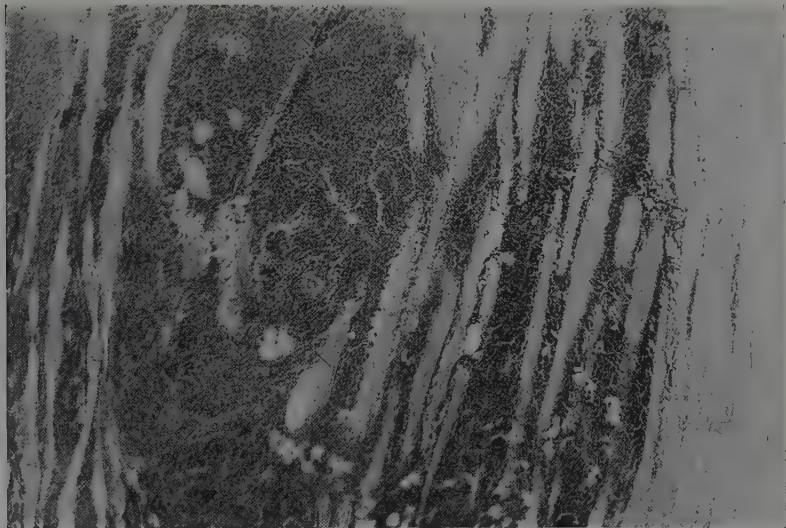
• • • • • animali inoculati con tumore tenuto in glicerina al 20 %.

---

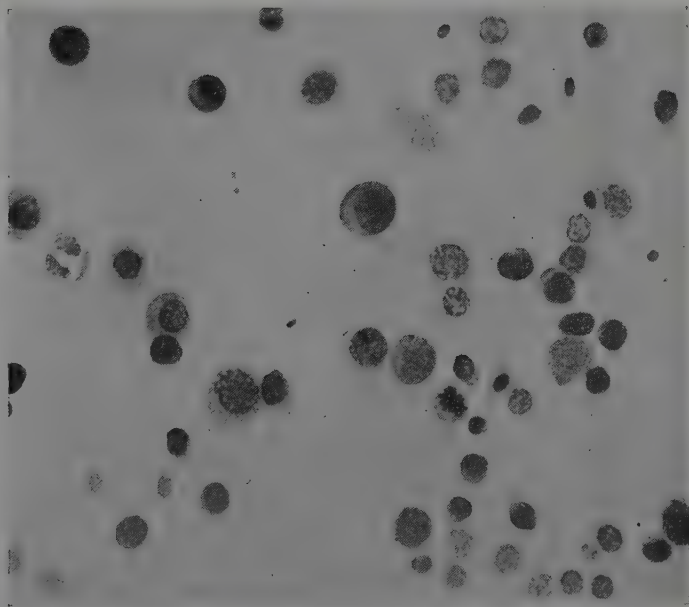
Microfotografia N. 1. — Sviluppo di tumore nel muscolo pettorale del pollo, al 6° giorno dalla inoculazione. È evidente la tendenza infiltrativa degli elementi cellulari.

Microfotografia N. 2. — Preparato per striscio di tessuto del tumore, colorato con May — Grunwald + Giemsa. Dimostra le particolari caratteristiche delle due specie di elementi cellulari costituenti il neoplasma.





Microfotografia N. 1.



Microfotografia N. 2.



## NOTE E COMUNICAZIONI

**Matematica.** — *Sul prodotto di due polinomi di Laguerre e di Hermite.* Nota di LETTERIO TOSCANO, presentata <sup>(1)</sup> dall'Accademico GIOVANNI GIORGI.

1. Sullo sviluppo di un prodotto di due polinomi di LAGUERRE in combinazione di polinomi dello stesso tipo, definiti dalla

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n+\alpha}{n-i} \frac{x^i}{i!},$$

si conoscono varie formule, e ai fini di questa Nota riporto le seguenti:

$$\begin{aligned} L_m^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(x) &= \frac{\Gamma(1+\alpha+m) \Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+\alpha+m+n)} \times \\ &\times \sum_{i=0}^n \frac{(m+n-2i)!}{i! (m-i)! (n-i)! \Gamma(1+\alpha+i)} x^{2i} L_{m+n-2i}^{(\alpha+2i)}(x) \quad m \geq n, \\ \{L_n^{(\alpha)}(x)\}^2 &= \frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{2^{2n} \cdot n!} \sum_{i=0}^n \frac{(2i)! (2n-2i)!}{i! \{(n-i)!\}^2 \Gamma(1+\alpha+i)} L_{2i}^{(2\alpha)}(2x), \\ L_m^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(x) &= \\ &= \sum_{i=0}^{2n} \frac{(-1)^i 2^i (m+n-i)!}{(m-i)! (n-i)! i!} {}_3F_2 \left[ \begin{matrix} 1+\alpha+m+n-i, -\frac{1}{2}i, -\frac{1}{2}(i-1) \\ m-i+1, n-i+1 \end{matrix} \right] L_{m+n-i}^{(\alpha)}(x) \quad m \geq n, \\ L_n^{(\alpha)}(x) L_n^{(\beta)}(x) &= \frac{(1+\alpha)^{\bar{n}} (1+\beta)^{\bar{n}}}{n!} \times \\ &\times \sum_{i=0}^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\bar{i}}}{(1+\alpha)^{\bar{i}} (1+\beta)^{\bar{i}} (n-i)!} {}_3F_2 \left[ \begin{matrix} \frac{1}{2}(1+\alpha+\beta+2i), \frac{1}{2}(2+\alpha+\beta+2i), -n+i \\ 1+\alpha+i, 1+\beta+i \end{matrix} \right] L_{2i}^{(\alpha+\beta)}(2x) \end{aligned}$$

con

$$\lambda^{\bar{n}} = \lambda(\lambda+1) \cdots (\lambda+n-1),$$

(<sup>1</sup>) Nell'Adunanza del 16 febbraio 1940-XVIII.

dovute rispettivamente a HOWELL-ERDÉLYI, HOWELL, WATSON e BAILEY <sup>(1)</sup>.

Al contrario, sullo sviluppo di un polinomio di LAGUERRE in combinazione di prodotti di due polinomi pure di LAGUERRE, conosco la sola formula particolare

$$L_{2n}^{(\alpha)}(x) = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \Gamma(1 + \alpha + 2n) \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i \Gamma(\alpha + i) \Gamma(1 + \alpha + 2i)}{i! \Gamma(\alpha + 2i) \{\Gamma(1 + \alpha + n + i)\}^2} x^{2i} \{L_{n-i}^{(\alpha+2i)}(x)\}^2$$

dovuta a HUMBERT <sup>(2)</sup>.

Si presenta quindi la ricerca di formule generali di questo ultimo tipo, e qui ne assegno una che comprende quella di HUMBERT.

Successivamente, in questa stessa Nota, mediante una mia formula limite e con procedimento nuovo, da tutte le precedenti formule sui polinomi di LAGUERRE ricavo le corrispondenti sui polinomi di HERMITE

$$H_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i (2i)!}{2^i i!} \binom{n}{2i} x^{n-2i}.$$

2. Sia

$$J_\alpha(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i x^{\alpha+2i}}{2^{\alpha+2i} i! \Gamma(1 + \alpha + i)}$$

la funzione di BESSEL di prima specie, è

$$C_n^\alpha(x) = \frac{2^n}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i \Gamma(\alpha + n - i) x^{n-2i}}{2^{2i} i! (n-2i)!}$$

il polinomio di GEGENBAUER.

Lo sviluppo di GEGENBAUER

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta)^{-\frac{1}{2}} J_\alpha \{(a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta)^{\frac{1}{2}}\} = \\ = 2^\alpha \Gamma(\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x+n}{a^\alpha b^\alpha} J_{\alpha+n}(a) J_{\alpha+n}(b) C_n^\alpha(\cos \theta), \end{aligned}$$

<sup>(1)</sup> W. N. BAILEY, *On the product of two Laguerre polynomials*. « The Quarterly Journal of Mathematics », Oxford series, vol. 10, n. 37, 1939, pagg. 60-66.

Riporto da questa Nota le indicazioni bibliografiche relative alle prime tre formule sopracitate: W. T. HOWELL, « Phil. Mag. » (7), 24 (1937), 396-405 (29); A. ERDÉLYI, « Monatshefte für Math. und Phys. », 46 (1937), 132 (4, 5); W. T. HOWELL, « Phil. Mag. » (7), 24 (1937), 1082-93 (7.1); G. N. WATSON « I. of London Math. Soc. » 13 (1938), 29-32.

<sup>(2)</sup> P. HUMBERT, *Monographie des polynomes de Kummer*. « Nouvelles Annales de Mathématiques », 5<sup>e</sup> série, tome I, 1922, pagg. 81-92.

per  $a = 2\sqrt{tx}$ ,  $b = 2\sqrt{ux}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$  e quindi  $C_n^\alpha(0)$  uguale a zero per  $n$  dispari e uguale a

$$\frac{(-1)^i \Gamma(\alpha + i)}{i! \Gamma(\alpha)} \quad \text{per } n = 2i,$$

diventa

$$\begin{aligned} & (tx)^{\frac{\alpha}{2}} (t+u)^{-\frac{\alpha}{2}} J_\alpha \{2\sqrt{(t+u)x}\} = \\ & = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \Gamma(\alpha + i) \Gamma(1 + \alpha + 2i)}{i! \Gamma(\alpha + 2i)} J_{\alpha+2i}(2\sqrt{tx}) J_{\alpha+2i}(2\sqrt{ux}); \end{aligned}$$

e combinando questo con l'altro sviluppo

$$e^h (hx)^{-\frac{1}{2}\alpha} J_\alpha(2\sqrt{hx}) = \sum_n \frac{h^n L_n^{(\alpha)}(x)}{\Gamma(1 + \alpha + n)},$$

si ha

$$\sum_r \frac{(t+u)^r L_r^{(\alpha)}(x)}{\Gamma(1 + \alpha + r)} = \sum_i \sum_\mu \sum_\nu t^i u^\mu x^\nu.$$

$$\frac{(-1)^i \Gamma(\alpha + i) \Gamma(1 + \alpha + 2i) x^{2i}}{i! \Gamma(\alpha + 2i) \Gamma(1 + \alpha + \mu + 2i) \Gamma(1 + \alpha + \nu + 2i)} L_\mu^{(\alpha+2i)}(x) L_\nu^{(\alpha+2i)}(x).$$

Ponendo poi  $\mu = m - i$ ,  $\nu = n - i$ ,  $r = \mu + \nu$ , e uguagliando nei due membri i coefficienti di  $t^m u^n$  si ha la formula che si voleva assegnare

$$L_{m+n}^{(\alpha)}(x) = \frac{m! n!}{(m+n)!} \Gamma(1 + \alpha + m + n). \quad m \geq n$$

$$\sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i \Gamma(\alpha + i) \Gamma(1 + \alpha + 2i) \cdot x^{2i}}{i! \Gamma(\alpha + 2i) \Gamma(1 + \alpha + m + i) \Gamma(1 + \alpha + n + i)} L_{m-i}^{(\alpha+2i)}(x) L_{n-i}^{(\alpha+2i)}(x).$$

Con  $m = n$  si ritrova la formula particolare di HUMBERT.

3. Per i polinomi di HERMITE valgono le formule

$$\begin{aligned} H_m(x) H_n(x) &= \sum_{i=0}^n i! \binom{m}{i} \binom{n}{i} H_{m+n-2i}(x) \\ H_{m+n}(x) &= \sum_{i=0}^n (-1)^i i! \binom{m}{i} \binom{n}{i} H_{m-i}(x) H_{n-i}(x), \end{aligned} \quad m \geq n$$

ricavate dal NIELSEN e ritrovate successivamente con altro procedimento, e indipendentemente dai polinomi di LAGUERRE <sup>(1)</sup>.

<sup>(1)</sup> N. NIELSEN, *Recherches sur les polynomes d'Hermite*. « Det. Kgl. Danske Videnskabernes Selskab. Mathematisk-fysiske Meddelelser », I, 6, 1918, pag. 33; E. FELDHEIM, *Quelques nouvelles relations pour les polynomes d'Hermite*. « Journal of the London Mathematical Society », vol. 13, 1938, pagg. 22-29; G. N. WATSON,



In realtà con le formule di SZEGÖ

$$H_{2n}(x) = (-2)^n n! L_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

$$H_{2n+1}(x) = (-2)^n n! x L_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x^2}{2}\right),$$

che hanno rappresentato fin ora l'unico mezzo di passaggio dai polinomi di LAGUERRE a quelli di HERMITE, non sarebbe possibile derivare con una sola operazione le precedenti formule sui polinomi di HERMITE dalle analoghe sui polinomi di LAGUERRE riportate al n. 1.

Ma come si vedrà qui appresso, tale passaggio sarà possibile mediante la sola applicazione della mia formula limite <sup>(1)</sup>

$$H_n(x) = (-1)^n n! \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ a^n L_n^{\left(\frac{1}{a^2} + k\right)} \left( \frac{x}{a} + \frac{1}{a^2} \right) \right\},$$

che consentirà di ricavare i due precedenti risultati, e l'altro forse nuovo

$$\{H_n(x)\}^2 = \frac{n!}{2^{2n}} \sum_0^n \frac{2^i (2n-2i)!}{i! \{(n-i)!\}^2} H_{2i}(x/2).$$

4. Così, posto  $x \equiv \frac{x}{a} + \frac{1}{a^2}$ ,  $\alpha = \frac{1}{a^2}$ , e osservato che

$$\Gamma(1 + \alpha + n) = \frac{(1 + na^2)(1 + \overline{n-1}a^2) \cdots (1 + a^2)}{a^{2(n-1)}} \Gamma(\alpha),$$

la formula di HOWELL-ERDÉLYI diventa

$$\begin{aligned} a^{m+n} L_m^{\left(\frac{1}{a^2}\right)}\left(\frac{x}{a} + \frac{1}{a^2}\right) L_n^{\left(\frac{1}{a^2}\right)}\left(\frac{x}{a} + \frac{1}{a^2}\right) = \\ = \frac{(1 + ma^2)(1 + \overline{m-1}a^2) \cdots (1 + a^2) \times (1 + na^2)(1 + \overline{n-1}a^2) \cdots (1 + a^2)}{(1 + \overline{m+n}a^2)(1 + \overline{m+n-1}a^2) \cdots (1 + a^2)} \times \\ \times \sum_0^n \frac{(m+n-2i)!(ax+1)^{2i}}{i!(m-i)!(n-i)!(1+ia^2)(1+\overline{i-1}a^2) \cdots (1+a^2)} a^{m+n-2i} L_{m+n-2i}^{\left(\frac{1}{a^2} + 2i\right)}\left(\frac{x}{a} + \frac{1}{a^2}\right) \end{aligned}$$

e al limite per  $a \rightarrow 0$  si ottiene la prima formula di NIELSEN.

*A Note on the polynomials of Hermite and Laguerre*, «idem», pagg. 29-32. Nelle note di FELDHEIM e WATSON si trova la prima delle citate formule sui polinomi di HERMITE, mentre la seconda mi è stata comunicata dallo stesso FELDHEIM con lettera del 7 novembre 1939. A questi autori è sfuggita la memoria di NIELSEN.

<sup>(1)</sup> L. TOSCANO, *Formule limiti sui polinomi di Laguerre*. «Bollettino dell'Unione Matematica Italiana», serie II, anno I, n. 4, 1939, pagg. 337-339.

Lo stesso risultato si può ottenere a partire dalla formula di WATSON, che riduco qui a forma nuova e più semplice.

Infatti per la formula di THOMAE <sup>(1)</sup>

$$\begin{aligned} {}_3F_2 \left[ \begin{matrix} a, b, c \\ e, f \end{matrix} \right] &= \\ &= \frac{\Gamma(1-a) \Gamma(e) \Gamma(f) \Gamma(c-b)}{\Gamma(e-b) \Gamma(f-b) \Gamma(1+b-a) \Gamma(c)} {}_3F_2 \left[ \begin{matrix} b, b-c+1, b-f+1 \\ 1+b-c, 1+b-a \end{matrix} \right] \end{aligned}$$

si ha nel caso nostro

$$\begin{aligned} {}_3F_2 \left[ \begin{matrix} 1+\alpha+m+n-i, & -\frac{i}{2}, & -\frac{i-1}{2} \\ m-i+1, & n-i+1 \end{matrix} \right] &= \\ &= \frac{(m-i)! (n-i)! \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(-\alpha-m-n+i)}{\Gamma\left(-\frac{i-1}{2}\right) \Gamma\left(m-\frac{i}{2}+1\right) \Gamma\left(n-\frac{i}{2}+1\right) \Gamma\left(-\alpha-m-n+\frac{i}{2}\right)} \cdot \\ &\quad \cdot {}_3F_2 \left[ \begin{matrix} -\frac{i}{2}, & \frac{i}{2}-m, & \frac{i}{2}-n \\ \frac{1}{2}, & -\alpha-m-n+\frac{i}{2} \end{matrix} \right], \end{aligned}$$

e per l'altra

$$\Gamma(-\nu+1) \Gamma(\nu) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \nu \pi}$$

si ha

$$\Gamma\left(-\frac{i-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \frac{i+1}{2} \pi},$$

da cui

$$\frac{1}{\Gamma\left(-\frac{i-1}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right) \operatorname{sen} \frac{i+1}{2} \pi}{\pi}.$$

Ma  $\operatorname{sen} \frac{i+1}{2} \pi$  è uguale a zero per i dispari e a  $(-1)^{\frac{i}{2}}$  per i pari; ed allora posto  $i=2j$  e osservato che

$$\Gamma\left(j+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(2j)}{2^{2j-1} \Gamma(j)},$$

---

<sup>(1)</sup> Cfr. F. J. WHIPPLE, «Proceedings of the London Mathematical Society», serie 2, vol. 23, 1923, pag. 104.

si ottiene

$$\frac{1}{\Gamma\left(-j + \frac{1}{2}\right)} = \frac{(-1)^j (2j)!}{\sqrt{\pi} 2^{2j} j!}.$$

Inoltre dalle

$$\Gamma(-\alpha - m - n + 2j) \Gamma(1 + \alpha + m + n - 2j) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(1 + \alpha + m + n - 2j) \pi}$$

$$\Gamma(-\alpha - m - n + j) \Gamma(1 + \alpha + m + n - j) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(1 + \alpha + m + n - j) \pi}$$

si deduce

$$\frac{\Gamma(-\alpha - m - n + 2j)}{\Gamma(-\alpha - m - n + j)} = \frac{\operatorname{sen}(1 + \alpha + m + n - j) \pi}{\operatorname{sen}(1 + \alpha + m + n - 2j) \pi} \frac{\Gamma(1 + \alpha + m + n - j)}{\Gamma(1 + \alpha + m + n - 2j)},$$

e poichè

$$\frac{\operatorname{sen}(1 + \alpha + m + n - j) \pi}{\operatorname{sen}(1 + \alpha + m + n - 2j) \pi} = \frac{1}{\cos j \pi} = (-1)^j$$

la precedente diventa

$$\frac{\Gamma(-\alpha - m - n + 2j)}{\Gamma(-\alpha - m - n + j)} = (-1)^j \frac{\Gamma(1 + \alpha + m + n - j)}{\Gamma(1 + \alpha + m + n - 2j)}.$$

Ciò premesso, alla formula di WATSON si può dare la nuova forma semplificata

$$L_m^{(\alpha)}(x) L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \binom{m+n-2j}{n-j} \frac{\Gamma(1 + \alpha + m + n - j)}{\Gamma(1 + \alpha + m + n - 2j)} \cdot {}_3F_2 \left[ \begin{matrix} -j, & j-m, & j-n \\ \frac{1}{2}, & -\alpha-m-n+j \end{matrix} \right] L_{m+n-2j}^{(\alpha)}(x) \quad m \geq n.$$

Ponendo in questa  $x = \frac{x}{a} + \frac{1}{a^2}$ ,  $\alpha = \frac{1}{a^2}$ , e passando al limite per  $a \rightarrow 0$ :  
poichè

$$\lim_{a \rightarrow 0} {}_3F_2 \left[ \begin{matrix} -j, & j-m, & j-n \\ \frac{1}{2}, & -\frac{1}{a^2} - m - n + j \end{matrix} \right] = 1,$$

dalla formula di WATSON semplificata si ricava la prima formula di NIELSEN sui polinomi di HERMITE.

5. La formula di BAILEY, per  $\beta = \alpha$ , poichè

$$\begin{aligned} & {}_3F_2 \left[ \begin{matrix} \frac{1}{2}(1 + \alpha + \beta + 2i), & \frac{1}{2}(2 + \alpha + \beta + 2i), & -n + i \\ 1 + \alpha + i, & 1 + \beta + i \end{matrix} \right] = \\ & = {}_3F_2 \left[ \begin{matrix} \frac{1}{2} + \alpha + i, & 1 + \alpha + i, & -n + i \\ 1 + \alpha + i, & 1 + \alpha + i \end{matrix} \right] = \\ & = {}_2F_1 \left[ \begin{matrix} \frac{1}{2} + \alpha + i, & -n + i \\ 1 + \alpha + i \end{matrix} \right] = \frac{\Gamma(1 + \alpha + i) \Gamma\left(n - i + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma(1 + \alpha + n)}, \end{aligned}$$

si riduce a quella di HOWELL per  $\{L_n^{(\alpha)}(x)\}^2$ .

E da questa, con le solite posizioni si ha al limite la formula

$$\{H_n(x)\}^2 = \frac{n!}{2^{2n}} \sum_0^n \frac{2^i (2n - 2i)!}{i! \{(n - i)!\}^2} H_{2i}(x\sqrt{2}),$$

diversa dalla nota

$$\{H_n(x)\}^2 = \sum_0^n i! \binom{n}{i}^2 H_{2n-2i}(x),$$

che si ottiene dalla prima formula di NIELSEN per  $m = n$ .

6. Ed ancora con lo stesso procedimento dalla mia formula del n. 2 si ottiene la seconda formula di NIELSEN.

**Meccanica.** — *Principio variazionale nella meccanica dei continui.* Nota di BRUNO FINZI, presentata <sup>(1)</sup> dall'Accademico CARLO SOMIGLIANA.

In una Nota recente, inserita in questi «Rendiconti» <sup>(2)</sup>, LOCATELLI determinò un'ampia classe di sollecitazioni di un continuo, per la quale può enunciarsi un principio di minima energia interna, anche se il continuo abbia varcato in qualche regione i limiti di elasticità, generalizzando così il principio di MENABREA relativo ai corpi perfettamente elastici.

Riprendo in questa mia ricerca l'argomento svolto da LOCATELLI, di importanza essenziale nell'indirizzo moderno della scienza delle costruzioni fissato da DANUSSO e da COLONNETTI, per dimostrare che, dato un *continuo qualsivoglia*, se non è sempre possibile (conformemente ai risultati di LOCATELLI) stabilire un principio di minima energia interna, è però sempre possibile stabilire un semplice principio variazionale che nel caso elastico ordinario coincide con quello di MENABREA. Esso riguarda la condizione di stazionarietà di un elemento globale  $F$ , che può dirsi duale dell'energia interna  $E$ .  $F$  ed  $E$  coincidono nel caso elastico ordinario, ma non coincidono invece, in generale, nel caso di un continuo qualsivoglia.

### § 1. — DUALITÀ FRA SFORZI E DEFORMAZIONI.

DANUSSO <sup>(3)</sup> dimostrò un suggestivo principio di dualità, in base al gioco simmetrico delle forze e degli spostamenti in istatica. Le condizioni di equilibrio di un sistema, se i vincoli sono lisci e bilateri, si ottengono annullando il lavoro delle forze attive per uno spostamento infinitesimo conforme ai vincoli, e quindi per una variazione infinitesima congruente della deformazione; la congruenza del sistema si può, a sua

<sup>(1)</sup> Nell'Adunanza del 16 febbraio 1940-XVIII.

<sup>(2)</sup> P. LOCATELLI, *Sopra il teorema del minimo lavoro per corpi non perfettamente elastici*. «Rend. R. Acc. d'Italia», serie VII, vol. I, 1939.

<sup>(3)</sup> A. DANUSSO, *Le autotensioni. Spunti teorici ed applicazioni pratiche*. «Rend. Seminario matematico e fisico di Milano», vol. VIII, 1934, pag. 217.

volta, ottenere, afferma il DANUSSO, annullando il lavoro di variazioni infinitesimali equilibrate delle forze per gli spostamenti infinitesimi provocati dalle forze per raggiungere la posizione di equilibrio.

Per un continuo, soggetto a deformazione infinitesima, questa forma duale del principio dei lavori virtuali può essere desunta, in forma generale, dal principio stesso nel modo seguente.

Sia  $\tau$  il volume occupato dal continuo,  $\sigma$  la sua superficie di contorno. Sia  $F_i$  la forza attiva esterna unitaria distribuita nel volume  $\tau$ ,  $f_i$  la forza attiva esterna unitaria distribuita sulla superficie  $\sigma$ ,  $p_{ik} = p_{ki}$  il tensore degli sforzi,  $s_i$  lo spostamento,  $\xi_{ik} = \xi_{ki} = \frac{1}{2}(s_{i/k} + s_{k/i})$  il tensore di deformazione,  $\delta s_i$  un generico spostamento virtuale reversibile e  $\delta \xi_{ik}$  il corrispondente tensore di deformazione (1). L'equilibrio è assicurato dal principio dei lavori virtuali che si traduce nella relazione seguente:

$$[1] \quad \int_{\tau} F_i \delta s^i d\tau + \int_{\sigma} f_i \delta s^i d\sigma - \int_{\tau} p_{ik} \delta \xi^{ik} d\tau = 0.$$

Dalla [1], assumendo come spostamento virtuale  $\delta s_i$  lo spostamento (infinitesimo) effettivo  $s_i$ , si deduce:

$$\int_{\tau} F_i s^i d\tau + \int_{\sigma} f_i s^i d\sigma - \int_{\tau} p_{ik} \xi^{ik} d\tau = 0.$$

Se diamo allora alle forze una variazione equilibrata e assumiamo come spostamento virtuale ancora lo spostamento  $s_i$ , avremo anche

$$\int_{\tau} (F_i + \delta F_i) s^i d\tau + \int_{\sigma} (f_i + \delta f_i) s^i d\sigma - \int_{\tau} (p_{ik} + \delta p_{ik}) \xi^{ik} d\tau = 0.$$

Da cui

$$[2] \quad \int_{\tau} s^i \delta F_i d\tau + \int_{\sigma} s^i \delta f_i d\sigma - \int_{\tau} \xi^{ik} \delta p_{ik} d\tau = 0$$

che, confrontata con la [1], esprime il principio di dualità di DANUSSO.

In particolare, scegliendo  $\delta F_i = 0$ ,  $\delta f_i = 0$ , con che notoriamente

$$[3] \quad \begin{cases} \text{entro } \tau : \delta p_{ik/lk} = 0 \\ \text{sopra } \sigma : \delta p_{ik} n^k = 0 \end{cases} \quad \delta p_{ik} = \delta p_{ki}$$

(1) Ci riferiamo a generiche coordinate spaziali; gli indici possono assumere i valori 1, 2, 3, e, posti in basso, indicano componenti covarianti, in alto, componenti contravarianti dei vettori e dei tensori ai quali si riferiscono. La lineetta è simbolo di derivazione tensoriale, e nel seguito saranno sempre sottointese le sommatorie su gli indici saturati.

la [2] assume la forma

$$[4] \quad \int_{\tau} \xi^{ik} \delta p_{ik} d\tau = 0.$$

La relazione [4], sotto le condizioni [3], fu dimostrata direttamente da LOCATELLI <sup>(1)</sup>, per via analitica, con una semplice trasformazione dell'integrale di volume, senza bisogno di sfruttare il principio dei lavori virtuali o il suo duale, e senza bisogno di supporre lo spostamento infinitesimo: essa è conseguenza soltanto delle [3] e del fatto che  $\xi_{ik}$  è la parte simmetrica del tensore derivato di un vettore.

Mostriamo ora come la relazione [4] permetta di esprimere la stazionarietà di un unico elemento globale del sistema continuo.

## § 2. — PRINCIPIO VARIAZIONALE PER DEFORMAZIONI INFINITESIME.

Supponiamo la deformazione infinitesima e consideriamo l'espressione differenziale  $\xi^{ik} \delta p_{ik}$ . Essa è un'espressione differenziale esatta.

Infatti,

$$\xi^{ik} \delta p_{ik} = \delta (\xi^{ik} p_{ik}) - p_{ik} \delta \xi^{ik}.$$

Ma, se esiste un'energia di deformazione  $E$  <sup>(2)</sup>,  $-p_{ik} \delta \xi^{ik}$ , quando la deformazione è infinitesima e si può quindi trascurare la variazione di densità materiale, è un differenziale esatto: il differenziale della densità  $\epsilon$  di energia, cioè

$$[5] \quad \delta \epsilon = -p_{ik} \delta \xi^{ik} \quad , \quad E = \int_{\tau} \epsilon d\tau$$

ne segue

$$\xi^{ik} \delta p_{ik} = \delta (\xi^{ik} p_{ik} + \epsilon).$$

Posto allora  $\xi^{ik} p_{ik} + \epsilon = -\varphi$  <sup>(3)</sup>, è

$$[6] \quad \delta \varphi = -\xi^{ik} \delta p_{ik}.$$

La funzione  $\varphi$ , definita dalla [6] a meno di una costante additiva, è duale della funzione  $\epsilon$  definita dalla [5], nel senso che quella è ottenuta da questa scambiando nella [5] il tensore di deformazione con quello degli sforzi.

<sup>(1)</sup> P. LOCATELLI, loco citato, § 1.

<sup>(2)</sup> Tale energia esiste, sia in condizioni adiabatiche, che in condizioni isoterme.

<sup>(3)</sup> Si noti l'analogia fra  $-\varphi$  e la densità d'entalpia (in condizioni adiabatiche), o di seconda energia termodinamica (in condizioni isoterme).



Poniamo allora

$$[7] \quad F = \int_{\tau} \varphi d\tau$$

e calcoliamo la variazione infinitesima di  $F$ :

$$[8] \quad \delta F = \int_{\tau} \delta \varphi d\tau + \int_{\tau} \varphi \delta d\tau.$$

Se la deformazione è infinitesima, il secondo integrale che compare nella [8] deve essere trascurato di fronte al primo, onde, ricordando la [6]:

$$[9] \quad -\delta F = \int_{\tau} \xi^{ik} \delta p_{ik} d\tau.$$

Allora, per una variazione equilibrata degli sforzi, soddisfacente cioè alle condizioni [3],  $F$  risulta stazionaria, ossia:

$$[10] \quad \delta F = 0.$$

### § 3. — PERFETTA ELASTICITÀ.

Nel caso elastico ordinario, detto  $c^{ikrs}$  il tensore elastico, la deformazione infinitesima è legata agli sforzi dal legame lineare omogeneo

$$\xi^{ik} = c^{ikrs} p_{rs}, \quad c^{ikrs} = c^{rsik}.$$

Ne segue

$$\delta \varphi = -\xi^{ik} \delta p_{ik} = -c^{ikrs} p_{rs} \delta p_{ik} = -p_{rs} \delta \xi^{rs} = \delta \varepsilon$$

e quindi, in modo essenziale,

$$[11] \quad \varphi = \varepsilon, \quad F = E.$$

Il principio variazionale [10] da noi stabilito si identifica quindi con il principio di MENABREA

$$[12] \quad \delta E = 0.$$

### § 4. — IMPERFETTA ELASTICITÀ.

Uscendo dall'ambito dell'ordinaria teoria dell'elasticità, la [11] non sussiste sempre. Così, se il legame fra sforzi e deformazioni è sviluppabile in serie di TAYLOR, si ha:

$$[13] \quad \xi^{ik} = c^{ikrs} p_{rs} + c^{ikrs} p_{pq} p_{rs} p_{pq} + c^{ikrs} p_{pq} p_{rs} p_{pq} p_{rs} + \dots$$

ed essendo, per una deformazione infinitesima,  $\xi^{ik} \delta p_{ik}$  espressione differenziale esatta,

$$c^{ikrs} = c^{rsik} \quad , \quad c^{ikrs} p_{ij} = c^{rsik} p_{ij} \quad , \text{ ecc.}$$

Ne segue

$$[14] \quad -\varphi = \frac{1}{2} c^{ikrs} p_{ik} p_{rs} + \frac{1}{3} c^{ikrs} p_{ij} p_{ik} p_{rs} p_{pq} + \frac{1}{4} c^{ikrs} p_{ij} p_{ik} p_{rs} p_{pq} p_{hj} + \dots$$

$$[15] \quad -\varepsilon = \frac{1}{2} c^{ikrs} p_{ik} p_{rs} + \frac{2}{3} c^{ikrs} p_{ij} p_{ik} p_{rs} p_{pq} + \frac{3}{4} c^{ikrs} p_{ij} p_{ik} p_{rs} p_{pq} p_{hj} + \dots$$

Confrontando [14] con [15] si vede che nel caso elastico  $\varphi = \varepsilon$ ,  $F = E$ , ma non così in generale <sup>(1)</sup>.

Concludendo dunque, pur non essendo sempre possibile stabilire per un continuo qualsivoglia il principio di stazionarietà, sotto le condizioni [3], dell'energia  $E$  (principio di MENABREA ed estensioni di LOCATELLI), è però sempre possibile, per un continuo qualsivoglia, soggetto a deformazione infinitesima, stabilire il principio di stazionarietà, sotto le condizioni [3], dell'elemento globale  $F$ .

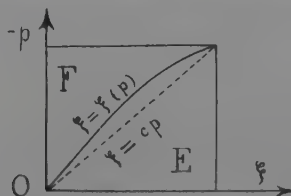
#### § 5. — PRINCIPIO VARIAZIONALE PER DEFORMAZIONI FINITE.

Supponiamo ora che la deformazione subita da un generico sistema continuo sia finita. Questa deformazione non è più caratterizzata dal tensore di deformazione  $\xi_{ik} = \xi_{ki} = \frac{1}{2} (s_{i/k} + s_{k/i})$ , ma bensì dal tensore

$$\Xi_{ik} = \Xi_{ki} = \xi_{ik} + \frac{1}{2} s_{j/i} s^j_{/k}.$$

Però il lavoro elementare delle forze interne, per unità di volume, è ancora dato dalla forma differenziale  $p_{ik} \delta \xi^{ik}$ . Ma, non essendo la deformazione

<sup>(1)</sup> Nel caso elementare  $E$  ed  $F$  sono rappresentati dalle due aree segnate nella figura. Queste due aree sono eguali, qualunque sia  $\xi$ , se la linea caratteri-



stica  $\xi = \xi(p)$  si riduce alla retta  $\xi = cp$ . Ma tale circostanza non si verifica per una generica caratteristica.

infinitesima, non potremo prescindere dalla variazione della densità materiale  $k$ , ritenendo —  $p_{ik} \delta \xi^{ik}$  un'espressione differenziale esatta.

Se imponiamo però alla variazione, rappresentata dal simbolo  $\delta$ , la condizione

$$[3'] \quad \delta k = 0$$

potremo ancora affermare che  $p_{ik} \delta \xi^{ik}$  è espressione differenziale esatta, e, ripetendo il ragionamento del § 2, ritroveremo la [6]. Definito allora  $F$  mediante la [7], otterremo la [8]. Ma, per il principio di conservazione della massa,  $\delta(k d\tau) = \delta k d\tau + k \delta d\tau = 0$ ; ne segue  $\delta d\tau = 0$ , e quindi la relazione [9] e, grazie alla [4] (valida anche per  $\xi^{ik}$  finito), nuovamente la condizione di stazionarietà  $\delta F = 0$ .

L'elemento globale  $F$  è dunque stazionario anche per deformazioni finite, quando alle condizioni [3] si aggiunga la condizione [3']; quando cioè la variazione, oltre ad essere equilibrata, è anche solenoidale.

## § 6. — DINAMICA.

Il principio ora stabilito sintetizzato dalla [10] è valido, con ovvie precisazioni, anche in dinamica, perchè, come il principio di MENABREA<sup>(1)</sup>, esso prescinde dalle forze esterne distribuite nel volume  $\tau$ , e quindi anche dalle forze d'inerzia.

---

<sup>(1)</sup> P. LOCATELLI, *Principi della Statica delle costruzioni nella Dinamica*.  
§ I, « Rend. Istituto lombardo », vol. LXXIII, 1940.

**Meccanica.** — *Su di un principio variazionale centrale della dinamica.* Nota di GIAN DOMENICO MATTIOLI, presentata <sup>(1)</sup> da UMBERTO CISOTTI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

I principi variazionali della dinamica sono — nel loro campo di validità: generale o ristretto a particolari classi di soluzioni — equivalenti; perciò è ovvio presumere che ciascuno di essi sia una particolare deduzione da un principio fondamentale che contiene degli elementi arbitrari e dei quali si può disporre a piacere.

Scopo del presente lavoro è appunto di mostrare come possa essere effettivamente costruito un siffatto principio — che può dirsi « centrale » — dal quale i principi usuali (ivi compreso quello di HAMILTON, comunemente assunto come principio base) e volendo altri ancora, si ricavano con un processo puramente formale; la qual possibilità, oltre che far riconoscere in modo chiaro il significato peculiare dei singoli principi ed i legami tra essi, consente di introdurli con sviluppi concettuali e formali assai semplici; ciò che è utile anche in sede didattica.

#### 1. — EQUAZIONI CANONICHE E RELATIVO PRINCIPIO VARIAZIONALE.

Consideriamo un sistema dinamico di funzione caratteristica  $H(p, q, t)$ . Le equazioni canoniche costituiscono, notoriamente, il sistema (pfaffiano) associato alla forma differenziale lineare <sup>(2)</sup>

$$\omega = p_i dq_i - H dt,$$

cioè si ottengono annullando il covariante bilineare di  $\omega$ , vale a dire, equivalgono all'equazione

$$[1] \quad dq_i \delta p_i - dp_i \delta q_i - dt \delta H + dH \delta t = 0$$

in quanto la si intenda identicamente soddisfatta nei differenziali  $\delta$ .

<sup>(1)</sup> Nell'Adunanza del 16 febbraio 1940-XVIII.

<sup>(2)</sup> Sottintendiamo ovunque il segno di sommatoria esteso all'indice  $i$  da  $i = 1$  a  $i = n$ .

Se si lascia indeterminata la variabile indipendente — che indicheremo con  $\tau$  — si ottengono le equazioni

$$[2] \quad \frac{dq_i}{d\tau} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{d\tau} = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dH}{d\tau} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial H}{\partial t},$$

nelle quali si è posto

$$[3] \quad \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\lambda}.$$

Viceversa quest'ultima equazione è una conseguenza delle [2]. Infatti dalle prime  $2n$  di esse si ricava (indicando, per brevità, con « apici » le derivate rapporto a  $\tau$ , mentre conserviamo il « punto » per denotare derivate rapporto al tempo  $t$ )

$$\frac{1}{\lambda} \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} p_i' + \frac{\partial H}{\partial q_i} q_i' \right) = \frac{1}{\lambda} \left( \frac{dH}{d\tau} - \frac{\partial H}{\partial t} t' \right) = 0,$$

da cui, confrontando con l'ultima [2], segue la [3].

Per ogni variabile  $\tau$ , comunque scelta, la  $\lambda$  è determinata; ma viceversa è chiaro che si può anche definire la  $\lambda$  ad arbitrio lungo ogni soluzione dinamica (salvo il rispetto di una condizione, che vedremo più innanzi) nel qual caso  $\tau$ , dopo l'integrazione, è ricavabile dalla [3].

Integriamo ora l'equazione [1] lungo la generica soluzione di [2] tra due valori estremi qualsiasi  $\tau_0, \tau_1$  della  $\tau$ . Assumendo la ordinaria condizione d'invertibilità

$$[4] \quad \delta \frac{dq_i}{dt} = \frac{d}{d\tau} \delta q_i, \quad \delta \frac{dt}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \delta t,$$

dopo un'integrazione per parti dei termini  $dp_i \delta q_i, dH \delta t$ , risulta l'identità

$$[5] \quad \int_{\tau_0}^{\tau_1} \delta (p_i q_i' - H t') d\tau = p_i \delta p_i - H \delta t \Big|_{\tau_0}^{\tau_1}.$$

Da questa, rifacendo le operazioni in senso inverso, e attesa l'arbitrarietà dell'intervallo  $(\tau_0, \tau_1)$ , si ritorna alla [1]; perciò l'equazione [5] è equivalente alla [1], e pertanto costituisce un principio variazionale caratterizzante le soluzioni dinamiche, che sussiste per variazioni  $\delta p_i, \delta q_i, \delta t$  arbitrarie e per una definizione qualsivoglia della variabile indipendente  $\tau$  lungo ogni soluzione.

La [5] generalizza alla considerazione di variazioni asincrone il principio di HELMOLTZ<sup>(1)</sup>, che è a sua volta un'estensione dell'ordinario principio di HAMILTON.

(<sup>1</sup>) « Wiss. Abhandl. », Bd. 3, pag. 241; cfr. anche LEVI-CIVITA e AMALDI, *Lezioni di Meccanica Razionale*, vol. II<sup>II</sup>, p. 559.

## 2. - PRINCIPIO VARIAZIONALE CENTRALE.

Siccome le equazioni [2] sono conseguenze del principio [5] - od [1] - una parte di esse può essere sfruttata per trasformarlo in un altro equivalente: ad esempio si possono assumere a questo scopo le

$$[6] \quad \dot{q}_i = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Supposto l'hessiano della  $H$  diverso da zero, esse sono risolubili rapporto alle  $p_i$ ; cioè le [6] equivalgono alle

$$[6'] \quad p_i = u_i(\dot{q} | \lambda q' | t),$$

nelle quali le  $u_i$  sono le stesse funzioni dei tre gruppi d'argomenti

$$q_i, \dot{q}_i, \frac{dq_i}{dt}, t$$

che si presentano nel caso ordinario, caratterizzato da  $\lambda = 1$ .

Mediante le [6'] eliminiamo ora le  $p_i$  nell'equazione [1]: per l'equivalenza dei principi [5] e [1], i risultati ottenuti varranno anche con referenza al principio [5]. In virtù delle equivalenti [6] la [1] diviene intanto

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i - p'_i \delta q_i - t' \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial H}{\partial t} \delta t \right) + \frac{dH}{d\tau} \delta t = 0.$$

Tenendo poi conto della [3] - che da ora in poi dobbiamo quindi considerare come un'equazione da introdurre in calcolo *dopo* la differenziazione col simbolo  $\delta$ , a meno che non si riconosca la possibilità, caso per caso, di usarla *prima* - la precedente si riduce a

$$\left( p'_i + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i - \left( \frac{dH}{d\tau} - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial H}{\partial t} \right) \delta t = 0,$$

da cui, per l'arbitrarietà delle  $\delta q_i, \delta t$ , si ricavano le rimanenti equazioni [2] nelle quali le  $p_i$  si pensano sostituite con le loro espressioni [6'].

Questo risultato era prevedibile; ma gli sviluppi formali ora fatti ci precisano intanto le modalità dell'intervento della [3] nel processo variazionale, ed inoltre - in quanto le  $\delta p_i$  sono scomparse - ci consentono di affermare che l'eliminazione delle  $p_i$  nell'equazione [5], equivalente alla [1], trasforma quell'identità variazionale in un'altra che, associata

all'equazione [3] nel senso dianzi dichiarato, e per variazioni  $\delta q_i, \delta t$  totalmente arbitrarie equivale alle equazioni

$$[7] \quad p_i = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{dH}{d\tau} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial H}{\partial t},$$

nelle quali le  $p_i$  siano eliminate mediante le [6']; l'equivalenza sussistendo qualunque sia la funzione  $\lambda$  lungo ogni soluzione dinamica.

Come le quazioni [2] avevano per conseguenza la [3], è chiaro che quest'ultima deve pure essere contenuta nelle [7]; ciò malgrado essa è un'equazione che si deve supporre data *a priori* in relazione alla sua funzione, prima specificata, nel processo variazionale.

Posto

$$L = p_i \dot{q}_i - Ht'$$

in virtù delle [6'], cioè ad eseguita eliminazione delle  $p_i$ , risulterà

$$[8] \quad L = u_i(q | \lambda q', t) \dot{q}_i - H(q | u_i | t) t',$$

cosicchè — per l'equivalenza dei principî [1] e [5] — le equazioni (lagrangiane) [7] corrispondono anche al principio variazionale

$$[9] \quad \delta \int_{\tau_0}^{\tau_1} L d\tau = p_i \delta q_i - H \delta t \Big|_{\tau_0}^{\tau_1}$$

relativo a variazioni  $\delta q_i, \delta t$  completamente arbitrarie, e a una definizione qualunque  $t' = \frac{1}{\lambda}$  della variabile indipendente  $\tau$ , da far intervenire — in generale — a variazione eseguita.

Si tratta ora di esprimere la funzione  $L$  degli argomenti  $q_i, \lambda q'_i, t, t'$ .

Sia

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q} | t)$$

il potenziale cinetico del problema dinamico considerato. Notoriamente si ha

$$[10] \quad p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i},$$

$$[11] \quad H = p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L}.$$

Il confronto delle [6'] e [10], per l'osservazione prima fatta riguardo alla forma delle funzioni  $u_i$ , ci mostra intanto che

$$u_i(q | \lambda q' | t) = \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right)_{\dot{q} = \lambda q'}.$$



Inoltre, per la stessa ragione, la funzione  $H(q|u, t)$  che interviene in [8], è quella che diventa la  $H$  in quanto espressa nelle variabili  $q_i, \dot{q}_i, t$  - cioè secondo la [11] - quanto le  $\dot{q}_i$  siano sostituite con  $\lambda \dot{q}_i$ . Si ha dunque, in definitiva, che l'espressione di  $L$  è

$$L = q' \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right)_{\dot{q} = \lambda q'} - t' \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L}(q| \dot{q}, t) \right)_{\dot{q} = \lambda q'},$$

oppure

$$[12] \quad L = \frac{1}{\lambda} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right)_{\dot{q} = \lambda q'} - t' \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} \right)_{\dot{q} = \lambda q'}.$$

Concludendo: le equazioni lagrangiane [7] del problema dinamico di potenziale cinetico  $\mathcal{L}(q, \dot{q}|t)$  equivalgono al principio variazionale

$$[13] \quad \delta \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[ \frac{1}{\lambda} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right)_{\dot{q} = \lambda q'} - t' \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} \right)_{\dot{q} = \lambda q'} \right] d\tau = p_i \delta q_i - H \delta t \Big|_{\tau_0}^{\tau_1}$$

relativo a variazioni  $\delta q_i, \delta t$  arbitrarie, al quale sia associata l'equazione

$$[3] \quad t' = \frac{1}{\lambda}$$

con  $\lambda$  funzione arbitraria lungo ogni soluzione (salvo una condizione da rispettare in casi eccezionali, che determineremo più innanzi).

Siccome la  $L$  non contiene  $\tau$ , dalle  $n+1$  equazioni lagrangiane equivalenti al principio [13] si deduce l'equazione

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t'} t' - L \right) = 0,$$

la quale, in virtù della [3], deve ridursi ad un'identità; perchè altrimenti  $\lambda$  risulterebbe una funzione *ben determinata* delle  $q, q', t$  e di una costante arbitraria, e non potrebbe più essere qualsiasi come invece risulta dal corso dei ragionamenti. Si ha dunque l'identità

$$[14] \quad \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t'} t' - L \right)' = \frac{1}{\lambda} \equiv 0.$$

### 3. - DEDUZIONI DEI PRINCIPI VARIAZIONALI PARTICOLARI.

Localizziamo subito la menzionata circostanza che delimita l'arbitrarietà di  $\lambda$ . Come vedremo più innanzi, per sviluppare le conseguenze del principio [13] non è sempre necessario specificare la  $\lambda$  sui punti delle soluzioni dinamiche, ma è permesso anche di particularizzare  $\lambda$  quale una *funzione*  $\lambda(q, q'|t)$ . In questo caso occorre avere un'avvertenza, che vogliamo ora precisare. Supponiamo che nell'equazione [3],

dove  $\lambda = \lambda(q|q'|t)$ , sia eliminabile il  $d\tau$ ; ciò che succede quando  $1/\lambda$  è omogenea nelle  $q'$  di grado uno. Allora dalla [3] si deduce

$$[3'] \quad \frac{1}{\lambda(q|\dot{q}|t)} = 1,$$

cioè - quando non sia un'identità - un'equazione di prim'ordine nelle variabili  $q_i, t$ , la quale, affinchè non sorgano incompatibilità, deve essere identicamente soddisfatta da tutte le soluzioni - o da parte di esse. Perciò, quando la  $1/\lambda$  è omogenea di primo grado nelle  $q'$ , la funzione  $\lambda$  deve essere tale che l'equazione [3'] sia una *relazione invariante*, eventualmente anche un integrale particolarizzato, o - se contiene una costante arbitraria - un *integrale primo* del problema considerato. Con questa sola limitazione la  $\lambda$  può essere altrimenti arbitraria. Nel caso eccezionale ora precisato, è chiaro che il corrispondente principio [13] rappresenterà tutte, e soltanto, le soluzioni che soddisfano alla relazione invariante [3']; e qualora questa sia un integrale primo, per ogni valore della costante arbitraria contenuta in [3'] resteranno caratterizzate le corrispondenti soluzioni.

Ad ogni speciale determinazione della  $\lambda$  corrisponde un principio variazionale conformemente dedotto da [13]: vediamo ora alcuni esempi di siffatte particolarizzazioni.

Tra le possibilità consentite dall'arbitrarietà di  $\lambda$  v'è anche quella di assumere su ogni traiettoria  $\frac{1}{\lambda}$  *coincidente* con  $t' : \frac{1}{\lambda} \equiv t'$ , nonchè  $\delta \frac{1}{\lambda} \equiv \delta t'$ . La [3] diviene con ciò un'identità, e pertanto non vi è più luogo ad usarla dopo la variazione. Con questa determinazione di  $\lambda$  si ha - *attualmente anche prima di variare* -  $\frac{d\tau}{\lambda} \equiv dt$ , nonchè  $\lambda q'_i \equiv \frac{q'_i}{t'} = \dot{q}_i$ , da cui si calcola, tenuto conto della formula d'invertibilità [4]

$$[15] \quad \delta \dot{q} = \frac{t' \delta q' - q' \delta t'}{t'^2} = \frac{1}{t'} \frac{d \delta q}{d\tau} - \frac{q'}{t'^2} \frac{d \delta t}{d\tau} = \frac{d \delta q}{dt} - \dot{q} \frac{d \delta t}{dt}.$$

L'integrale contenuto in [13] è espresso in termini di una variabile indipendente  $\tau$  qualunque: sostituiamola con la variabile  $t$ . Per quanto precede, cioè per le posizioni fatte riguardo a  $\lambda$ , l'equazione [13] diviene allora

$$[16] \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}(q|\dot{q}|t)}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} \right) \right\} dt = p_i \delta q_i - H \delta t \Big|_{t_0}^{t_1}$$

dove la  $\mathcal{L}$  è l'ordinario potenziale cinetico espresso in termini di  $q_i, \dot{q}_i, t$ , e le variazioni  $\delta \dot{q}$  sono da calcolare secondo la [15]. Segue subito l'equazione

$$[17] \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} dt = p_i \delta q_i - H \delta t \Big|_{t_0}^{t_1},$$

la quale esprime il principio di HAMILTON nella sua forma generale: tra estremi variati e per asincronismo incondizionato.

La variazione del tempo dà luogo all'equazione  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \frac{dH}{dt} = 0$ , che è una conseguenza delle rimanenti equazioni lagrangiane corrispondenti alla variazione delle coordinate; perciò ci si può anche restringere alla considerazione delle variazioni sincrone, caratterizzate da  $\delta t = 0$ , nel qual caso si ha il principio di HAMILTON ordinario, che inoltre si può esprimere — come abitualmente — imponendo alle  $\delta q_i$  di essere nulle agli estremi dell'intervallo di tempo considerato; con chè il secondo membro della [17] s'annulla.

Deduciamo adesso il *principio della minima azione*. Tenuto conto della [11] il primo membro di [16] si scrive anche

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i dt - \int_{t_0}^{t_1} (\delta H dt + H \delta t).$$

Mediante un'integrazione per parti si ha

$$\int_{t_0}^{t_1} H \delta t = \int_{t_0}^{t_1} H \frac{d\delta t}{dt} dt = H \delta t \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{dH}{dt} \delta t dt,$$

coscicchè alla [16] possiamo dare la forma

$$[18] \quad \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \delta \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i dt \right) - \left( \delta H - \frac{dH}{dt} \delta t \right) dt \right\} = p_i \delta q_i \Big|_{t_0}^{t_1}.$$

Questa equazione vale per un asincronismo  $\delta t$  qualsiasi; ma siccome il  $\delta t$  non interviene nel secondo membro, possiamo anche condizionarlo a piacere senza che tale secondo membro ne resti influenzato. Definiamo il  $\delta t$  ponendo

$$[19] \quad \delta H(q | \dot{q} | t) = 0.$$

Siccome le  $\delta \dot{q}$  si calcolano con la [15], è chiaro che la [19] fornisce  $\frac{d\delta t}{dt}$ , da cui si calcola il  $\delta t$  mediante un'integrazione. Con questo particolare asincronismo la [18] diviene

$$[20] \quad \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \delta \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i dt \right) + \frac{dH}{dt} \delta t dt \right\} = p_i \delta q_i \Big|_{t_0}^{t_1},$$

la quale esprime il principio variazionale *isoenergetico* (condizione [19]) nel caso generale. Se vale l'integrale dell'energia,  $H = h$ , e si assumono i  $\delta q_i$  nulli agli estremi, rimane

$$[21] \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i dt = 0$$

ed essendo in generale la  $\mathcal{Q}$  somma di tre funzioni  $\mathcal{Q}_2, \mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_0$  omogenee di gradi 2, 1, 0 nelle  $\dot{q}$ , alla [21] si può anche dare la forma

$$[21'] \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} (2\dot{\mathcal{Q}}_2 + \mathcal{Q}_1) dt = 0$$

che esprime appunto il *principio* (generalizzato) *della minima azione*.

Abbiamo ultimamente supposto che valga l'integrale della energia

$$H = \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{Q} = h;$$

allora si può richiedere di caratterizzare variazionalmente tutte, e soltanto, le soluzioni corrispondenti ad un valore determinato della costante  $h$ : fascio di soluzioni dinamiche.

Partiamo dalla [18]: sopprimendo il termine in  $\frac{dH}{dt}$  in quanto nullo identicamente, e scrivendola in altro modo, abbiamo

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \delta \left( \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - H \right) dt + H \delta dt \right\} = p_i \delta q_i \Big|_{t_0}^{t_1}.$$

Poichè consideriamo ora soltanto le soluzioni del fascio  $h$ , la funzione  $H$  a fattore di  $\delta dt$  — in quanto è fuori del segno di variazione — è sostituibile con la costante  $h$ ; cioè si ha  $H \delta dt = h \delta dt = \delta(h \delta t)$ . Tenendo poi conto della [11], risulta infine

$$[22] \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} (\mathcal{Q} + h) dt \equiv \delta \int_{t_0}^{t_1} (\mathcal{Q} + U + h) dt = p_i \delta q_i \Big|_{t_0}^{t_1}.$$

Per variazioni  $\delta q_i$  nulle agli estremi si ha un principio variazionale che caratterizza il fascio di soluzioni  $h$ , e che vale, oltre che per variazioni  $\delta q_i$  arbitrarie e nulle agli estremi, anche per un asincronismo  $\delta t$  *completamente incondizionato*: pure agli estremi dell'intervallo di tempo  $(t_0, t_1)$  considerato. Questo principio — poco noto — è da NORDHEIM <sup>(1)</sup> denominato *principio di Hilbert*; esso si trova però già indicato in POINCARÉ <sup>(2)</sup>, per quanto non troppo esplicitamente.

La definizione variazionale del fascio di traiettorie può ottenersi anche per altra via. In variabile  $\tau$  l'integrale dell'energia si scrive

$$[23] \quad \left( \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{Q} \right)_{\dot{q} = \lambda \dot{q}'} = h.$$

<sup>(1)</sup> NORDHEIM-FUES, « Handb. d. Physik. », Bd. 5, pag. 118

<sup>(2)</sup> POINCARÉ, *Méthodes nouvelles*, vol. III, pag. 253.

Sfruttiamo ora l'arbitrarietà della funzione  $\lambda$  assumendo nel principio centrale [13] quella  $\lambda^*(q, q')$  che si ottiene risolvendo la precedente rapporto a  $\lambda$ ; per il che si esige che  $\varrho$  non sia la somma di due funzioni omogenee di gradi uno e zero nelle  $q$ . L'equazione [13] diviene allora,

$$[24] \quad \delta \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[ \frac{1}{\lambda^*} \left( \frac{\partial \varrho}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right)_{q=\lambda^* q'} - h' \right] d\tau = p_i \delta q_i - H \delta t \Big|_{\tau_0}^{\tau_1},$$

ed essendo

$$-\delta \int_{\tau_0}^{\tau_1} h' d\tau = -h \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{d\delta t}{d\tau} d\tau = -h \delta t \Big|_{\tau_0}^{\tau_1},$$

nonchè  $H = h$ , risulta infine

$$[25] \quad \delta \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{1}{\lambda^*} \left( \frac{\partial \varrho}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right)_{q=\lambda^* q'} d\tau = p_i \delta q_i \Big|_{\tau_0}^{\tau_1}$$

quale principio variazionale caratterizzante ogni fascio di traiettorie dinamiche, dove — evidentemente — le  $\delta q_i$  possono anche essere fatte nulle agli estremi. È chiaro che il tempo non interviene nella [25]

Posto

$$\mathfrak{N}(q | q' | h) = \frac{1}{\lambda^*} \left( \frac{\partial \varrho}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right)_{q=\lambda^* q'},$$

si dimostra che  $\mathfrak{N}$  è omogenea di primo grado nelle  $q'$ . Una dimostrazione diretta di questa proprietà è dovuta a GUGINO <sup>(1)</sup>; noi possiamo dedurla sfruttando l'identità [14]. Siccome l'equazione [13] si riduce ora alla [24], attualmente è

$$L \equiv \mathfrak{N} - h'$$

con  $\mathfrak{N}$  indipendente da  $t'$ , per cui l'identità [14] diviene

$$\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \frac{1}{\lambda^*} h - \mathfrak{N} + \frac{1}{\lambda^*} h = \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathfrak{N} \equiv 0$$

che dimostra l'asserto.

Nella [25] il  $d\tau$  è quindi eliminabile; cosicchè essa, involgendo solamente i differenziali  $dq_i$ , caratterizza le traiettorie di ogni fascio di soluzioni.

<sup>(1)</sup> *Sulle traiettorie dei problemi variazionali.* « Rend. Lincei », vol. XXIV (1936), pag. 124.

Infine, a puro titolo d'esempio, indichiamo una estensione del principio [21] al caso generale di una  $\mathcal{L}$  dipendente dal tempo. È noto che dalle equazioni dinamiche consegue  $\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$ , che sostituiamo nella [18] a fattore di  $\delta t$ . Condizionando poi la variazione del tempo con la posizione

$$[26] \quad \delta H = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \delta t$$

il principio [18], per variazioni  $\delta q_i$  nulle agli estremi, assume ancora l'espressione formale [21]; soltanto all'anisocronismo isoenergetico va sostituito quello definito dalla [26].

---

**Astronomia.** — *Variazioni della latitudine connesse all'angolo orario lunare.* Nota di TITO NICOLINI, presentata <sup>(1)</sup> da LUIGI CARNERA, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Le molte ricerche anche recenti, sui termini a corto periodo della variazione delle latitudini, dovute a PRZYBYLLOK, STETSON, KAWASAKI, SPENCER JONES ed altri, presentano a volte forti divergenze nei risultati. In realtà le statistiche su questo soggetto risultano assai intricate a causa delle interferenze di vari effetti, anche ampi e notevoli, e per la difficoltà stessa di ridurre il materiale disponibile ad un complesso omogeneo e conveniente.

Vi è accordo piuttosto generale che i termini della marea semidiurna siano stati individuati e corrispondano con sufficiente approssimazione all'importo teorico. La presente Nota si riferisce allo stesso argomento, ed è presentata con tutti i particolari essenziali del metodo adottato; senza questa norma, non sempre seguita, è meno agevole farsi una idea critica della portata dei risultati raggiunti.

Il materiale adoperato è costituito dalle singole medie serali della latitudine della Stazione internazionale di Carloforte per gli anni 1900.0 — 1912,0 pubblicati da ALBRECHT e WANACH [*Result. des Intern. Breiten-dienstes*, Bd III, 1909, Bd V, 1916].

Le serate d'osservazione sono state divise in sei gruppi a seconda dell'angolo orario lunare corrispondente al momento centrale dei programmi di latitudine. Un primo gruppo corrisponde ad angolo orario lunare (ricavato direttamente dalle effemeridi tenendo conto dell'ascensione retta media dei gruppi d'osservazione) compreso tra  $22^h$  e  $2^h$ , e verrà considerato corrispondente all'angolo orario lunare  $0^h$ ; tra due successivi periodi in cui la luna si osserva ad angolo orario  $0^h$ , essa passerà successivamente per gli angoli orari medi  $20^h$ ,  $16^h$ ,  $12^h$ ,  $8^h$ ,  $4^h$  (corrispondenti rispettivamente agli intervalli  $18^h$ – $22^h$  ecc.). L'ora civile d'osservazione permane in media la stessa, dato il cambiamento mensile dei gruppi d'osservazione; quindi a lungo andare l'intervallo tra due successivi passaggi della luna allo stesso angolo orario viene in media a coincidere col mese sinodico ( $29,53$  g.); e gli intervalli corrispondenti ai successivi angoli orari prescelti, vengono a risultare in media di cinque giorni.

(<sup>1</sup>) Nell'Adunanza del 16 febbraio 1940-XVIII.



TABELLA I.

*Medie dei valori della latitudine circa di 5 in 5 giorni,  
in corrispondenza agli angoli orari lunari 0<sup>h</sup>, 20<sup>h</sup>, 16<sup>h</sup>, 12<sup>h</sup>, 8<sup>h</sup>, 4<sup>h</sup>.*

(si riportano i centesimi; le unità sono 8'' o 9'').

| 0 <sup>h</sup> | 20 <sup>h</sup> | 16 <sup>h</sup> | 12 <sup>h</sup> | 8 <sup>h</sup> | 4 <sup>h</sup> | 0 <sup>h</sup> | 0 <sup>h</sup> | 20 <sup>h</sup> | 16 <sup>h</sup> | 12 <sup>h</sup> | 8 <sup>h</sup> | 4 <sup>h</sup> | 0 <sup>h</sup> |
|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|----------------|----------------|----------------|
| 07 3           | 94              | 04              | 01              |                |                |                | 1901           |                 |                 |                 |                |                |                |
|                |                 |                 | 1900            | 96             | 97             | 07             | 99 3           | 96              | 01              | 98              | 99             | 05             | 99             |
| 07 3           | 97              | 04              | 94              | 02             | 02             | 07             | 05 3           | 01              | 97              | 08              | 96             | 04             | 05             |
| 15 3           | 01              | 98              | 98              | 97             | 95             | 12             | 00 2           | 95              | 96              | 96              | 02             | 98             | 00             |
| 10 2           |                 |                 |                 |                |                |                | 96 2           | 92              | 94              | 01              | 01             | 95             | 95             |
| 98 3           | 95              | 99              | 94              | 93             | —              | 95             | 97 2           | 07              | 07              | 99              | 06             | 03             | 98             |
| 94 2           |                 |                 |                 |                |                |                | 99 1           |                 |                 |                 |                |                |                |
| 97 2           | 89              | 95              | 89              | 88             | 91             | 95             | 01 1           | 98              | 10              | 04              | 06             | 00             | 01             |
| 94 1           |                 |                 |                 |                |                |                | 07 1           | 07              | 97              | 99              | 98             | 00             | 07             |
| 79 2           | 86              | 85              | 82              | 75             | 80             | 79             | 06 1           | 00              | 97              | 95              | 06             | 05             | 07             |
| 79 1           |                 |                 |                 |                |                |                | 07 2           |                 |                 |                 |                |                |                |
| 88 1           | 83              | 88              | 85              | 88             | 87             | 88             | 02 1           | 05              | 05              | 08              | 99             | 00             | 04             |
| 91 1           | 88              | 85              | 86              | 85             | 86             | 90             | 05 2           |                 |                 |                 |                |                |                |
| 88 2           |                 |                 |                 |                |                |                | 01 2           | 95              | 95              | 87              | 92             | 96             | 01             |
| 80 1           | 85              | 78              | 86              | 84             | 83             | 82             | 03 3           |                 |                 |                 |                |                |                |
| 83 2           |                 |                 |                 |                |                |                | 94 2           | 91              | 94              | 97              | 97             | 94             | 94             |
| 84 1           | 87              | 82              | 89              | 86             | 85             | 86             | 88 3           | 95              | 89              | 99              | 90             | 85             | 88             |
| 87 2           |                 |                 |                 |                |                |                | 92 3           | 86              |                 |                 |                |                |                |
| 93 2           | 82              | 89              | 87              | 83             | 89             | 93             |                | 1902            |                 | 90              | 86             | 86             | 92             |
| 58 2           | 09              | 00              | 90              | 84             | 81             | 80             | 88 3           | 87              | 89              | 81              | 79             | 77             | 88             |
| 90 3           |                 |                 |                 |                |                |                | 90 3           | 80              | 80              | 82              | 81             | 79             | 90             |
| 95 2           | 95              | 97              | 01              | 97             | 09             | 91             | 82 3           | 88              | 81              | 83              | 83             | 91             | 80             |
| 90 3           |                 |                 |                 |                |                |                | 80 2           |                 |                 |                 |                |                |                |





segue: TABELLA I.

| 0 <sup>h</sup> | 20 <sup>h</sup> | 16 <sup>h</sup> | 12 <sup>h</sup> | 8 <sup>h</sup> | 4 <sup>h</sup> | 0 <sup>h</sup> | 0 <sup>h</sup> | 20 <sup>h</sup> | 16 <sup>h</sup> | 12 <sup>h</sup> | 8 <sup>h</sup> | 4 <sup>h</sup> | 0 <sup>h</sup> |   |
|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|----------------|----------------|----------------|---|
| 88 1           | 83              | 85              | 83              | 82             | 84             | 89             | 71 3           | 71              | 66              | 71              | —              | 71             | 71             |   |
| 91 2           |                 |                 |                 |                |                |                | — 3            |                 |                 |                 |                |                |                |   |
| 83 2           |                 |                 |                 |                |                |                | — 2            |                 |                 |                 |                |                |                |   |
| 86 2           | 57              | 82              | 75              | 67             | 78             | 85             | 89 2           | 90              | 94              | 96              | 97             | 02             | 90             |   |
| 86 3           | 85              | 80              |                 |                |                |                | 92 1           |                 |                 |                 |                |                |                |   |
|                |                 | 1908            | 83              | 80             | 83             | 86             | 04 2           | 98              | 06              | 06              | 09             | 11             | 05             |   |
| 86 3           | 86              | 77              | 92              | 90             | 93             | 86             | 05 1           |                 |                 |                 |                |                |                |   |
| 94 3           | 96              | 93              | 98              | 97             | 98             | 94             | 12 1           | 08              | 20              | 22              | 22             | 22             | 12             |   |
| 11 3           | 95              | 03              | 05              | 06             | 02             | 11             | 21 1           | 22              | 22              | 30              | 29             | 31             | 21             |   |
| 09 3           | 99              | 10              | 05              | 01             | 07             | 10             | 27 1           | 26              | 24              | 22              | 27             | 21             | 30             |   |
| 12 2           |                 |                 |                 |                |                |                | 38 2           |                 |                 |                 |                |                |                |   |
| 17 2           | 18              | 07              | 07              | 05             | 11             | 15             | 20 1           | 22              | 14              | 16              | 12             | 13             | 26             |   |
| 14 1           |                 |                 |                 |                |                |                | 31 2           |                 |                 |                 |                |                |                |   |
| 10 1           | 10              | 09              | 08              | 06             | 10             | 10             | 19 1           | 07              | 01              | 13              | 04             | 98             | 19             |   |
| 04 1           | 12              | 09              | 06              | 03             | 10             | 04             | 19 2           |                 |                 |                 |                |                |                |   |
| 04 1           | 07              | 03              | 01              | 02             | 02             | 04             | 99 3           | 89              | 88              | 10              | 95             | 82             | 99             |   |
| 01 1           | 99              | 95              | 98              | 96             | 91             | 00             | 87 3           | 86              | 1910            | 79              | 84             | 84             | 72             | 8 |
| 98 2           |                 |                 |                 |                |                |                |                |                 |                 |                 |                |                |                |   |
| 90 1           | 91              | 85              | 82              | 82             | 83             | 93             | 73 3           | 76              | 68              | 80              | 67             | 71             | 73             |   |
| 94 2           |                 |                 |                 |                |                |                | 72 3           |                 |                 |                 |                |                |                |   |
| — 2            | 69              | 74              | —               | 75             | 74             | —              | 67 2           | 63              | 64              | 67              | 66             | 64             | 70             |   |
| — 3            |                 |                 |                 |                |                |                | 60 3           |                 |                 |                 |                |                |                |   |
| 70 2           | 74              | —               | 66              | —              | —              | 75             | 68 2           | 64              | 62              | 61              | 59             | 63             | 66             |   |
| 78 3           |                 |                 |                 |                |                |                | 59 2           |                 |                 |                 |                |                |                |   |
| 1909           |                 |                 |                 |                |                |                | 58 1           | 57              | 69              | 68              | 70             | 70             | 58             |   |
| 69 3           | 68              | 61              | 70              | 63             | 67             | 69             | 08 2           |                 |                 |                 |                |                |                |   |
| 54 3           | 67              | 43              | 71              | 66             | 71             | 54             | 76 1           | 69              | 81              | 79              | 81             | 91             | 92             |   |

segue: TABELLA I.

| 0 <sup>h</sup> | 20 <sup>h</sup> | 16 <sup>h</sup> | 12 <sup>h</sup> | 8 <sup>h</sup> | 4 <sup>h</sup> | 0 <sup>h</sup> | 0 <sup>h</sup> | 20 <sup>h</sup> | 16 <sup>h</sup> | 12 <sup>h</sup> | 8 <sup>h</sup> | 4 <sup>h</sup> | 0 <sup>h</sup> |
|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|----------------|----------------|----------------|
| 85 1           | 87              | 91              | 95              | 06             | 06             | 85             | 71 2           | —               | 65              | 77              | 66             | 66             | 70             |
| 04 1           | 10              | 08              | 12              | 11             | 22             | 04             | 65 1           |                 |                 |                 |                |                |                |
| 21 1           | 25              | —               | 23              | 27             | 26             | 22             | 67 1           | 65              | 68              | 67              | 72             | 70             | 67             |
| 24 2           |                 |                 |                 |                |                |                | 74 1           | 83              | 87              | 88              | 90             | 85             | 74             |
| 24 1           | 31              | 30              | 35              | 30             | 28             | 26             | 89 1           | 93              | 02              | 98              | 05             | 02             | 89             |
| 34 2           |                 |                 |                 |                |                |                | 07 1           | 14              | 09              | 14              | 15             | 11             | 07             |
| 28 1           | 31              | 28              | 29              | 29             | 28             | 33             | 08 2           |                 |                 |                 |                |                |                |
| 34 2           |                 |                 |                 |                |                |                | — 1            | 17              | 18              | 24              | 19             | 21             | —              |
| 30 2           | 21              | 26              | 18              | 22             | 16             | 30             | — 2            |                 |                 |                 |                |                |                |
| 18 3           | 15              | 11              | 02              | 1911           | —              | 99             | 24 2           | 20              | 26              | 22              | 22             | 20             | 28             |
|                |                 |                 |                 |                |                |                | 36 3           |                 |                 |                 |                |                |                |
| 98 3           | 92              | 91              | 93              | 98             | 90             | 98             | 22 2           | 22              | 23              | 20              | 27             | 22             | 21             |
| 92 3           | 83              | 76              | 86              | —              | 74             | 92             | 20 3           |                 |                 |                 |                |                |                |
| — 3            | 73              | 72              | 62              | 74             | —              | —              | 1912           | 19              | 3               |                 |                |                |                |
| — 2            |                 |                 |                 |                |                |                |                |                 |                 |                 |                |                |                |
| 69 2           | 64              | 61              | 65              | 63             | 66             | 69             |                |                 |                 |                 |                |                |                |

Si è anche voluto, analogamente a quanto fatto da STETSON, tener conto della declinazione lunare al modo seguente: in corrispondenza alle osservazioni con angolo orario lunare 0<sup>h</sup>, si è considerata la declinazione lunare distinguendo le rispettive medie di latitudini in tre gruppi:

Gr. 1°,  $\delta < -12^\circ$ ; Gr. 2°,  $-12^\circ \leq \delta \leq 12^\circ$ ; Gr. 3°,  $\delta > 12^\circ$ .

La tabella I dà i secondi della latitudine (Carloforte  $\varphi = 39^\circ 8'$ ...) di tutte le medie successive effettuate per gli intervalli sopra detti di circa cinque giorni; gli angoli orari lunari corrispondenti sono segnati in testa alle colonne. Inoltre nella colonna  $\hat{A} = 0^h$  sono indicati gli intervalli di declinazione lunare (1 vuol dire  $\delta < -12^\circ$  ecc.) sopra detti; spesso la declinazione lunare cambiava intervallo durante i pochi giorni consecutivi corrispondenti all'angolo orario 0<sup>h</sup>, ed allora per questi giorni sono

riportate due medie diverse con l'indicazione degli intervalli alla 1<sup>a</sup> colonna, una media unica alla 7<sup>a</sup> colonna.

Così la tabella fornisce le successive medie di latitudine in ordine cronologico ed in connessione all'angolo orario lunare; non rappresenta quindi alcuna artificiosa combinazione.

Per ogni anno la luna, a causa della posizione della sua orbita rispetto al piano dell'eclittica, e tenuto pur conto della rivoluzione del nodo, durante le osservazioni in cui essa è prossima all'angolo orario zero, da gennaio a dicembre passa successivamente per gli intervalli di declinazione 3, 2, 1, 2, 3. In corrispondenza alle osservazioni con diversi angoli orari lunari, l'intervallo di declinazione cambia in genere; così se osservando con la luna al meridiano  $\delta$  corrisponde a 3, 15 giorni dopo corrisponderà ad 1. Importa notare che le indicazioni di declinazione si riferiscono soltanto alla prima colonna ( $A = 0$ ) della tabella I.

Per esaminare il comportamento statistico dei valori dati dalla tabella stessa, non si è ritenuto opportuno eliminare l'effetto delle ampie oscillazioni di latitudine date dagli stessi volumi citati, e corrispondenti essenzialmente ai periodi annuo e chandleriano. Infatti lo scopo dovrebbe essere di eliminare le oscillazioni estranee a quelle che si indagano; ma siccome non è da credere che queste maggiori oscillazioni estranee siano note indipendentemente, ogni intervento per eliminarle avrebbe l'effetto di confondere quelle abbastanza delicate che si ricercano.

Così si sono fatte senz'altro le medie complessive corrispondenti ai vari angoli orari lunari e rispettivamente ai valori 3, 2, 1 di  $\delta$ . Le medie della 1<sup>a</sup> colonna ( $A = 0$ ) sono ottenute in modo immediatamente evidente per i 3 gruppi di  $\delta$ . Per le colonne successive, in corrispondenza, per esempio a  $\delta = 3$ , si sono fatte le medie per quelle righe della tabella I in cui è segnato  $\delta = 3$  alla 1<sup>a</sup> colonna, oppure poste nel periodo intermedio tra un  $\delta = 3$  e un  $\delta = 2$ ; analogamente per  $\delta = 1$  e  $\delta = 2$ .

Le medie complessive ricavate sono riportate dalla tabella II.

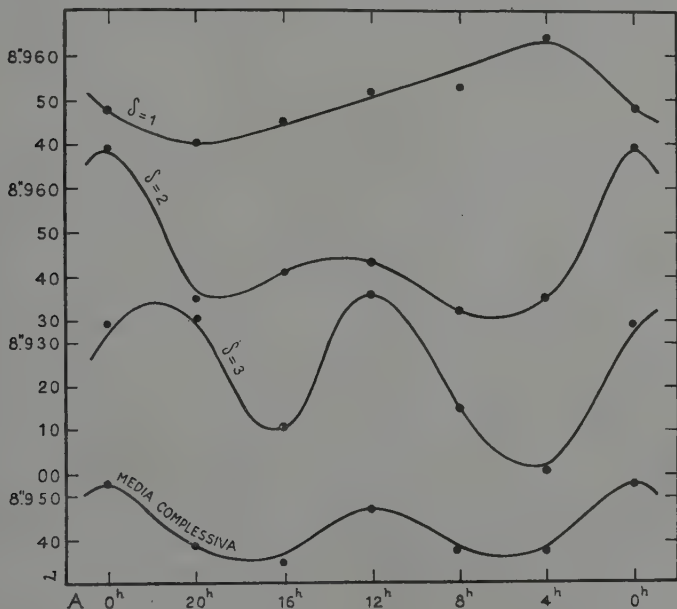
TABELLA II.

*Medie dei valori della latitudine  
corrispondenti a diversi valori dell'angolo orario e della declinazione lunare*

| $\delta \backslash A$ | 0 <sup>h</sup> | 20 <sup>h</sup> | 16 <sup>h</sup> | 14 <sup>h</sup> | 8 <sup>h</sup> | 4 <sup>h</sup> | Media |
|-----------------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|----------------|----------------|-------|
| 3                     | 8.934          | 8.935           | 8.911           | 8.941           | 8.915          | 8.901          | 8.923 |
| 2                     | .969           | .935            | .941            | .943            | .932           | .935           | .942  |
| 1                     | .948           | .940            | .945            | .952            | .953           | .964           | .950  |
| Medie                 | 8.953          | 8.939           | 8.935           | 8.947           | 8.938          | 8.938          |       |

Le medie generali dell'ultima riga sono ricavate direttamente dalla tabella I, perchè i valori singoli dati dalla tabella II non hanno lo stesso peso. I diagrammi seguenti mostrano graficamente le oscillazioni dei valori relativi alle quattro righe di questa tabella.

Come vedesi dai diagrammi stessi, le oscillazioni corrispondenti ai tre intervalli prescelti di  $\delta$  e al complesso delle osservazioni sono abbastanza decise. E dato l'errore medio delle singole medie giornaliere di latitudine usate ed il loro grande numero, non v'è dubbio sulla realtà delle oscillazioni stesse.



Gli intervalli di declinazione della luna al meridiano durante le osservazioni, denominati 1, 2, 3, si ripresentano gli stessi nei vari anni circa alle stesse epoche dell'anno; così, per esempio la declinazione bassa si ha tra maggio e agosto. Allora a determinare le oscillazioni dei diagrammi disegnati, oltre ai termini connessi al mese sinodico, o piuttosto alla marea semidiurna (detta  $M_2$ ), o alla diurna (che sembra suggerita dal 1° diagramma), concorre il termine annuo, mentre il chandleriano nelle medie di dodici anni viene eliminato. Passando alla media di tutto il vasto complesso delle osservazioni senza più distinzioni per le declinazioni lunari (1° diagramma), l'interferenza dell'oscillazione annua viene evidentemente anch'essa eliminata, e ciò è in accordo con l'ampiezza d'oscillazione osservata.



Per analizzare le curve, come esse stesse sembrano suggerire, saranno qui considerate due periodicità, una avente per periodo l'intera rivoluzione di 24<sup>h</sup> in angolo orario (percorsa in media in un mese sinodico), l'altra la metà, che corrisponde anche al periodo della marea semidiurna, 12<sup>h</sup> 25<sup>m</sup> di tempo medio.

Così partendo per ognuna dai valori medi delle latitudini, le curve potranno rappresentarsi nella forma:

$$y = a_1 \sin(15t + \varphi_1) + a_2 \sin(30t + \varphi_2)$$

$t$  essendo l'angolo orario (ascissa dei diagrammi), le  $a$  e  $\varphi$  ampiezze e fasi delle oscillazioni;  $t$  è in ore, ma  $15t$ ,  $30t$ ,  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  risultano in gradi. I risultati di questa analisi sono dati alla tabella III.

TABELLA III.

*Analisi dei diagrammi per due periodicità.*

|                                | $a_1$ | $\varphi_1$ | $a_2$ | $\varphi_2$ |
|--------------------------------|-------|-------------|-------|-------------|
| 1 <sup>a</sup> curva . . . . . | 0'009 | 176°55'     | 0'005 | 181°33'     |
| 2 <sup>a</sup> curva . . . . . | .006  | 65°29'      | .013  | 100°45'     |
| 3 <sup>a</sup> curva . . . . . | .009  | 4°36'       | .018  | 53°16'      |
| Curva complessiva . . . .      | .003  | 103°29'     | .009  | 81°58'      |

Come vedesi nella 1<sup>a</sup> curva prevale il termine corrispondente al periodo della marea diurna, nelle altre e specialmente nell'ultima, il termine col periodo della semidiurna; notevoli le differenze di fase, non facili ad interpretare. In complesso questa rappresentazione con due sinusoidi interferenti pone delicati problemi sull'esatto significato dei termini. Tentativi di spiegazione delle variazioni a corto periodo della latitudine ricorrono ai concetti di deviazione della verticale, marea della crosta solida terrestre, variazioni periodiche della rifrazione atmosferica (per maree atmosferiche), od altrimenti. È più diffusa l'opinione della oscillazione semidiurna in connessione con la marea  $M_2$ .

Convien anche analizzare per una periodicità semplice, quella principale della marea semidiurna:

$$y = a \sin(15t + \varphi)$$

intendendosi qui da considerare una sola oscillazione sinusoidale (il periodo diviene 12<sup>h</sup> di angolo orario). I risultati sono riuniti nella tabella seguente:

TABELLA IV.

*Analisi dei diagrammi per una periodicità semplice.*

|                                | $a$    | $\varphi$ |
|--------------------------------|--------|-----------|
| 1 <sup>a</sup> curva . . . . . | 0''004 | 184°0'    |
| 2 <sup>a</sup> curva . . . . . | .014   | 99°40'    |
| 3 <sup>a</sup> curva . . . . . | 0.18   | 52°51'    |
| Curva complessiva . . .        | .0085  | 85°58'    |

Anche qui sono da notare le differenze di fase, e del resto si ha quasi esatta corrispondenza coi termini  $a_1$  e  $\varphi_2$  della tabella III.

In conclusione, mentre risultano indubbie oscillazioni delle latitudini in connessione all'angolo orario lunare, indipendenti dalle maggiori annua e chandleriana, occorre tener conto di più estesi dati d'osservazione, specialmente per la retta interpretazione dei risultati.

Non sarà inutile intanto notare che la semiampiezza dell'oscillazione semidiurna, 0''.0085, è prossima all'importo dedotto da considerazioni teoriche per il termine  $M_2$  (circa 0''.008 per Carloforte; l'importo dipende oltre che dalla massa e raggio terrestre, dalla latitudine del luogo e dagli elementi lunari). Inoltre, pur avendo operato senza alterare in alcun modo i dati dell'Ufficio Internazionale di Potsdam, non risultano oscillazioni ampie come altre <sup>(1)</sup> ricerche hanno creduto provare.

(<sup>1</sup>) V., p. es., STETSON, *Trans. Amer. Geoph. Un.*, 1930-31-32-33.

**Fisica.** — *Centrifugazione elettronica.* Nota II <sup>(1)</sup> di QUIRINO MAJORANA, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Nella Nota precedente, dallo stesso titolo, ho descritto talune esperienze eseguite, ponendo in rotazione, più o meno rapida, delle cellule fotoelettriche al sodio, situate simmetricamente intorno all'asse di rotazione. La corrente fotoelettrica così ottenuta, senza l'uso di alcuna forza elettromotrice aggiuntiva, veniva modificata, in conseguenza di velocità di rotazione relativamente moderate (qualche giro al secondo). Ho sviluppato, in quest'ultimo mese, tali ricerche, cambiando, in vario senso, i dispositivi sperimentali. Mi sono dapprima servito ancora, delle stesse tre cellule già da me precedentemente usate (al sodio, in neon, del diametro di cm. 4,5; con griglie a rete di mmq. 4 di maglia, situate a cm. 0,5 dalle placche fotosensibili), disposte come indicato nella Nota precedente. Ho poi sostituito alle cellule al sodio, altre due al potassio, od ancora al cesio, cosiddette *giganti*. Esse hanno la placca fotosensibile all'incirca rettangolare, di cmq.  $12 \times 7$ ; con griglia di molibdeno, di cmq.  $4 \times 8$ , aventi maglie di cmq. 1, ciascuna; le griglie distano dalla placca circa cm. 2. Tali cellule sono a vuoto assai spinto. Mi sono state fornite dall'ingegnere A. CASTELLANI, della SAFAR, di Milano.

La sensibilità delle cellule fotoelettriche ad effetto esterno suddette, da me usate senza f. e. m. acceleratrice, è rispettivamente di 0,85  $\mu$ a/lumen, per il sodio; 0,63, per il potassio; 4,7 il per cesio.

A maggior chiarimento di quanto è stato descritto nella Nota precedente, aggiungo che le prese di corrente dall'apparecchio ruotante sono fatte da un lato, mediante il pozzetto di mercurio centrale, indicato nella figura; e dall'altro, attraverso i due cuscinetti a sfera, su cui il congegno ruotante è imperniato.

Riassumo le esperienze eseguite ed i risultati ottenuti.

*Cellule al sodio, in neon; luce bianca a diverse intensità.* — Per queste esperienze ho usato la stessa lampada intensiva già indicata, regolandone la intensità di illuminazione della cellula, fra circa 40 e 2 lux. La velocità di rotazione delle tre cellule, ha variato tra 0,8 e 28 giri a secondo, circa.

---

(<sup>1</sup>) Presentata nell'Adunanza del 16 febbraio 1940-XVIII.

Per tali due illuminazioni, ho ottenuto i diagrammi della fig. 1. Essi sono riferiti a scale differenti, in causa dei diversi valori delle correnti fotoelettriche ( $0,6$  e  $0,03 \mu\text{a}$ , per velocità di rotazione prossime a zero). Il dia-

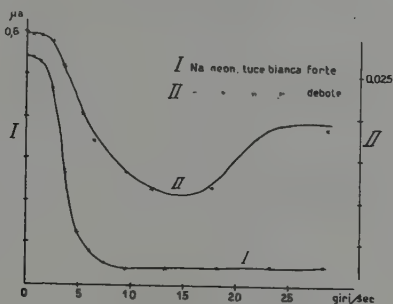


Fig. 1.

gramma, corrispondente alla grande illuminazione, ricorda quello già rilevato nella Nota precedente; mentre, quello per la piccola illuminazione, presenta un minimo verso i 15 giri/sec, e sembra andare asintoticamente ad un valore massimo, per velocità maggiori.

*Cellule al sodio in neon; luce colorata di varia struttura.* — I diagrammi della fig. 2, sono stati ottenuti filtrando con uno spettroscopio, la luce

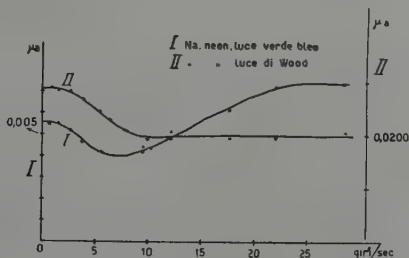
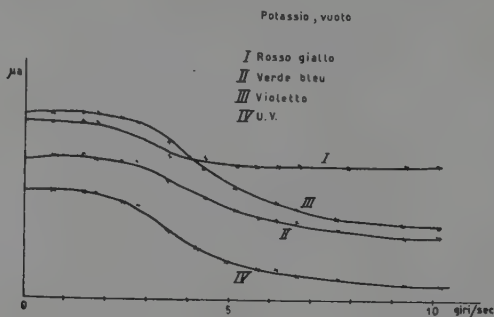


Fig. 2.

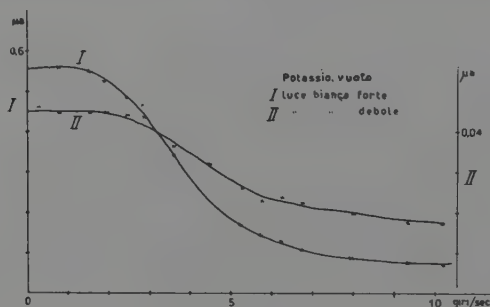
verde e blu, da una lampada ad incandescenza, da 1000 watt; oppure quella di Wood, con un vetro al nichel. La diversità dell'andamento di tali diagrammi, analoga in certo modo a quanto si constata nella fig. 1, può essere ascritta sia alle differenti lunghezze d'onda usate, sia alle loro intensità. Una discriminazione di tali due cause, è per ora prematura. Per luci di maggiore lunghezza d'onda (sino al rosso), le cellule al sodio non sono abbastanza sensibili.

*Cellule al potassio, in vuoto; luce bianca a diverse intensità.* — Osservo anzitutto che, tanto con queste cellule, che con quelle al cesio, di cui dirò in seguito, pur essendo entrambi i tipi sforniti di gas interno, l'andamento dei diagrammi *velocità di rotazione-intensità fotoelettrica*, presenta le stesse caratteristiche generali, già rilevate per le cellule al sodio in



gas. Si arriva così alla interessante conclusione che *l'effetto non dipende dalla presenza del gas*, come dapprima poteva sospettarsi. Evidentemente, questa constatazione semplificherà molto, a suo tempo, la definitiva interpretazione dell'effetto stesso.

Per le cellule al potassio in vuoto, si sono ottenuti i diagrammi della fig. 3; nella quale, per semplicità di disegno, non sono state indicate le



quattro differenti scale. I diagrammi si riferiscono ad illuminazione grande e piccola, rispettivamente. Per tali cellule non si è potuta superare la velocità di rotazione di circa 10 giri-sec, per ragioni di sicurezza meccanica, essendo esse molto più grandi di quelle al sodio. È forse questa la ragione, per cui il diagramma in luce più debole, non presenta il minimo, offerto dalla fig. 1; esso lo si sarebbe forse potuto rilevare, per velocità maggiori.

*Cellule al potassio, in vuoto; luce colorata di varia struttura.* — I diagrammi della fig. 4, si riferiscono a luci filtrate da uno spettro continuo, oppure da una lampada a mercurio in quarzo, mediante un vetro al nichel. Si rileva che le maggiori lunghezze d'onda dànno diagrammi meno cadenti.

*Cellule al cesio in vuoto; luce varia.* — Per queste cellule, è stata possibile la costruzione dei tre diagrammi indicati nella fig. 5: in luce bianca, nella regione rossa, e nell'u. v. (luce di WOOD). I tre diagrammi così ottenuti, presentano andamenti poco differenti. Per la regione verde-blu, non si ha sufficiente sensibilità, ed il diagramma non è stato rilevato.

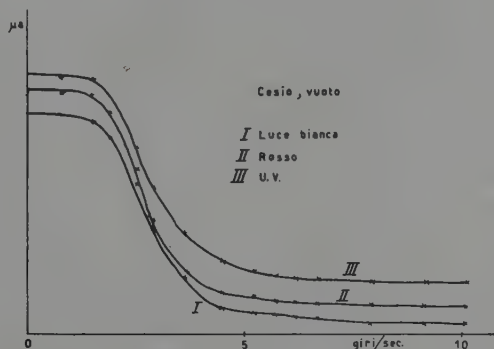


Fig. 5.

*Effetto in assenza di luce.* — Gli effetti di cui si è sinora detto, si riferiscono ad azione elettrica della luce, variabile con la velocità di rotazione. Ma sperimentando con grande attenzione, è possibile constatare un effetto, per vero debolissimo, ma del tutto sicuro, anche quando le cellule rotanti sono tenute completamente al buio. Infatti, grazie alla sensibilità del galvanometro usato ( $7 \cdot 10^{-10}$  amp/divisioni), si osserva facilmente una deviazione, dell'ordine di circa  $10^{-9}$  ampère, per le più alte velocità, che manca per le piccole. Tale deviazione è però di segno contrario a quella fotoelettrica; si può supporre cioè, che essa corrisponda ad elettroni, che migrano dalla griglia verso la placca fotosensibile. Questa corrente, che cresce con la velocità di rotazione, è maggiore per il potassio, più piccola per il cesio, nulla o quasi per il sodio. Forse essa non può assimilarsi a quella che, come è noto, è data dalle cellule fotoelettriche, tenute al buio, e che è dell'ordine di  $10^{-11}$  amp (<sup>1</sup>); o far dipendere dalle note proprietà radioattive del potassio; principalmente perchè essa sparisce, se le cellule sono ferme.

(<sup>1</sup>) SCHULZE, « Zeitsch. f. Phys. » 90, 63, 1934.

*Orientamento delle cellule.* — Come ho già detto nella Nota precedente, per spiegare l'effetto osservato, si può supporre che, per la rotazione, taluni elettroni vengano centrifugati dalla placca verso la griglia. E lo studio che mi riservo di compiere, usando cellule a griglia continua, anziché a rete, permetterà di verificare questa ipotesi. Ma poichè non ho ancora a mia disposizione cellule del genere, ho voluto indagare, se il constatato effetto persiste, quando muti l'orientamento del sistema placca-griglia, rispetto alla direzione ed al senso della forza centrifuga. L'apparecchio già descritto nella Nota precedente permette simile cambiamento. Basta all'uopo girare ciascuna delle cellule di  $180^\circ$ , in guisa che il metallo sensibile sia rivolto verso l'asse di rotazione, e la griglia ancora più vicina a questo. Anche con questa nuova disposizione, si constata l'effetto, con modalità circa identiche a quelle dei casi precedenti. Inoltre, questa immutevolezza di risultati si rileva ancora, quando le cellule vengono poste in posizione angolare intermedia, cioè col piano delle loro placche e griglie, passante per l'asse di rotazione del sistema. Ciò fa sospettare, che il cammino degli elettroni, nello spazio compreso tra placca e griglia, rimane perturbato, comunque la cellula sia disposta, nel subire un moto qualsiasi di rotazione.

Dei nuovi fatti ora esposti, ho dato di proposito, annunzio sommario. Essi meritano ulteriore minuto controllo. All'uopo nuovi dispositivi sono in corso di preparazione. E soltanto quando il quadro dei fenomeni osservati, sarà in tal guisa completato, si potrà discuterlo con maggior cognizione di causa e darne una soddisfacente interpretazione.

*Aggiunta, nel correggere le bozze* (1° marzo 1940-XVIII). Nel proseguire le ricerche sperimentali che si espongono in questa Nota e nelle due precedenti, ho riconosciuto che una causa imprevista, influenza l'andamento dei diagrammi rilevati. Essa consiste in un ostacolo presentato dai cuscinetti a sfera, al moto dei fotoelettroni. Tale ostacolo non può essere assimilato ad una semplice resistenza elettrica. Eliminata tale influenza, *la centrifugazione elettronica avviene in modo del tutto conforme alle previsioni formulate all'inizio delle ricerche.* Ciò sarà chiarito in prossime Note.

---



**Elettrochimica.** — *Potenziali elettrochimici ed effetto Volta.* —  
IV — *I potenziali assoluti degli elettrodi* <sup>(1)</sup>. Nota <sup>(2)</sup> di OSCAR  
SCARPA, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. — La conoscenza dei valori dei potenziali elettrochimici assoluti degli elettrodi metallici, cioè delle vere differenze di potenziale elettrico che si stabiliscono fra l'elettrodo e l'elettrolita che lo bagna, ha grande importanza per l'elettrochimica teorica. Soltanto di un elettrodo, di quello detto a calomelano (Mercurio/Soluzione normale di cloruro di Potassio satura di cloruro mercurioso), è stato però possibile eseguire la misura del potenziale assoluto, ottenendo valori meritevoli di grande considerazione.

Tale misura venne fondata da OSTWALD, da ROTHMUND ecc. sulla teoria elettrocapillare che conduce a ritenere massima la tensione superficiale posseduta dal mercurio posto in contatto con un dato elettrolita, allorchando la tensione elettrica fra le due fasi in contatto è nulla. Sperimentando con elettrodi di mercurio parzialmente contenuti in tubi capillari, oppure con elettrodi costituiti in modo che il mercurio, uscendo da fori capillari, sgoccioli nell'elettrolita è risultato che il potenziale elettrochimico assoluto del suddetto elettrodo a calomelano è  $+ 0,56$  Volt a  $18^{\circ}$  C. (mercurio elettropositivo rispetto all'elettrolita che lo bagna).

Non si deve tuttavia dimenticare che alcune esperienze fondate su altri principi (ideati da BILLITZER, da SCHULTZ e da BENNEWITZ) hanno condotto a risultati completamente diversi, tanto nel segno quanto nel valore assoluto, mentre altre ricerche, pur fondate su metodi differenti dai sopracitati, hanno condotto a confermare l'ordine di grandezza dei valori ottenuti da OSTWALD, da PALMAER, ecc. ai quali viene generalmente attribuito il massimo peso <sup>(3)</sup>.

---

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nel Laboratorio di Elettrochimica del R. Politecnico di Milano.

<sup>(2)</sup> Presentata nell'Adunanza del 16 febbraio 1940-XVIII.

<sup>(3)</sup> Una esposizione riassuntiva con una sufficiente bibliografia è esposta a pag. 302 e sg. del trattato: *Electrochimie des solutions* di S. GLASSTONE (Paris, 1936). Ricordo che i valori dedotti da BILLITZER, e da BENNEWITZ sono dell'ordine di  $- 0,20$  Volt (invece di  $+ 0,56$  Volt); ma gravi obiezioni infirmano l'accettabilità dei corrispondenti metodi di misura.

I principali risultati sono riportati nella seguente tabella:

| Autore   | Metodo impiegato                                                                                   | Potenziale elettro-chimico assoluto dell'elettrodo a calomelano |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| Rothmund | Massimo della tensione sup. del mercurio contenuto in un capillare                                 | + 0,56 Volt                                                     |
| Ostwald  | Elettrodo a sgocciolio di mercurio                                                                 | + 0,56                                                          |
| Paschen  | »       »       »       »       »                                                                  | + 0,56                                                          |
| Palmaer  | »       »       »       »       »                                                                  | + 0,56                                                          |
| Frumkin  | Studio della traiettoria di gocce di mercurio cadenti in seno dell'elettrolita.                    | + 0,53                                                          |
| Andauer  | Misura diretta dell'effetto Volta fra la superficie libera del mercurio e quella dell'elettrolita. | + 0,51                                                          |
| Bodforss | Studio della traettoria delle gocce di mercurio cadenti in seno dell'elettrolita                   | + 0,40                                                          |

Se si esaminano le disposizioni sperimentali adottate da ROTHMUND, da OSTWALD, da PASCHEN e da PALMAER è facile convincersi che il risultato delle loro misure non richiede alcuna correzione per l'esistenza delle differenze di potenziale Voltiano al contatto fra i metalli eterogenei che costituiscono i circuiti. E infatti tanto nel caso in cui la misura è fondata sulla determinazione delle condizioni nelle quali diventa massima la tensione superficiale del mercurio contenuto in un capillare (metodo usato da ROTHMUND), quanto nel caso in cui si impiegano elettrodi a sgocciolio di mercurio, gli effetti Volta ai contatti dei reofori di rame con i fili di platino, e dei fili di platino con il mercurio nel capillare e con il mercurio di fondo, si compensano nella catena metallica <sup>(1)</sup>. Il valore + 0,56 Volt si può quindi assumere non come valore *apparente* ma bensì come reale <sup>(2)</sup>.

<sup>(1)</sup> Ciò invece non avviene su alcuni dei metodi ideati da BILLITZER e da BENNEWITZ.

<sup>(2)</sup> Per la distinzione fra i valori *apparenti* e REALI dei potenziali elettrochimici rimando alle precedenti mie Note sul medesimo argomento pubblicate nei « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei » e in questi « Rendiconti dell'Accademia d'Italia » (anni 1939 e 1940, XVII e XVIII).

2. — Poichè finora non è possibile determinare con misure dirette il potenziale elettrochimico assoluto dell'elettrodo normale a idrogeno, il suo valore apparente è stato dedotto confrontando questo elettrodo con un elettrodo normale a calomelano mediante la disposizione sperimentale rappresentata nella fig. 1.

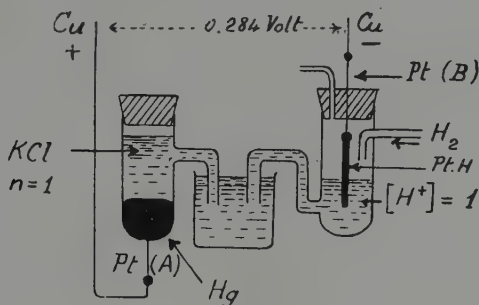


Fig. 1.

Poichè la differenza di potenziale che si misura fra i due reofori di rame è 0,284 Volt, è stato dedotto come valore apparente del potenziale assoluto dell'elettrodo normale a idrogeno + 0,277 Volt, non tenendo alcun conto delle differenze di potenziale esistenti ai contatti fra i metalli eterogenei costituenti il circuito metallico, e non tenendo conto della

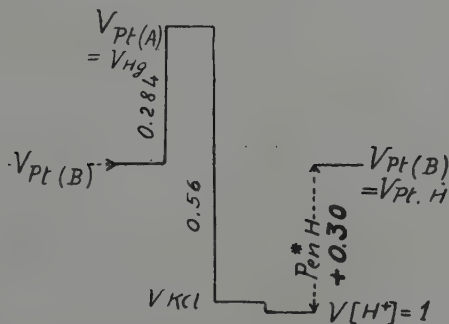


Fig. 2.

differenza di potenziale al contatto fra la soluzione normale di KCl e quella di HCl. Poichè quest'ultima differenza di potenziale, se calcolata con l'equazione di HENDERSON, è dell'ordine di 0,02 Volt, tenendone conto, il potenziale assoluto apparente dell'elettrodo normale a idrogeno (cioè quello non corretto per gli effetti Voltiani) risulta dell'ordine di + 0,30 Volt, come mostra il calcolo grafico riportato nella fig. 2.

Per dedurre il valore *reale* bisogna tener conto degli effetti Volta esistenti ai contatti metallici nel circuito di misura, seguendo il metodo di calcolo che ho indicato nella Nota 1<sup>a</sup> (1). Tali contatti sono (vedi fig. 1):

Cu/Pt, Pt/Hg, Pt idrogenato/Pt, Pt/Cu

e quindi, come risultante degli effetti Voltiani si deve tener conto della somma dei due potenziali di contatto fra il Platino puro e il mercurio e fra il Platino idrogenato e il Platino puro.

Come ho fatto osservare nelle Note precedenti, non potendo calcolare i valori di questi potenziali di contatto in base alle costanti del FERMI, poichè mancano i dati sufficienti allo scopo, e non potendo usufruire dei valori finora noti dei potenziali intrinseci dei metalli a contatto ricavati dallo studio dei fenomeni di diffrazione degli elettroni, perchè essi sono notoriamente affetti da errori assoluti dell'ordine di un Volt e più, cosicchè le loro differenze risultano affette da errori enormi, tali da rendere irrazionale ogni loro applicazione al presente studio, si deve fondare questo studio sull'applicazione della equazione di EINSTEIN, cioè sulla ipotesi che ha già condotto MILLIKAN, e con esso numerosi Fisici moderni (LANGMUIR, CORBINO ecc.) ad ammettere l'eguaglianza numerica fra i valori degli, effetti Volta esterni e dei potenziali di contatto (effetti Volta interni) (2).

Ciò posto, il calcolo del potenziale elettrochimico assoluto *reale* dell'elettrodo normale a idrogeno si può eseguire graficamente come mostra la fig. 3, la quale si riferisce al caso in cui si assume come valore del potenziale di contatto fra mercurio e platino + 0,31 Volt (valore indicato da EXNER) e + 0,50 Volt fra il platino idrogenato e il platino puro, come ho dimostrato nelle note precedenti. Risulta:  $P_{\text{enH}}^* = + 0,49$  Volt (il Platino idrogenato elettropositivo rispetto all'elettrolita) (3).

Se invece si assume come potenziale di contatto fra mercurio e platino il valore + 0,20 Volt, che, come ho mostrato nella Nota precedente (3) deve essere ritenuto più esatto, risulta:  $P_{\text{enH}}^* = + 0,60$  Volt.

(1) « Rendiconti R. Acc. dei Lincei », maggio 1939-XVII e « Nuovo Cimento », giugno 1939-XVII.

(2) In una Nota successiva mostrerò come questa ipotesi conduca a conclusioni che sono in perfetto accordo con quanto risulta dalla applicazione del secondo principio di termodinamica allo studio dell'effetto Volta.

(3) *Potenziali elettrochimici e effetto Volta*. Nota III. Questi « Rendiconti », dicembre 1939-XVIII. Ricordo che con il simbolo  $P_{\text{enM}}^*$  indico genericamente i valori dei potenziali ASSOLUTI REALI NORMALI, cioè quando le soluzioni hanno concentrazione *normale* rispetto all'ione metallico.

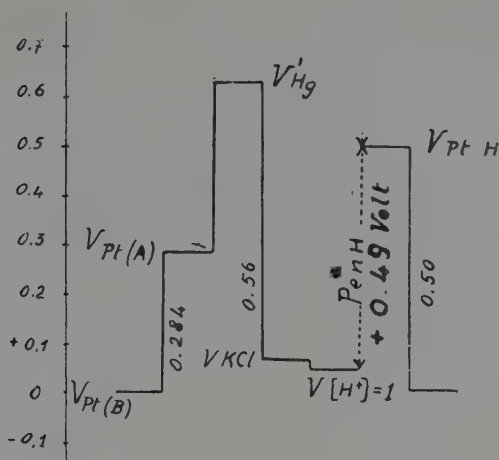


Fig. 3.

Bisogna tener presente che quest'ultimo valore esprime la differenza di potenziale fra la superficie del platino idrogenato contenuto nell'elettrodo normale a idrogeno e l'elettrolita, e non già fra il terminale esterno di platino (B) e l'elettrolita, la quale per  $V_{\text{Hg/Pt}} = 0,20$  Volt risulterebbe:  $+ 0,10$  Volt (il platino B elettropositivo rispetto all'elettrolita).

3. — In base al valore del potenziale elettrochimico assoluto *reale* dell'elettrodo normale a idrogeno, si possono calcolare i valori dei potenziali elettrochimici assoluti *reali* dei diversi metalli sommando il detto valore a quelli dei potenziali elettrochimici *reali* relativi all'elettrodo normale a idrogeno, valori che ho esposto nella Nota III ora citata tenendo conto, per il loro calcolo, anche delle correzioni che si debbono apportare ai valori degli effetti Volta dedotti sperimentalmente. I risultati sono elencati nella tabella seguente, ove, per facilitare i confronti, sono riportati anche i valori dei potenziali assoluti finora ritenuti validi (i quali furono dedotti sommando il potenziale assoluto *apparente* dell'elettrodo normale a idrogeno con i rispettivi potenziali *apparenti* relativi<sup>(1)</sup>).

(<sup>1</sup>) Questi valori sono quelli riportati nei trattati e nelle tabelle di dati Chimico-fisici. Essi sono riferiti a soluzioni di concentrazione normale rispetto al corrispondente ione e quindi sono stati generalmente dedotti con il calcolo applicando la equazione di NERNST e non tenendo alcun conto dei coefficienti di attività degli ioni.

*Potenziali elettrochimici normali assoluti dei metalli.*

| Metallo<br>e reazione       | Valori apparenti      | Valori reali |
|-----------------------------|-----------------------|--------------|
| $K \rightarrow K^+ . .$     | — 2,62 Volt           | — 0,10 Volt  |
| $Na \rightarrow Na^+ .$     | — 2,41                | — 0,11       |
| $Mg \rightarrow Mg^{++} .$  | — 1,25                | — 0,02       |
| $Al \rightarrow Al^{+++} .$ | — 1,03                | + 0,02       |
| $Zn \rightarrow Zn^{++} .$  | — 0,46                | + 0,23       |
| $Fe \rightarrow Fe^{++} .$  | — 0,14                | + 0,37       |
| $Cd \rightarrow Cd^{++} .$  | — 0,10                | + 0,38       |
| $Ni \rightarrow Ni^{++} .$  | + 0,07                | + 0,43       |
| $Sn \rightarrow Sn^{++} .$  | + 0,17                | + 0,52       |
| $Pb \rightarrow Pb^{++} .$  | + 0,18                | + 0,51       |
| $H \rightarrow H^+ . .$     | + 0,30 <sup>(1)</sup> | + 0,60       |
| $Sb \rightarrow Sb^{+++} .$ | + 0,40                | + 0,65       |
| $Bi \rightarrow Bi^{+++} .$ | + 0,52                | + 0,71       |
| $Cu \rightarrow Cu^{++} .$  | + 0,64                | + 0,78       |
| $Ag \rightarrow Ag^+ . .$   | + 1,10                | + 1,12       |
| $2Hg \rightarrow Hg^{++} .$ | + 1,10                | + 1,12       |
| $Au \rightarrow Au^{+++} .$ | + 1,66                | + 1,51       |

L'esame della tabella conduce a ritenere che (nelle soluzioni normali rispetto ai corrispondenti ioni) soltanto a partire dal Magnesio, andando verso i metalli più ossidabili, il potenziale assoluto degli elettrodi risulta negativo rispetto all'elettrolita che bagna il metallo, cioè a partire dal Magnesio la tensione di soluzione del metallo (intesa nel senso di NERNST) va considerata maggiore della pressione osmotica (reale o ipotetica) dei rispettivi ioni esistenti nella soluzione di concentrazione normale. Per tutti i metalli meno ossidabili (Alluminio compreso) avviene invece (per

<sup>(1)</sup> Corretto per il potenziale di diffusione fra le soluzioni normali di KCl e di HCl.

soluzioni normali) il fenomeno opposto, e cioè la tensione di soluzione del metallo va considerata inferiore alla pressione osmotica dei rispettivi ioni. In altre parole l'inversione del segno dei potenziali elettrochimici assoluti si inizia nella scala di questi potenziali a partire dall'alluminio invece che dal nichelio.

È da tener presente che questo risultato non è affatto in contraddizione con quanto si conosce circa il comportamento elettrochimico dei diversi elettrodi, nè rispetto alle reazioni di sostituzione elettrochimica dei diversi metalli, poichè l'ordine dei rispettivi metalli nella scala dei potenziali elettrochimici non è alterato.

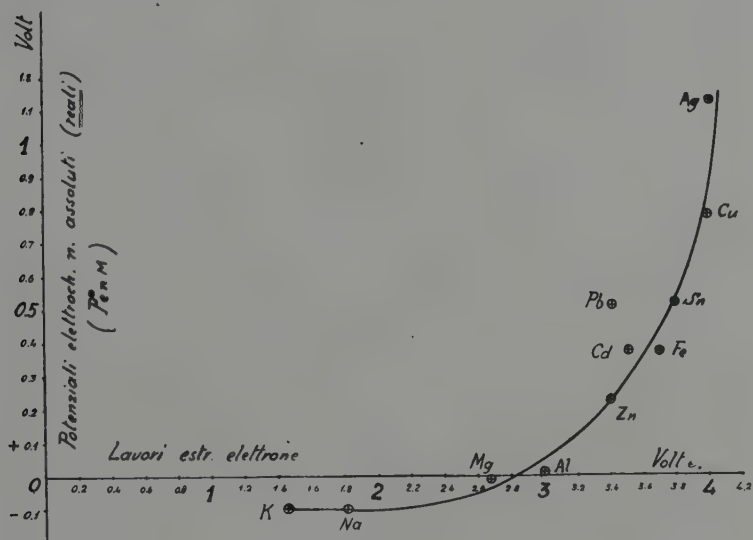


Fig. 4.

Risulta inoltre che mentre i valori dei potenziali elettrochimici *reali* assoluti dei metalli intermedi alla serie elettrochimica sono maggiori (in valore assoluto) dei potenziali assoluti *apparenti*, i valori corrispondenti ai metalli estremi sono minori (e per i metalli più ossidabili molto minori) di quelli apparenti. Ne segue che le differenze fra le tensioni di soluzione dei metalli estremi (differenze che hanno sempre sollevato tante discussioni e tanti ragionevoli dubbi sulla accettabilità della ipotesi di NERNST riguardante le tensioni di soluzione) risultano enormemente minori di quanto è stato calcolato in base ai dati finora ritenuti validi <sup>(1)</sup>.

<sup>(1)</sup> Di queste tensioni di soluzione discuterò in una Nota successiva.



4. — Considerazioni analoghe a quelle esposte nella Nota III mi hanno condotto a stabilire che esiste una relazione fra i valori dei potenziali elettrochimici ASSOLUTI REALI degli elettrodi metallici e il lavoro di estrazione degli elettroni dal corrispondente metallo. Il diagramma, nel quale i valori dei lavori di estrazione dell'elettrone (cioè la cosiddetta: *funzione elettronica*  $\varphi$ ) sono quelli dedotti dalle pubblicazioni di LANGMUIR e di HUGHES, è rappresentato dalla fig. 4.

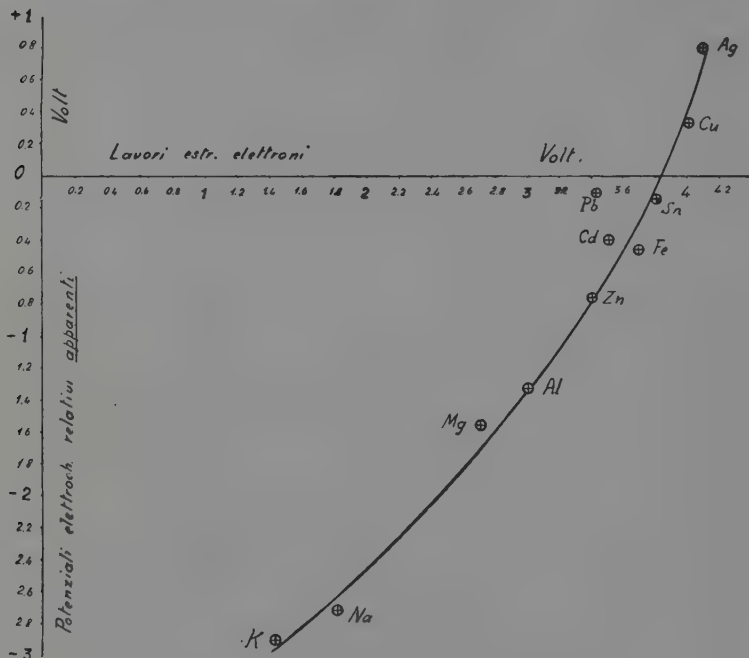


Fig. 5.

È notevole che in questo grafico, come già in quelli pubblicati nella Nota III, il punto corrispondente al Piombo presenta il massimo scarto rispetto al diagramma continuo, scarto che raggiunge 0,4 Volt. Sembra ragionevole attribuire questo fatto alla difficoltà di disporre di campioni di piombo con superfici ben deterse e non alterate (<sup>1</sup>).

5. — La grande regolarità nella distribuzione dei punti rappresentativi corrispondenti ai diversi metalli rispetto al diagramma continuo di fig. 4 indica che i valori della funzione elettronica  $\varphi$ , riportati nelle

(<sup>1</sup>) Vedere in proposito le osservazioni esposte nella nota precedente.

citare pubblicazioni di LANGMUIR e di HUGHES, debbono essere considerati molto più esatti di quanto si riteneva finora. Ne segue che il diagramma di fig. 4 si può ritenere atto a rappresentare con sufficiente fedeltà l'andamento della relazione fra potenziali elettrochimici assoluti e lavori di estrazione degli elettroni, e, poichè i potenziali elettrochimici apparenti relativi possono essere misurati con precisione superiore al centesimo di Volt, risulta che si può utilizzare il detto diagramma (o più facilmente quello di fig. 5) non solo per correggere dai probabili errori sperimentali i valori di  $\varphi$  che da esso scartano, ma anche per dedurre (grazie a ragionevole interpolazione) i valori della funzione elettronica  $\varphi$  (o almeno il suo ordine di grandezza) per i metalli per cui la funzione stessa non è stata misurata (1).

È questo un altro risultato al quale ha, indirettamente, condotto lo studio qui intrapreso.

---

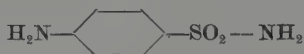
(1) L'obbiezione per cui i valori dei potenziali elettrochimici assoluti sono stati dedotti applicando la teoria elettrocapillare, metodo la cui validità è da alcuni messa in dubbio, non ha alcun peso, perchè al fine sopracitato si può utilizzare il diagramma di figura 5 che ha per ordinate i potenziali elettrochimici apparenti, relativi all'elettrodo normale a idrogeno.

---

**Chimica.** — *Ricerche sulle solfonamidi* <sup>(1)</sup>. Nota I di ANGELO MANGINI, presentata <sup>(2)</sup> da GUIDO BARGELLINI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Fra i composti che in questi ultimi anni hanno maggiormente interessato il mondo chimico e medico, occupano uno dei primi posti i derivati sulfonamidici. È fuori dubbio infatti, che la terapia sulfamidica abbia conseguito brillantissimi risultati, paragonabili a quelli che nei primi anni del nostro secolo sono stati raggiunti nel campo delle malattie protozoarie e da spirochete.

Nel 1935, MIETSCH e KLARER hanno ripreso gli studi sulle sulfamidi, seguendo un indirizzo che nel complesso ricorda i lavori di HERLICH e SHIGA [tripan-rot <sup>(3)</sup>], di NICOLLE e MESNIL [tripan-blau e afridol-violetto <sup>(4)</sup>], di TSCHITSCHIBABINE SEIDE e OSTROMISLENSKI [azoici piridinici <sup>(5)</sup>], ecc. <sup>(6)</sup>. Le loro ricerche d'altra parte, si riallacciano al noto concetto che i sostituenti solfonati esercitano azione favorevole sulle proprietà tintorie dei coloranti, e degli azoici in specie. Il primo termine di questa categoria di interessanti prodotti, la para-amino-fenil-sulfonamide-I



(I)

fu ottenuta nel 1908 da GELMO <sup>(7)</sup>; da questa, MIETSCH e KLARER hanno preparato i primi azoici sulfamidici, fra i quali la sulfamido-crisoidina

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale della R. Università di Bologna. Un riassunto di questo lavoro è comparso come «lettera» in «Ricerca Scientifica», X, 720 (luglio-agosto 1939).

<sup>(2)</sup> Nell'Adunanza del 16 febbraio 1940—XVIII.

<sup>(3)</sup> LEBEAU, COURTOSS, *Traité de Pharm. Chim.*, vol. II-II (Masson, Paris, 1938).

<sup>(4)</sup> «Ann. Inst. Pasteur.», to. 20, 417 (1916); LEBEAU, COURTOIS, loc. cit.

<sup>(5)</sup> «Journ. Amer. Chem. Soc.», 56, 1713 (1934); D. R. Pl., 515781, 543288.

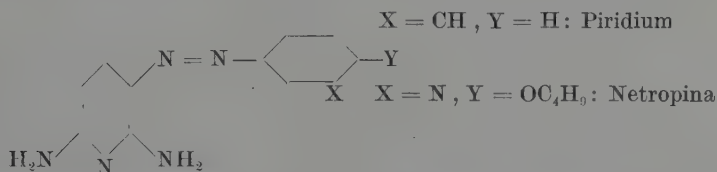
<sup>(6)</sup> JACOBS, HEIDELBERGER, «Journ. Amer. Chem. Soc.», 41, 2185 (1919).

<sup>(7)</sup> «J. pr. Chem.» (2), 77, 372.

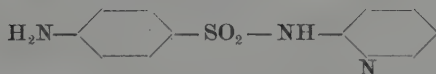
(Prontosil, Streptozon, Rubiazol) ha mostrato energiche proprietà anti-streptococciche [DOMAGK (8)].

D'altra parte, poichè secondo TREFOÜEL (9), negli azoici sulfamidici, l'agente attivo è la sulfamide-I (che si dovrebbe originare nell'organismo per riduzione dei corpi azoici), le più recenti ricerche sulle solfonamidi sono state orientate verso tentativi di modificarne la costituzione, per abbassare la tossicità ed elevare selettivamente l'azione chemioterapica verso determinate specie batteriche.

Nella impostazione del mio lavoro, sono partito dal concetto che, essendo nota ed accertata la forte azione battericida di alcuni azoici piridinici come il Piridium, la Neotropina, ecc.



era tuttavia da tentare se - a differenza dei prodotti di MIETSCH e KLARER - quelli ottenibili mediante l'associazione del radicale piridinico al radicale sulfamidico attraverso l'azogruppo, avessero proprietà chemioterapiche migliori della stessa sulfamide-I. Il mio modo di vedere, mi è sembrato confortato anche dal fatto che il nucleo piridinico contenuto nei composti del tipo



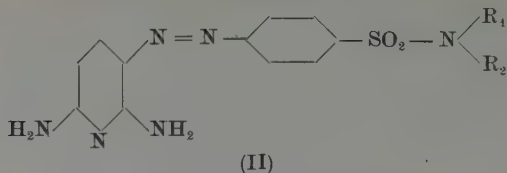
ha dimostrato di esercitare un effetto favorevole sull'attività chemioterapica delle sulfamidi.

Il gruppo di ricerche di cui inizio la pubblicazione, si divide pertanto in una parte chimica, dedicata alla preparazione e alle indagini sulla costituzione dei numerosi nuovi preparati da me ottenuti, e in una parte che potremo dire chemioterapica nella quale verranno descritte alcune prove di confronto fra azoici-piridin-solfonamidici e i prodotti corrispondenti, che non contengono nè l'azo-gruppo nè quello piridinico.

Ai numerosi azoici piridin-solfonamidici da me preparati, nei quali il copulante è la 2-6 diamino-piridina, è da attribuire la seguente formula di costituzione (II)

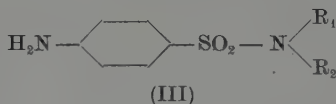
(8) « Deutsche med. Woch. », 61, 250 (1935); « Zeit. Ang. Chem. », 48, 657 (1935) ?

(9) « Bull. Inst. Pasteur. », 36, 385 (1938).

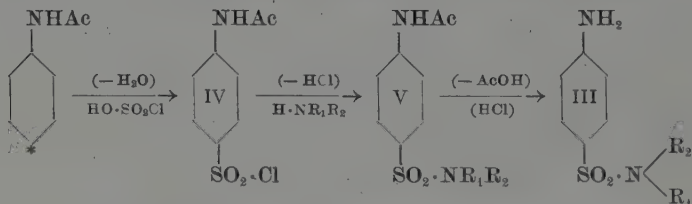


dove  $R_1$  e  $R_2$  rappresentano atomi di idrogeno, oppure alchili e arili sostituiti e non-sostituiti.

Ho preparato detti composti per copulazione in soluzione acida della 2-6-diamino-piridina con i cloruri di diazonio provenienti dalla diazotazione delle *p*-amino-fenil-solfonamidi-III



Queste solfonamidi (III), molte delle quali non ancora descritte, sono state a loro volta preparate utilizzando le reazioni seguenti:



In questa prima Nota descrivo gli azoici ottenuti per copulazione della 2-6-diamino-piridina con i diazocomposti delle solfonamidi alifatiche

form. III:  $R_1 = H$   $R_2 = H, CH_3, C_2H_5, C_3H_7$ ;  $R_1 = R_2 = CH_3, C_2H_5$ .

#### PARTE SPERIMENTALE

##### *p*-Acetil-amino-fenil-solfocloruro (form. IV).

Ho particolarmente curato la preparazione di questo composto, che rappresentava il prodotto di partenza per tutte le successive operazioni. Esso si può preparare, come è noto, anche acetilando il solfanilato di sodio e facendo reagire l'acetil-solfanilato con pentacloruro di fosforo <sup>(10)</sup>. Dopo alcune prove di orientamento ho preferito però eseguire la solfo-

<sup>(10)</sup> SCHROETER, « Ber. », 39, 1563.

clorurazione diretta dell'acetanilide<sup>(11)</sup>: seguendo questa via, e a condizione di osservare particolari accorgimenti che descrivo nei dettagli della operazione, si ottiene un prodotto direttamente utilizzabile per le ulteriori operazioni, con rendimento quasi teorico e costante.

La cloridrina solforica, ben raffreddata, viene aggiunta di acetanilide polverizzata (4-5 parti di cloridrina per 1 p. di acetanilide). Dopo di che si tiene il miscuglio per qualche ora a b. m.: quindi la massa di reazione viene versata su ghiaccio pesto. Il precipitato granuloso bianco viene subito filtrato alla pompa, e lavato con acqua fredda: il prodotto greggio, cristallizzato dal benzolo in tavole prismatiche, incolori, fonde a 149-150 in accordo coi dati della letteratura<sup>(12)</sup>.

*p*-Acetil-amino-fenil-solfonamidi (form. V).

A differenza di quanto è stato reso noto da altri AA. ho constatato che si ottengono anche buoni rendimenti facendo agire le amine in soluzione acquosa con l'acetil-solfocloruro-IV, sospeso in acqua a temperatura ambiente. Ho generalmente usato 2 molec. di base per 1 di solfocloruro (I metodo), o 1 mol. di amina per 1 di solfocloruro, operando in questo caso in presenza di carbonato di potassio (II metodo).

TABELLA I.

| Form. V<br>$N \begin{cases} R_1 \\ R_2 \end{cases}$ | Metodo<br>prepara-<br>zione | Solvente<br>cristallizzazione | Forma<br>cristallina    | p. f.   | Formula                                                         | N. %  |       |
|-----------------------------------------------------|-----------------------------|-------------------------------|-------------------------|---------|-----------------------------------------------------------------|-------|-------|
|                                                     |                             |                               |                         |         |                                                                 | calc. | trov. |
| NH <sub>2</sub>                                     | I                           | acqua                         | aghi                    | 219-220 | C <sub>8</sub> H <sub>10</sub> O <sub>3</sub> N <sub>2</sub> S  | —     | —     |
| NHCH <sub>3</sub>                                   | I                           | alcoool                       | tavole                  | 152-153 | C <sub>9</sub> H <sub>12</sub> O <sub>3</sub> N <sub>2</sub> S  | 12,27 | 12,45 |
| N(CH <sub>3</sub> ) <sub>2</sub> (13)               | I                           | ac. acetico 30 %              | tav. es.<br>prismatiche | 142-143 | C <sub>10</sub> H <sub>14</sub> O <sub>3</sub> N <sub>2</sub> S | 11,57 | 11,50 |
| NHC <sub>2</sub> H <sub>5</sub>                     | I                           | alc. ass.                     | lam. es.                | 145-146 | C <sub>10</sub> H <sub>14</sub> O <sub>3</sub> N <sub>2</sub> S | 11,57 | 11,80 |
| N(C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> ) <sub>2</sub>      | I                           | benzolo                       | parallelep.             | 77-78   | C <sub>12</sub> H <sub>18</sub> O <sub>3</sub> N <sub>2</sub> S | 10,36 | 10,52 |
| NHC <sub>3</sub> H <sub>7</sub>                     | II                          | ac. acetico 40 %              | tavole                  | 130-131 | C <sub>11</sub> H <sub>16</sub> O <sub>3</sub> N <sub>2</sub> S | 10,93 | 11,20 |

L'operazione veniva eseguita spappolando il solfocloruro nel suo peso di acqua, e aggiungendo sotto continua agitazione, la soluzione acquosa dell'amina (circa al 20 %). Quando si seguiva il II metodo, dopo

(11) *Org. Synth. Coll.*, vol. I, 8 (New York, 1932).

(12) SCHROETER, loc. cit.

l'aggiunta della base, il miscuglio di reazione era trattato con la quantità teorica di carbonato di potassio, in soluzione acquosa. Dopo circa 5-6 ore, il miscuglio - tenuto sempre in agitazione - veniva filtrato e, nella maggior parte dei casi, usato tal quale per la saponificazione a solfonamide.

I rendimenti, sono stati sempre buoni; i composti purificati per cristallizzazione da opportuno solvente, sono incolori. I risultati sono riassunti nella tabella I.

*p*-Amino-fenil-solfonamidi (form. III).

Sono state preparate dai corrispondenti derivati acetilici ora descritti, per ebollizione con soluzione di acido cloridrico (1 : 1), usandone generalmente 3 parti e mezzo (in peso, per 1 di acetil-derivato: la saponificazione richiede in genere circa un'ora. La soluzione cloridrica della base, bollita con nero animale e filtrata, veniva evaporata a circa  $\frac{1}{3}$  del proprio volume, e quindi neutralizzata con ammoniaca, o con carbonato di sodio o con potassa. Si ottiene in tal modo la base libera, con rendimenti praticamente teorici, che può usarsi tal quale per la diazotazione. Le solfonamidi si possono purificare per cristallizzazione e sono incolori.

TABELLA II.

| Form. III<br>N $\begin{matrix} \diagup R_1 \\ \diagdown R_2 \end{matrix}$ | Soluzione<br>cloridr.<br>neutra-<br>lizzata<br>con | Solvente<br>cristallizzazione | Forma<br>cristallina | p. f.   | Formula                                                         | N. %  |       |
|---------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|-------------------------------|----------------------|---------|-----------------------------------------------------------------|-------|-------|
|                                                                           |                                                    |                               |                      |         |                                                                 | calc. | trov. |
| N <sub>2</sub> H <sup>(7)</sup>                                           | NH <sub>3</sub>                                    | acqua                         | tavole               | 164-165 | C <sub>6</sub> H <sub>8</sub> O <sub>2</sub> N <sub>2</sub> S   | —     | —     |
| NHCH <sub>3</sub>                                                         | NH <sub>3</sub>                                    | (*)                           | aghi setacei         | 111-112 | C <sub>7</sub> H <sub>10</sub> O <sub>2</sub> N <sub>2</sub> S  | 15,04 | 15,00 |
| N(CH <sub>3</sub> ) <sub>2</sub> <sup>(13)</sup>                          | Na <sub>2</sub> CO <sub>3</sub>                    | alcool                        | prismi               | 171-172 | C <sub>8</sub> H <sub>12</sub> O <sub>2</sub> N <sub>2</sub> S  | 14 —  | 14,27 |
| NHC <sub>2</sub> H <sub>5</sub>                                           | KOH                                                | alcool assoluto               | aghi<br>prismatici   | 106-107 | C <sub>8</sub> H <sub>12</sub> O <sub>2</sub> N <sub>2</sub> S  | 14 —  | 13,88 |
| N(C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> ) <sub>2</sub> <sup>(14)</sup>            | NH <sub>3</sub>                                    | (**)                          | prismi<br>tabulari   | 105-106 | C <sub>10</sub> H <sub>16</sub> O <sub>2</sub> N <sub>2</sub> S | 12,27 | 12,18 |
| NHC <sub>3</sub> H <sub>7</sub>                                           | Na <sub>2</sub> CO <sub>3</sub>                    | alcool                        | tavole<br>aghiiformi | ÷ 85    | C <sub>9</sub> H <sub>14</sub> O <sub>2</sub> N <sub>2</sub> S  | 13,03 | 13,25 |

(\*) Alcool acquoso; oppure precipitazione con etere di petrolio della soluzione in alcool assoluto.

(\*\*) Precipitazione con etere di petrolio della soluzione in alcool assoluto.

<sup>(13)</sup> GANAPATHI, « Chem. Zentr. », 1939, I, 2960.

<sup>(14)</sup> F. P. 816988.



Di tutte queste solfonamidi sono stati preparati anche i derivati benzoilici, che servono bene per la caratterizzazione di esse. Oltre ad ottenersi con rendimenti quantitativi, sono facilmente purificabili: hanno punto di fusione netto e forma cristallina caratteristica. Per ragioni di spazio, formeranno oggetto di apposita Nota insieme a quelli delle altre solfonamidi che verranno descritte nei lavori seguenti.

TABELLA III.

| Form. II<br>N $\begin{cases} R_1 \\ R_2 \end{cases}$ | Solvente<br>cristallizza-<br>zione | Colore e forma<br>cristallina | p. f.   | Formula                                                         | N. %  |       |
|------------------------------------------------------|------------------------------------|-------------------------------|---------|-----------------------------------------------------------------|-------|-------|
|                                                      |                                    |                               |         |                                                                 | calc. | trov. |
| NH <sub>2</sub>                                      | alcool                             | aghi tabulari rosso-vermiglio | 260     | C <sub>11</sub> H <sub>12</sub> O <sub>2</sub> N <sub>6</sub> S | 28,76 | 28,65 |
| NHCH <sub>3</sub>                                    | alcool                             | tavole rosso-arancio          | 207     | C <sub>12</sub> H <sub>14</sub> O <sub>2</sub> N <sub>6</sub> S | 27,45 | 27,64 |
| N(CH <sub>3</sub> ) <sub>2</sub>                     | alcool                             | aghi gialli                   | 177-178 | C <sub>13</sub> H <sub>16</sub> O <sub>2</sub> N <sub>6</sub> S | 26,25 | 26,35 |
| NHC <sub>2</sub> H <sub>5</sub>                      | alcool 50 %                        | aghi prismat. rosso-chiaro    | 170-171 | C <sub>13</sub> H <sub>16</sub> O <sub>2</sub> N <sub>6</sub> S | 26,25 | 26,45 |
| N(C <sub>2</sub> H <sub>5</sub> ) <sub>2</sub>       | alcool 50 %                        | prismetti rosso-chiaro        | 219-220 | C <sub>15</sub> H <sub>20</sub> O <sub>2</sub> N <sub>6</sub> S | 24,13 | 24,10 |
| NHC <sub>3</sub> H <sub>7</sub>                      | alcool                             | aghi prismatici rosso-cupo    | 182-183 | C <sub>14</sub> H <sub>18</sub> O <sub>2</sub> N <sub>6</sub> S | 25,14 | 25,32 |

*2-6-Diamino-3-azo-(4'-solfonamidi-fenil-piridine (form. II).*

La diazotazione delle solfonamidi procede bene in presenza di eccesso di acido cloridrico (si evita così la formazione di composti diazoaminici): 1/10 di molec. di solfonamide viene sciolta in 400-500 cc. di acido cloridrico 10 %, riscaldando se occorre. La soluzione, diluita con 200 cc. di acqua, viene raffreddata a circa 0° e diazotata con la quantità calcolata di nitrito di sodio al 10 % (nel caso che per raffreddamento cristallizzi il cloridrato della solfonamide da diazotare, si può procedere ugualmente all'aggiunta del nitrito). La diazosoluzione viene versata sulla soluzione cloridrica della 2-6-diamino-piridina (1/10 mol. sciolta in 100 cc. di acido cloridrico al 5 %): la copulazione procede regolarmente, e l'azocolore precipita subito come cloridrato. Il prodotto greggio, separato per filtrazione, viene sospeso in acqua e neutralizzato con carbonato di sodio (rosso-congo):

si ottiene così la base azoica libera, colorata in rosso, o in arancio, o in giallo, a seconda dell'amina diazotata. L'azocolore (base) si purifica dall'alcool, come è indicato nella tabella III.

Come ho già detto le ricerche per stabilire l'azione chemioterapica e la tossicità di questi azoici piridin-solfonamidici, saranno descritte in una delle Note su questo argomento che ho in preparazione. Posso però fin d'ora rendere noto che i composti sopra descritti hanno mostrato tutti energica azione anticoccica.

---

**Chimica (Chimica inorganica).** — *Sullo spettro Raman di soluzioni concentrate dei perclorati di cationi bivalenti* <sup>(1)</sup>.  
Nota di REGINALDO MANZONI ANSIDEI, presentata <sup>(2)</sup> dall'Accademico GIAN BATTISTA BONINO.

Lo studio dello spettro RAMAN dell'acido perclorico e dei perclorati in soluzione ha occupato già vari AA. <sup>(3)</sup>. Notevole fra queste ricerche quella recente eseguita da SIMON sull'acido perclorico anidro e sulle sue soluzioni acquose <sup>(4)</sup>. Queste precedenti ricerche convergono nel dimostrare per l'ione perclorico una struttura tetraedrica con il cloro al centro e i 4 ossigeni ai vertici di un tetraedro regolare. Però le ricerche degli AA. sopra ricordati si estendevano quasi esclusivamente su soluzioni di perclorati di cationi monovalenti. Le particolarità osservate in lavori <sup>(5)</sup> eseguiti in questo Istituto e che riguardano gli spettri RAMAN di altri anioni (nitrati, clorati), se accoppiati a cationi bi- e trivalenti, mi hanno dimostrato l'interesse di eseguire una ricerca sistematica su soluzioni di perclorati di cationi bivalenti.

#### PARTE SPERIMENTALE.

Ho perciò studiato gli spettri RAMAN delle soluzioni concentrate dei seguenti perclorati:  $\text{Sr}(\text{ClO}_4)_2$ ,  $\text{Ca}(\text{ClO}_4)_2$ ,  $\text{Ba}(\text{ClO}_4)_2$ ,  $\text{Cd}(\text{ClO}_4)_2$ ,  $\text{Zn}(\text{ClO}_4)_2$ , <sup>(6)</sup>,  $\text{Mg}(\text{ClO}_4)_2$ ,  $\text{Hg}(\text{ClO}_4)_2$ ,  $\text{Be}(\text{ClO}_4)_2$ .

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Fisica ed Elettrochimica della R. Università di Bologna, gennaio 1940–XVIII.

<sup>(2)</sup> Nell'Adunanza del 16 febbraio 1940–XVIII.

<sup>(3)</sup> ANGUS, LECKIE, « Proc. Roy. Soc. (London) », 149 A, 327 (1935); « Proc. Roy. Soc. (London) », 150 A, 615 (1935); FONTEYNE, « Nature. », 138, 886 (1936); « Naturw. Tijdsch. », 20, 112; 275 (1938); 21, 6 (1939); NISI, « Japan J. Phys. », 5, 119 (1929); OLLANO, « N. Cimento », 9, 51 (1932); « Z. Phys. », 77, 818 (1932); KRISHNAMURTI, « Ind. J. Phys. », 5, 633 (1930); SIMON, REUTHER, « Naturw. », 25, 477 (1937); GOUBEAU, « Z. phys. Chem. » B, 36, 45, (1937) (ecc.).

<sup>(4)</sup> SIMON, « Z. Anorg. Chem. » 239, 329 (1938).

<sup>(5)</sup> ROLLA, « Gazz. Chim. It. », 69, 779 (1939); R. Acc. d'Italia in corso di stampa.

<sup>(6)</sup> Di questa sostanza era noto lo spettro per opera di DA SILVEIRA « J. Chem. Phys. », 7, 380 (1939).

Questi perclorati sono stati preparati trattando secondo le proporzioni stechiometriche il carbonato o l'ossido del metallo bivalente purissimo con acido perclorico al 70 % e purificati per cristallizzazione con concentrazione a bassa temperatura e a bassa pressione. Gli spettri RAMAN sono stati eseguiti sulle soluzioni acquose saturate a circa 12° C. previamente sottoposte ad ultrafiltrazione per togliere qualsiasi traccia di eterogeneità ottica. Per l'ottenimento di spettri quasi totalmente privi di fondo (vedi fig. 1) ho applicato il metodo dei filtri complementari di ANANTHAKRISHNAN <sup>(7)</sup>

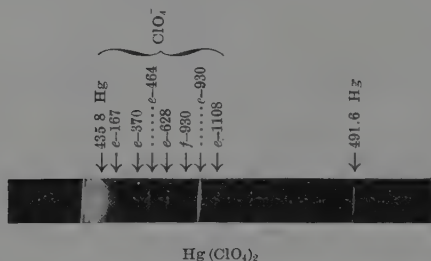


Fig. 1.

usando il filtro C (435,8) monocromatico di ZEISS vicino alla lampada ad Hg ed una soluzione diluitissima di cromato di potassio fra il tubo contenente la soluzione di perclorato e la fessura dello spettrografo. Le lastre fotografiche usate sono le spektralblau Agfa.

Riporto nella seguente tabella i risultati ottenuti (usando la nomenclatura delle frequenze data da SIMON <sup>(8)</sup>).

<sup>(7)</sup> ANANTHAKRISHNAN, « Proc. Ind. Acc. », 5, 76 (1937); MANZONI ANSIDEI, « Ric. Scient. », X, 328, (1939); ROLLA, « Gazz. Chim. It. », 69, 781 (1939).

<sup>(8)</sup> Ved. nota <sup>(4)</sup>.

*Frequenza Raman dell'Ione perclorico di sali di metalli bivalenti  
in soluzione acquosa satura a circa 12° C.*

| Catione bivalente          | <i>a</i>  | <i>b</i>  | <i>c</i>  | $\Delta\nu_{23}$ | $\Delta\nu_{4,5,6}$ | $\Delta\nu_1$ | $\Delta\nu_{7,8,9}$ |
|----------------------------|-----------|-----------|-----------|------------------|---------------------|---------------|---------------------|
| Sr <sup>++</sup> . . . . . | —         | —         | —         | 461 (2)          | 629 (3)             | 936 (5)       | 1103 (1 bd)         |
| Ca <sup>++</sup> . . . . . | 95 (1 bd) | —         | —         | 464 (2)          | 629 (3)             | 933 (5)       | 1109 (1 bd)         |
| Ba <sup>++</sup> . . . . . | 90 (1 bd) | —         | —         | 464 (2)          | 631 (3)             | 933 (5)       | 1104 (1 bd)         |
| Cd <sup>++</sup> . . . . . | 90 (1 bd) | —         | 356 (0)   | 462 (2)          | 631 (3)             | 933 (5)       | 1104 (1 bd)         |
| Zn <sup>++</sup> . . . . . | 95 (1 bd) | 168 (1/2) | 370 (0)   | 460 (2)          | 629 (3)             | 932 (5)       | 1112 (1 bd)         |
| Mg <sup>++</sup> . . . . . | 90 (1 bd) | —         | 357 (0)   | 457 (2)          | 630 (3)             | 930 (5)       | 1116 (1 bd)         |
| Hg <sup>++</sup> . . . . . | —         | 167 (1/2) | 370 (1/2) | 464 (2)          | 629 (3)             | 930 (5)       | 1108 (1 bd)         |
| Be <sup>++</sup> . . . . . | 95 (1 bd) | 163 (1/2) | 369 (0)   | 463 (2)          | 629 (3)             | 927 (5)       | 1105 (1 bd)         |

DISCUSSIONE DEI RISULTATI.

Onde poter più chiaramente discutere i risultati delle mie esperienze richiamo brevemente il calcolo teorico delle oscillazioni in una molecola  $AB_4$  a simmetria tetraedrica  $T_d$ .

| $T_d$            | $E$ | $3C_2$ | $6S_4$ | $6\sigma_d$ | $8C_3$ |
|------------------|-----|--------|--------|-------------|--------|
| $A_1$ . . . . .  | 1   | 1      | 1      | 1           | 1      |
| $A_2$ . . . . .  | 1   | 1      | —1     | —1          | 1      |
| $E$ . . . . .    | 2   | 2      | 0      | 0           | —1     |
| $T_1$ . . . . .  | 3   | —1     | 1      | —1          | 0      |
| $T_2$ . . . . .  | 3   | —1     | —1     | 1           | 0      |
| $\Xi_i(E)$ . . . | 9   | 1      | —1     | 3           | 0      |

Gli elementi di simmetria  $i$  le rappresentazioni irriducibili ( $p$ ) ed i caratteri rispettivi ( $\chi_i^{(p)}$ ) del gruppo  $T_d$  sono dati nella tabella; nell'ultima riga della tabella sono riportate poi le quantità relative ( $\Xi_i$ ) per una molecola  $AB_4$  ( $\text{ClO}_4^-$ ) per la cui espressione rimando ad un precedente la-

voro teorico di BONINO <sup>(9)</sup>. Il numero di oscillazioni molecolari è dato così dalla relazione <sup>(10)</sup>.

$$\alpha_p = \frac{1}{h} \sum_{j,l} \Xi_j(R) \chi_l^{(p)}(R).$$

Dai precedenti calcoli si ottiene per l'ione  $\text{ClO}_4^-$ :

| Tipo delle oscillazioni                                                  | $A_1$          | $A_2$ | $E$                | $T_1$ | $T_2$                                     | Nr. Totale  |
|--------------------------------------------------------------------------|----------------|-------|--------------------|-------|-------------------------------------------|-------------|
| Numero di oscillazioni normali . . .                                     | 1              | 0     | 1 (× 2)            | 0     | 2 (× 3)                                   | 9 (4 righe) |
| Attività in U. R. . .                                                    | i              | —     | i                  | —     | a                                         | 6 (2 righe) |
| Attività e caratteristiche di polarizzazione in E. R. . .                | pol.           | —     | dep.               | —     | dep.                                      | 9 (4 righe) |
| Indicazioni delle oscillazioni nel lavoro di SIMON <sup>(11)</sup> . . . | $\Delta \nu_1$ | —     | $\Delta \nu_{2,3}$ | —     | $\Delta \nu_{4,5,6}$ $\Delta \nu_{7,8,9}$ |             |
| e di H. C. UREY, C. A. BRADLEY <sup>(12)</sup> . .                       | $\nu_1$        | —     | $\nu_2$            | —     | $\nu_4$ $\nu_3$                           |             |

i = inattiva; a = attiva; pol. = polarizzata; dep. = depolarizzata.

Ciò la simmetria tetraedrica imporrebbe all'ione  $\text{ClO}_4^-$  9 oscillazioni attive delle quali 2 sono triplamente degeneri ( $T_2$ ) e una doppiamente degenera ( $E$ ) perciò si avrebbero nello spettro RAMAN 4 righe: una polarizzata (oscillazione total simmetrica  $A_1$ ) e tre depolarizzate.

Invero le ricerche spettroscopiche su soluzioni di perclorati di cationi monovalenti rilevano nettamente nello spettro RAMAN una riga intensa e polarizzata e tre righe depolarizzate come risulta dalla tabella seguente:

|                                                                                                                              | $\nu_2 (E)$ | $\nu_3 (T_2)$ | $\nu_1 (A_1)$ | $\nu_3 (T_2)$ |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|---------------|---------------|---------------|
| Valori medi delle frequenze RAMAN ricavati dagli spettri di soluzione concentrate di perclorati di cationi monovalenti . . . | 462,7       | 636,5         | 933,0         | 1111,2        |

<sup>(9)</sup> BONINO, « R. Acc. Lincei », 25, 288 (1936).

<sup>(10)</sup> Ved. nota <sup>(7)</sup>, pag. 291.

<sup>(11)</sup> Ved. nota <sup>(4)</sup>.

<sup>(12)</sup> H. C. UREY, C. A. BRADLEY, « Phys. Rev. », 38, 1977 (1931).

Le misure da me eseguite per soluzioni di perclorati di cationi bivalenti mostrano in media le 4 righe « tetraedriche » soprariferite ma in più presentano anche altre tre righe che devono essere brevemente discusse.

|                                                                                                                                | <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> | $\nu_2 (E)$ | $\nu_4 (T_2)$ | $\nu_1 (A_1)$ | $\nu_3 (T_2)$ |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|----------|----------|-------------|---------------|---------------|---------------|
| Valori medi delle frequenze RAMAN ricavati dagli spettri di soluzione concentrate di perclorati di cationi bivalenti . . . . . | 92,1     | 163,0    | 364,4    | 463,0       | 629,5         | 931,7         | 1107,0        |

I valori delle frequenze delle oscillazioni « tetraedriche » concordano perfettamente con quelle ottenute dagli altri AA. per l'acido perclorico in soluzione acquosa non concentrata e per le soluzioni dei perclorati monovalenti, e così si confermerebbero per l'ione  $\text{ClO}_4^-$  nei perclorati bivalenti le stesse conclusioni sulla sua simmetria tipo  $T_d$  (tetraedrica).

Però oltre a queste righe nei perclorati bivalenti trovo alcune righe a bassa frequenza a circa 100 e 150  $\text{cm}^{-1}$  che si potrebbero forse riferire ad oscillazioni molecolari nel pseudoreticolo liquido supponibile nelle soluzioni concentrate <sup>(13)</sup>.

Devo ricordare anche come altre ipotesi si possono fare per l'origine della riga a 150  $\text{cm}^{-1}$ : infatti MAGAT <sup>(14)</sup> trova una banda dell'acqua in questa zona, e così è pure da rilevare che in questa zona è probabile la presenza di una debole riga della lampada ad Hg <sup>(15)</sup>. Credo che sull'origine di queste due righe occorra ritornare con speciali ricerche sperimentali che abbiamo in corso.

La presenza di una assai debole riga a circa 360  $\text{cm}^{-1}$  nei perclorati di Zn, Mg, Cd, Hg e Be può avere invece un'altra origine. Una riga in posizione assai vicina a questa (322  $\text{cm}^{-1}$ ) è stata trovata da SIMON e REUTHER <sup>(16)</sup> nell'acido perclorico al 99,8 %. Ricordo pure che un riga in posizione analoga è stata registrata da DA SILVEIRA e BAUER nel clorato di Mg <sup>(17)</sup> in quello di Sr da ROLLA <sup>(18)</sup> e nel perclorato di Zn da DA SIL-

<sup>(13)</sup> ROLLA, ved. nota <sup>(5)</sup>.

<sup>(14)</sup> MAGAT, « Ann. Phys. », 6, 108 (1936).

<sup>(15)</sup> GOUBEAU, *Raman Spektralanalyse*. « Akademische Ver. M. B. H. ». Leipzig, 1939, pag. 276.

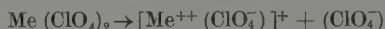
<sup>(16)</sup> SIMON, REUTHER, vedi nota <sup>(5)</sup>.

<sup>(17)</sup> DA SILVEIRA, « C. R. », 194, 1336 (1932); DA SILVEIRA e BAUER, « C.R. », 195, 416 (1932).

<sup>(18)</sup> ROLLA, vedi nota <sup>(5)</sup>.



VEIRA <sup>(19)</sup>. Sull'origine di questa riga si potrebbe fare la seguente ipotesi. Se invece ammettiamo una dissociazione parziale del sale



dovremmo supporre presente nella soluzione concentrata degli ioni  $[\text{Me}^{++}(\text{ClO}_4^-)]^+$  e cioè ioni  $\text{ClO}_4^-$  perturbati dalla stretta vicinanza di un ione Me a doppia carica positiva. Perciò è plausibile ammettere che tale perturbazione deformi la simmetria  $T_d$  (tetraedrica) a  $C_{3v}$  (piramidale) facendo così cessare la degenerescenza delle oscillazioni  $T_2$ .

MULLIKEN <sup>(20)</sup> dà le seguenti risoluzioni di rappresentazioni poliotomiche in altre a simmetria minore con il passaggio da  $T_d$  a  $C_{3v}$ .

| $T_d$            | $C_{3v}$      |
|------------------|---------------|
| $A_1$            | $A_1$         |
| Proibita $[A_2]$ | $[A_2]$       |
| $E$              | $E$           |
| Proibita $[T_1]$ | $[(A_2 + E)]$ |
| $T_2$            | $(A_1 + E)$   |

Se le perturbazioni che si riscontrano nel ione  $[\text{Me}(\text{ClO}_4)]^+$  proveniente dalla dissociazione parziale del perclorato del catione bivalente deformano l'ione  $\text{ClO}_4^-$  da una struttura tetraedrica regolare ad una struttura piramidale, la simmetria della oscillazione  $\nu_1$  conforme  $A_1$  resta inalterata e così resta la degenerescenza di  $\nu_2$  ( $E$ ). Invece le oscillazioni triplamente degeneri  $T_2$  verrebbero a modificare il grado di degenerescenza e a scindersi in una oscillazione semplice totalsimmetrica  $A_1$  ed in una doppiamente degeneri  $E$ . Di qui la possibilità di registrare per l'ione deformato  $[\text{Me}(\text{ClO}_4)]^+$  qualche riga che non appare nello spettro dell'ione  $\text{ClO}_4^-$  tetraedrico.

Occorrerebbe per una analisi approfondita del fenomeno avere spettri il più possibile completi per questi perclorati ipoteticamente dissociati parzialmente. Sono in corso in questo Istituto tentativi di ottenere gli spettri RAMAN di queste soluzioni con eccitazioni per mezzo di radiazioni a frequenza assai più elevata con la speranza di avere perciò un notevole aumento dell'intensità e potere così permettere il completamento della discussione.

Ringrazio il prof. G. B. BONINO per l'interesse mostrato a questa mia ricerca.

<sup>(19)</sup> DA SILVEIRA vedi nota <sup>(4)</sup>.

<sup>(20)</sup> MULLIKEN, « Phys. Rev. », 43, 294 (1933).

**Chimica.** — *Contributi sperimentali al problema della chelazione.* — IX. *Ricerche termochimiche su alcune aldeidi metossibenzoiche* <sup>(1)</sup>. Nota di REGINALDO MANZONI ANSIDEI e TOMMASO STORTO, presentata <sup>(2)</sup> dall'Accademico GIAN BATTISTA BONINO.

In precedenti ricerche <sup>(3)</sup> avevamo studiato il fenomeno della chelazione attraverso ad alcune particolarità termochimiche onde portare ulteriori contributi sperimentali all'interpretazione dell'esperienze spettroscopiche <sup>(4)</sup>. Mentre i risultati ottenuti con lo spettro RAMAN sarebbero stati favorevoli all'ipotesi di una notevole interazione, nei derivati ossichetonici ed ossi-aldeidici aromatici, tra i due gruppi OH e C = O (anche nel senso della formazione di un anello negli orto-ossiderivati) e mostravano assai probabile la formazione di associazioni intermolecolari nei para-derivati e forse anche nei meta, le ricerche termochimiche non mettevano in evidenza un andamento parallelo nelle energie di formazione. Basandoci sui dati sperimentali dei calori di combustione avevamo calcolato col metodo di PAULING <sup>(5)</sup> l'energia molecolare di formazione per un certo numero di aldeidi e chetoni aromatici. A meno di piccole differenze imputabili alla polisostituzione all'anello aromatico si doveva concludere che l'energia di formazione dei composti studiati non metteva

---

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Fisica ed Elettrochimica della R. Università di Bologna, febbraio 1940, XVIII.

<sup>(2)</sup> Nell'Adunanza del 16 febbraio 1940-XVIII.

<sup>(3)</sup> BONINO, MANZONI ANSIDEI e ROLLA, « Ric. Scient. », 8, II, nn. 5-6 (1937); MANZONI ANSIDEI e T. STORTO, « X Congr. Intern. Chim. Roma », II (1938).

<sup>(4)</sup> BONINO, MANZONI ANSIDEI, ROLLA, « Ric. Scient. », 8, II nn. 5-6 (1937); 9, II nn. 7-8 (1938); « R. Acc. Linc. », XXVIII, 269 (1938); « Boll. Scient. Fac. Chim. Ind. Bologna », 1, 23 (1940); KOHLRAUSCH, KAHOVEC, « Z. Phys. Chem. », B. 38, 119 (1937), ved. anche, p. es., R. e M. FREYMAN, « Phys. Radium » (7), 8, 1650 (836) ecc.

<sup>(5)</sup> PAULING, « J. Chem. Phys. » 1, 606 (1933).

in evidenza anche in questo caso termini riferibili ad un fenomeno di chelazione. Le energie di formazione di queste molecole si lasciavano infatti calcolare dalle energie di formazione dei gruppi costituenti la molecola in modo quasi completamente additivo.

I risultati termochimici riferiti allo stato di vapore non mostravano l'attesa differenza tra le aldeidi e i chetoni orto-ossisostituiti (per i quali il fenomeno di chelazione doveva riguardarsi come intramolecolare e tale perciò da permanere anche allo stato di vapore) e i meta e para ossisostituiti nei quali la chelazione era riferibile ad un fenomeno intermolecolare caratteristico perciò per lo stato liquido.

Frattanto una ricerca sull'effetto RAMAN delle aldeidi, orto, meta e para-metossibenzoiche eseguite da KOHLRAUSCH e KAHOVEC <sup>(1)</sup> mostrava una nettissima differenza fra gli spettri di queste aldeidi e le corrispondenti ossi-sostituite. E cioè, mentre per le ossi-sostituite si avevano delle forti variazioni nella posizione della riga carbonilica tra i tre isomeri, variazioni che avevano dato luogo all'ipotesi del fenomeno chelativo, questo fatto non avveniva per le metossibenzoaldeidi come dimostra la tabella seguente, nella quale si riportano le righe RAMAN caratteristiche del gruppo CO trovate nei vari composti studiati:

|                            |          |          |                   |
|----------------------------|----------|----------|-------------------|
| aldeide benzoica . . . . . |          |          | 1690 (9)          |
| » 2-ossibenzoica . . .     | 1642 (4) | 1661 (6) |                   |
| » 2-metossibenzoica. .     |          | 1661 (1) | 1684 (9)          |
| » 3-ossibenzoica . . .     |          |          | 1681 (5)          |
| » 3-metossibenzoica. .     |          |          | 1679 (4) 1697 (9) |
| » 4-ossibenzoica . . .     |          |          | 1672 (6)          |
| » 4-metossibenzoica. .     |          |          | 1684 (8)          |

In altre parole nei metossi-derivati la perturbazione del gruppo C=O indicato dalla riga RAMAN è assai minore che non negli ossi-derivati carbonilici; però ancora permane seppure con aspetto diverso. Questo differente comportamento spettroscopico ci ha indotti ad allargare le nostre ricerche termochimiche anche a queste tre aldeidi metossibenzoiche. Inoltre abbiamo studiato l'aldeide 3-ossi-4-metossibenzoica per confrontarla con i suoi isomeri, 2-ossi-4-metossibenzoaldeide e 4-ossi-3-metossibenzoaldeide già precedentemente studiati <sup>(2)</sup>.

<sup>(1)</sup> KOHLRAUSCH, KAHOVEC, « Z. Phys. Chem. », B 38, 119 (1937).

<sup>(2)</sup> MANZONI ANSIDEI e STORTO, « Congr. Intern. Chim. Roma », II (1938).

## PARTE SPERIMENTALE.

Le sostanze studiate sono le seguenti:

|                                               |                  |                           |   |
|-----------------------------------------------|------------------|---------------------------|---|
| 1) 3·ossi·4·metossiben-<br>zaldeide . . . . . | T. f. 116° -117° | t. f. 305°-306° a 760 mm. |   |
| 2) 2·metossibenzaldeide                       | » 37°,5          | » 239°-240°               | » |
| 3) 3·metossibenzaldeide                       |                  | » 230°                    | » |
| 4) 4·metossibenzaldeide                       |                  | » 247°                    | » |

Tutte queste sostanze furono purificate per distillazione frazionata nel vuoto. L'aldeide 3·metossibenzoica fu preparata secondo PSCHORR e JACKEL <sup>(1)</sup>.

TABELLA I.

*Misure sperimentali a 17° C.*

| Numero | Sostanze                              | Numero di misure | Calori di comb. per gr. in gcal. | Incertezza relativa ‰ | Calori di combust. a $P=\text{cost.}$ in Kcal per molgr. |
|--------|---------------------------------------|------------------|----------------------------------|-----------------------|----------------------------------------------------------|
| 1      | 3·ossi-4·metossibenzaldeide . . . . . | 4                | 6038,72 $\pm$ 4,97               | 0,82                  | 918,42                                                   |
| 2      | 2·metossibenzaldeide                  | 4                | 7075,13 $\pm$ 5,67               | 0,80                  | 963,12                                                   |
| 3      | 3·metossibenzaldeide                  | 4                | 7058,02 $\pm$ 6,81               | 0,96                  | 960,79                                                   |
| 4      | 4·metossibenzaldeide                  | 3                | 7073,50 $\pm$ 4,22               | 0,59                  | 962,92                                                   |

Questi valori sono stati riportati in Volts/elettrone a 25° e riferiti allo stato gassoso applicando il metodo di calcolo già descritto nella precedente Nota <sup>(2)</sup>. (v. e. = Volts. elettrone = 23,054 Kcal).

Come nella precedente Nota con r. f. abbiamo indicato il calore molecolare di fusione e con r. eb. il calore molecolare di evaporazione, ambedue questi valori sono stati da noi calcolati in via approssimativa come nel precedente lavoro.

<sup>(1)</sup> PSCHORR, JACKEL, « Ber. », 33, 1826 (1900).

<sup>(2)</sup> Ved. nota <sup>(2)</sup> della pag. 465.

TABELLA II.

| Sostanza                                   | Stato fisica<br>a $T$ ordinario | Cal. di combust.<br>a $P = \text{cost.}$ a<br>$T = 20^\circ\text{C.}$ in Kcal<br>per molgr. | r. f.<br>in<br>Kcal | r. eb<br>in<br>Kcal | Cal. mol. dicom-<br>bust. a $P = \text{cost.}$<br>a $25^\circ\text{C.}$ in v. e.<br>(stato gassoso) |
|--------------------------------------------|---------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|---------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 3-ossi 4-metossiben-<br>zaldeide . . . . . | (sol)                           | 918,4                                                                                       | 5,06                | 12,15               | 40,58                                                                                               |
| 2-metossibenzaldeide                       | (sol)                           | 963,1                                                                                       | 4,05                | 10,75               | 42,41                                                                                               |
| 3-metossibenzaldeide                       | (liq.)                          | 960,7                                                                                       | —                   | 10,56               | 42,12                                                                                               |
| 4-metossibenzaldeide                       | (liq.)                          | 962,9                                                                                       | —                   | 10,92               | 42,23                                                                                               |

## DISCUSSIONE DEI RISULTATI.

La conoscenza dei calori di combustione, ci ha permesso di valutare i calori di formazione sperimentali. Inoltre, applicando le costanti consigliate da PAULING <sup>(1)</sup>, abbiamo ottenuto il calore di formazione computato secondo la ordinaria formula di struttura attribuita a queste aldeidi; la differenza fra questi due calori di formazione (sperimentale e calcolato) ci dà la così detta energia di risonanza di PAULING. Da questa, togliendo il valore dell'energia di risonanza attribuita al nucleo benzenico, si risale all'energia di extrarisonanza.

TABELLA III.

| Sostanza                                   | $E$ speriment.<br>in v. e. | $E'$ calcul.<br>in v. e. | Energia<br>di risonanza<br>in v. e. | Energia di ex-<br>trarisonanza<br>in v. e. |
|--------------------------------------------|----------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------------|
| 3-ossi 4-metossiben-<br>zaldeide . . . . . | 90,63                      | 87,51                    | 3,12                                | 1,39                                       |
| 2-metossibenzaldeide                       | 85,64                      | 83,61                    | 2,03                                | 0,30                                       |
| 3-metossibenzaldeide                       | 85,93                      | 83,61                    | 2,32                                | 0,59                                       |
| 4-metossibenzaldeide                       | 85,82                      | 83,61                    | 2,21                                | 0,48                                       |

Con  $E$  abbiamo indicata l'energia di formazione sperimentale e con  $E'$  quella di formazione calcolata.

L'energia di extrarisonanza, secondo il metodo di questo calcolo dovrebbe presentare caratteristiche attribuibili al fenomeno di chelazione.

(<sup>1</sup>) Ved. nota (\*) della pag. 465.

Per meglio osservare questo eventuale comportamento abbiamo riportato i dati di energia di extrarisonanza trovati per le aldeidi ossibenzoiche e quelli delle aldeidi metossibenzoiche qui studiate in confronto con quelli rispettivamente calcolati per via addittiva sommando i valori di energia di extrarisonanza trovati per l'OH del fenolo (0,29 V. E.), per il C=O (0,15 v. e.) della benzaldeide e per OCH<sub>3</sub> (0,26 V. E.) dell'anisolo (<sup>1</sup>).

TABELLA IV.

*Energia di extrarisonanza in v. e.*

| Posizione      | Aldeidi ossibenzoiche |           |        | Aldeidi metossibenzoiche |           |        |
|----------------|-----------------------|-----------|--------|--------------------------|-----------|--------|
|                | Trovata               | Calcolata | Diff.  | Trovata                  | Calcolata | Diff.  |
| Orto . . . . . | 0,50                  | 0,44      | 0,06   | 0,30                     | 0,41      | — 0,11 |
| Meta . . . . . | 0,57                  | 0,44      | 0,13   | 0,59                     | 0,41      | 0,18   |
| Para . . . . . | 0,35                  | 0,44      | — 0,09 | 0,48                     | 0,41      | 0,07   |

Le differenze fra il trovato e il calcolato sono trascurabili, e sono, tanto per le ossibenzaldeidi che per le metossibenzaldeidi, dello stesso ordine di grandezza (circa 0,1 v. e.). Quindi non esiste nessuna differenza termochimica apprezzabile fra le due serie di aldeidi. Rimane però da far notare che, come nella serie delle aldeidi ossibenzoiche, anche per le aldeidi-metossi-benzoiche l'energia di extrarisonanza ha un valore massimo nel derivato meta.

Riportiamo anche per l'aldeide 3-ossi-4-metossibenzoica in confronto con gli isomeri già da noi studiati una tabella nella quale sono dati i risultati relativi all'energia di extrarisonanza ricavati col medesimo metodo di calcolo.

TABELLA V.

*Energia di extrarisonanza in v. e.*

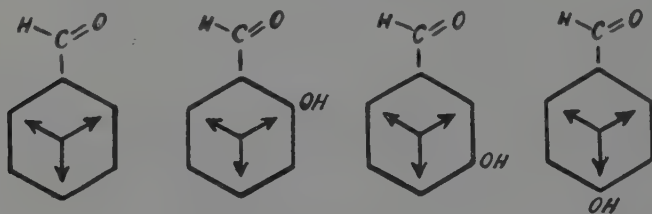
| Sostanza                     | Trovata | Calcolata | Differenza |
|------------------------------|---------|-----------|------------|
| 2-ossi. 3-metossibenzaldeide | 1,06    | 0,80      | 0,26       |
| 3-ossi. 4-metossibenzaldeide | 1,39    | 0,80      | 0,59       |
| 4-ossi. 3-metossibenzaldeide | 1,03    | 0,80      | 0,23       |

(<sup>1</sup>) Vedi nota (<sup>2</sup>) della pag. 465.

In questo caso si può notare una differenza piuttosto significativa (di circa 0,30 v. e.) nell'energia di extrarisonanza tra i due derivati che portano il gruppo ossidrilico in posizione orto e para rispetto a quello che è invece lo presenta in posizione meta. Questo andamento è in accordo con i risultati trovati da uno di noi nell'effetto RAMAN di queste tre aldeidi (<sup>1</sup>).

Il paragone tra il trovato ed il calcolato per via additiva non concorda come nel caso precedente delle ossi e metossi benzaldeidi semplici, anzi il trovato è notevolmente superiore; questo si deve attribuire probabilmente all'inesattezza di usare nel calcolo dell'energia di extrarisonanza un valore di energia di risonanza per il nucleo benzenico uguale a quello usato per lo stesso nucleo però mono e bisostituito.

Concludendo i risultati della tabella IV ci mostrano una energia di extrarisonanza apprezzabile nel caso delle aldeidi ossi e metossi sostituite in meta mentre per quelle sostituite in orto e in para tale energia è trascurabile e tende ad invertire il segno. Scrivendo le formule di queste aldeidi con i simboli proposti da BONINO (<sup>2</sup>) si ottiene



Cioè l'OH (e così pure l'OCH<sub>3</sub>) sostituito in meta si troverebbe in una posizione di minore densità elettronica  $p_z$  dell'anello benzenico e questo potrebbe far supporre che ciò favorisca invero una maggiore interazione tra questa posizione e il sostituito fortemente elettronegativo.

Anche nel caso di derivati bisostituiti il fenomeno si ripete nettamente (v. tabella V). Ad ogni modo il così detto effetto di chelazione, messo in evidenza dagli spettri RAMAN, non appare dalla valutazione complessiva dell'energia molecolare. Questo potrebbe indicarci, come già ha sostenuto BONINO (<sup>3</sup>), che la perturbazione chelativa intramolecolare sia da riferirsi ad un processo « adiabatico ». Continuano le ricerche su questo argomento.

Ringraziamo l'Ecc.za prof. G. B. BONINO che ci ha permesso di eseguire queste ricerche fornendoci i mezzi necessari.

(<sup>1</sup>) MANZONI ANSIDEI, « Boll. Chim. Scient. Fac. Chim. Ind. », Bologna, I, n. 3 (1940).

(<sup>2</sup>) BONINO, « Gazz. Chim. It. », 66, 827 (1936); 69, 417 (1939).

(<sup>3</sup>) BONINO, « Ber. », 71 A, 129 (1938).



**Chimica.** — *Sul potenziale di riduzione di alcuni chetoni pirrolici.* — III. *Dipirrilchetoni* <sup>(1)</sup>. Nota di GIUSEPPE SCARAMELLI, presentata <sup>(2)</sup> dall'Accademico GIAN BATTISTA BONINO.

In precedenti lavori <sup>(3)</sup> è stato studiato il potenziale polarografico di riduzione di chetoni pirrolici semplici quali il 2-acetilpirrolo, il 2-3-5-trimetil-4-acetilpirrolo, il 2-4-dimetil-5-carboetossi-3-acetilpirrolo, e l'1-acetilpirrolo giungendo tra l'altro a stabilire che il gruppo chetonico  $C=O$  in posizione  $\alpha$  al nucleo pirrolico è riducibile, se pure ad un potenziale notevolmente superiore a quello caratteristico per il  $C=O$  dell'acetofenone, mentre i gruppi  $C=O$  sostituiti in  $\beta$  o all'azoto nel nucleo pirrolico non si riducono polarograficamente nelle stesse condizioni di esperienza fino al potenziale di deposizione dello jone  $NH_4^+$ .

Nel presente lavoro vengono studiati sotto lo stesso punto di vista alcuni  $\alpha-\alpha'$ -dipirrilchetoni.

Si sa che il gruppo chetonico in questi dipirrilchetoni <sup>(4)</sup> (il cui capostipite è stato preparato per la prima volta da CIAMICIAN e MAGNAGHI <sup>(5)</sup> nel 1885) non mostra alcune delle proprietà chimiche caratteristiche più importanti di questo gruppo funzionale (per esempio non dà l'ossima corrispondente). A tale comportamento chimico fanno riscontro anche i risultati ottenuti dalle ricerche termochimiche di STERN e KLEBS <sup>(6)</sup> e da quelle sugli spettri *Raman* di BONINO, MANZONI-ANSIDEI e PRATESI <sup>(7)</sup>, risultati che pure rendono conto della profonda perturbazione cui è soggetto il così detto  $C=O$  « meso » legato in  $\alpha-\alpha'$  fra due nuclei pirrolici. Per questo poteva esservi interesse a vedere quale comportamento avesse al catodo a goccia di mercurio il gruppo  $C=O$  in queste particolari condizioni.

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Bologna.

<sup>(2)</sup> Nell'Adunanza del 16 febbraio 1940-XVIII.

<sup>(3)</sup> G. SCARAMELLI, « Boll. Sci. Fac. Chim. Ind. », Bologna, I, nn. 1-2 (1940).

<sup>(4)</sup> H. FISCHER e H. ORTH, A. 489, 73 (1931) e A. 502, 245 (1933).

<sup>(5)</sup> G. CIAMICIAN e P. MAGNAGHI, B. 18, 1831 (1885).

<sup>(6)</sup> A. STERN e G. KLEBS, A. 500, 98 (1932).

<sup>(7)</sup> G. B. BONINO, R. MANZONI ANSIDEI e P. PRATESI, « Ph. Ch. », 25 (B), 348 (1934).

D'altra parte la Bibliografia <sup>(8)</sup> ci diceva che se nell'acetofenone si sostituisce il gruppo  $\text{CH}_3$  con un gruppo  $\text{C}_6\text{H}_5$ , giungendo al benzofenone si ha un forte abbassamento del potenziale polarografico di riduzione e si poteva perciò supporre che anche nel passaggio da  $\alpha$ -acetilpirrolo ad  $\alpha$ - $\alpha'$ -dipirrilchetone succedesse qualcosa di analogo.

A tale scopo sono stati determinati i potenziali di riduzione dei composti seguenti: 3-3'-dimetil-5-5'-dietil-dipirrilchetone, 5-5'-dimetil-3-3'-dietil-dipirrilchetone, 3-3'-5-5'-tetrametil-4-4'-dipropil-dipirrilchetone.

Tutti e tre i prodotti esaminati provengono dall'Istituto di Chimica organica del Politecnico di Monaco e anzi qui si profitta dell'occasione per ringraziare il prof. GEH. H. FISCHER che gentilmente li ha concessi.

Le esperienze vennero eseguite col dispositivo polarografico di costruzione NEJEDLY di Praga già usato per il precedente citato lavoro sui chetoni pirrolici.

Le condizioni di esperienza, uguali per tutti i composti, furono le seguenti: Elettrolita base costituito da una soluzione N/10 di  $\text{NH}_4\text{Cl}$  in alcool al 50 % in peso; eliminazione dell'ossigeno ottenuta per gorgogliamento di idrogeno; sensibilità del galvanometro 1/100 dalla massima; tempo di gocciolamento 4''; temperatura 16°.

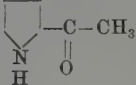
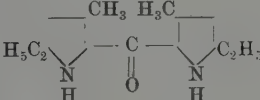
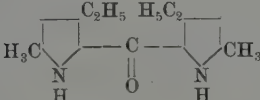
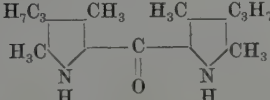
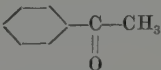
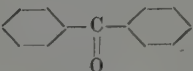
I potenziali polarografici di riduzione si riferiscono tutti alla concentrazione  $1,5 \cdot 10^{-3}$  molare e sono stati determinati secondo il metodo già descritto <sup>(9)</sup>. Essi rappresentano il risultato della media di cinque determinazioni per ciascun composto.

Nella tabella seguente è riportato oltre ai dati sperimentali avutisi con i dipirrilchetoni qui esaminati anche quello fornito dal 2-acetilpirrolo, già riferito in un precedente lavoro <sup>(3)</sup>. In fine sono riportati anche i potenziali di riduzione mostrati, sempre per concentrazioni  $1,5 \cdot 10^{-3}$  molari e nelle stesse condizioni di esperienza, dall'acetofenone e dal benzofenone.

<sup>(8)</sup> M. SHIKATA e COLL., « Mem. Coll. Agr. Kyoto Imp. Univ. » (1930) e anche A. WINKEL e G. PROSKE, B. 69, 693 e 69, 1917 (1936).

<sup>(9)</sup> G. SEMERANO, « Gazz. Chim. It. », 62, 518 (1932).

TABELLA.

| Composto                                                                                                                                     | Purificazione<br>e punto<br>di fusione<br>o di ebullizione          | Potenziale<br>di riduzione<br>alla conc.<br>1,5 10 <sup>-3</sup> mol. | Differenza<br>dal pot.<br>di rid.<br>del 2-acetil-<br>pirrolo    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|
| 2 acetilpirrolo<br>                                         | Cristallizzato<br>dall'acqua e al-<br>cool P. F. 90°                | — 1,646 volt.                                                         | —                                                                |
| 3-3'-dimetil-5-5'-dietil-dipirril-<br>chetone<br>           | Cristallizzato<br>dalla ligroina<br>P. F. 150°                      | — 1,618 volt.                                                         | + 0,028 volt.                                                    |
| 5-5'-dimetil-3-3'-dietil-dipirril-<br>chetone<br>           | Cristallizzato<br>dall'alcool<br>P. F. 186°                         | — 1,640 volt.                                                         | + 0,006 volt.                                                    |
| 3-3'-5-5'-tetrametil-4-4'-dipropil-<br>dipirrilchetone<br> | Cristallizzato<br>dall'alcool<br>P. F. 177°                         | — 1,680 volt.                                                         | — 0,034 volt.                                                    |
| Acetofenone<br>                                           | Distillato<br>ripetutamente<br>nel vuoto<br>P. E. 202°<br>a 760 mm. | — 1,414 volt.                                                         | —                                                                |
| Benzofenone<br>                                           | Distillato<br>ripetutamente<br>nel vuoto<br>P. E. 306°<br>a 760 mm. | — 1,173 volt.                                                         | Diff. dal pot.<br>di rid. dell'a-<br>cetofenone<br>+ 0,241 volt. |

L'osservazione dei dati riportati nella tabella ci mostra che al catodo a goccia di mercurio il  $C=O$  «meso» si comporta in un modo molto simile a quello di un  $\alpha$ -acetilpirrolo, dato che il potenziale di riduzione dei dipirrilchetoni esaminati non mostra di subire grandi variazioni rispetto a quello dell' $\alpha$ -acetilpirrolo. Se ne può perciò dedurre che l'influenza che può avere l'introduzione di un secondo nucleo pirrolico sulla riducibilità del gruppo  $C=O$  dell' $\alpha$ -acetilpirrolo è incomparabilmente minore di quella che ha sul gruppo  $C=O$  dell'acetofenone l'introduzione di un secondo nucleo benzenico e che l'esperienza polarografica, contrariamente a quanto rilevano l'esperienza chimica ordinaria e le esperienze termochimiche e spettroscopiche sopra citate, non trova forti ed analoghe differenze tra il gruppo  $C=O$  di un  $\alpha$ -acetilpirrolo ed il gruppo  $C=O$  «meso» degli  $\alpha$ - $\alpha'$ -dipirrilchetoni.

Poichè i dati di fatto chimici, termochimici e spettroscopici mostrano concordemente che il  $C=O$  «meso» nella molecola dei dipirrilchetoni è in uno stato del tutto particolare e poco attivo, ci si potrebbe chiedere se l'esperienza di riduzione polarografica impegni le molecole organiche quali esse vengono in giuoco nelle ordinarie reazioni chimiche, e nelle esperienze termochimiche o spettroscopiche, ovvero se tale riduzione debba essere riferita a forme molecolari particolarmente perturbate e deformate all'interfaccia del catodo a goccia di mercurio<sup>(10)</sup>. Questa considerazione può consigliare alla massima prudenza nel trarre dalle esperienze polarografiche conclusioni strutturalistiche valevoli per le molecole organiche quali esse sono nelle condizioni ordinarie.

Altre esperienze sono in corso su questo argomento e saranno riferite in un prossimo lavoro.

L'A. ringrazia l'Accademico prof. G. B. BONINO per l'interesse mostrato a questa ricerca.

---

<sup>(10)</sup> Ved., ad esempio, J. HEYROVSKY, «Actualités Scient. Ind.», n. 90 - Hermann et C. Paris (1934).

**Mineralogia.** — *Diffusione della tormalina nei giacimenti auriferi del Beni Sciangul e dell'Uollega e suoi rapporti con i processi di mineralizzazione.* Nota di ARDITO DESIO, presentata <sup>(1)</sup> dall'Accademico GIOTTO DAINELLI.

Durante la seconda missione effettuata nell'Etiopia Occidentale per conto della S. A. P. I. E. nell'inverno 1938-1939, ho avuto occasione di occuparmi fra l'altro del problema della mineralizzazione aurifera nell'Uollega e nel Beni Sciangul. Ho visitato i principali giacimenti auriferi primari di quei territori, soffermandomi particolarmente su quello di Ondonoc (Asosa) che, grazie ai lavori minerari eseguiti dalla S. M. I. T., si presentava in condizioni più favorevoli per uno studio.

In attesa di completare le ricerche sui materiali mineralogici e litologici raccolti, credo utile dare notizia fin d'ora di qualcuno dei risultati ottenuti.

In tutti i giacimenti auriferi primari dell'Uollega e del Beni Sciangul, l'oro è associato alle piriti e alle calcopiriti incluse nei filoni di quarzo e solo eccezionalmente diffuse nelle rocce incassanti. Spesse volte nelle parti dei filoni più prossime alla superficie, i solfuri di ferro sono scomparsi per effetto dell'alterazione e del dilavamento, lasciando una patina di limonite a tapezzare le cavità occupate originariamente dai cristalli. In queste cavità si notano talora granuli di oro libero dalle forme irregolari.

Il quarzo dei filoni auriferi ha generalmente una tinta biancastra o grigia opalina, talora arrossata da impregnazioni secondarie di idrossidi di ferro, una struttura cristallina, ma piuttosto massiccia e d'apparenza vetrosa.

Fra i minerali più caratteristici e diffusi che abbia notato nei giacimenti auriferi primari dell'Uollega e del Beni Sciangul, oltre a pirite, marcasite, calcopirite, arsenopirite ecc. va ricordata la tormalina. È una tormalina di tipo ferrifero, di tinte variabili fra il nero e il verde bottiglia, fortemente pleocroica, in cristalli prismatici molto allungati e striati parallelamente ad  $A_2$ , di dimensioni talora assai vistose (sino a mm. 15 di diametro), ma per lo più aghiformi. Quest'ultimi costituiscono delle

---

(1) Nell'Adunanza del 16 febbraio 1940-XVIII.

specie di straterelli sottilissimi di tinta nero-verdastra entro al quarzo, cui conferiscono un aspetto quasi zonato. Gli straterelli sono per lo più paralleli fra loro e paralleli alle superfici del filone, ma possono anche formare vene irregolari ed accentramenti cospicui. In questo caso non presentano però generalmente una veste cristallina ben distinta, ma appaiono come masserelle informi verdi-nerastre, nelle quali è riconoscibile qua e là qualche faccia fornita delle striature longitudinali dei cristalli di tormalina.

Le tormaline sono accentrate specialmente nella zona del tetto dei filoni di quarzo e secondariamente nella zona del muro, mentre mancano nella parte centrale, nella quale il quarzo è assai più puro.

Il fatto più interessante dal punto di vista minerario è che le zone tormalinifere si sono finora rivelate più ricche d'oro: alcuni saggi eseguiti, per esempio in una sezione del filone 18 di Ondonoc, hanno presentato rapporti fra tetto, centro e muro di 8 : 1 : 2 gr./t. Au. A Bomu nel Beni Sciangul, ma anche a Laga Bagadù ed a Uaberà nell'Uollega, a distanze quindi sino a km. 180 in linea d'aria, i giacimenti auriferi sono caratterizzati dalla presenza della tormalina.

Questo minerale ha quindi un'importanza pratica in quanto può servire di guida nelle ricerche e nelle eventuali operazioni di cernita ed un interesse scientifico nella ricostruzione dei processi genetici dei giacimenti auriferi. La tormalina, infatti, col suo contenuto in boro caratterizza giacimenti formati da soluzioni acquose ad alta temperatura (ipotermali).

Questa conclusione non è in armonia con quanto è stato trovato nei giacimenti auriferi noti antecedentemente in A. O. I. e cioè quelli eritrei. In Eritrea, secondo gli studi di Piepoli <sup>(1)</sup> e le notizie di Millosevich <sup>(2)</sup> il minerale diffuso nei filoni insieme con solfuri di Fe e vari altri, è specialmente la clorite che indica un ambiente termico sensibilmente diverso, di tipo mosotermale.

La clorite non manca del tutto nei filoni auriferi dell'Uollega e del Beni Sciangul. Qua e là si possono osservare le caratteristiche squamette, ma soprattutto sulle superfici dei filoni quarzosi; clorite che non sembra legata direttamente ai processi di mineralizzazione aurifera, ma d'origine secondaria.

Comunque non v'è nulla di straordinario che la temperatura delle soluzioni mineralizzatrici aurifere dell'Uollega e del Beni Sciangul sia stata sensibilmente diversa da quella delle soluzioni dell'Eritrea. Le differenze d'altronde non consistono unicamente in questo fatto.

---

<sup>(1)</sup> P. PIEPOLI, *Generalità e genesi dei giacimenti auriferi primari dell'Eritrea*. « L'Industria Mineraria d'Italia e dell'Impero », Annata XI, n. 7, Roma, 1937.

<sup>(2)</sup> F. MILLOSEVICH, *Qualche prospettiva mineraria dell'Africa Orientale Italiana*, « Rend. R. Acc. d'Italia », ser. VII, vol. I, fasc. 6. Roma, 1939.



**Geologia.** — *La silice giovanile nei vegetali fossili e viventi.* Nota <sup>(1)</sup> di PAOLO VINASSA DE REGNY, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Sulla deposizione della silice, come dice giustamente il WICKE le teorie e le speculazioni « are as plentiful as blackberries (and many are equally wild) ». In un recente lavoro il WROOST <sup>(2)</sup>, che in questo studio ha lasciato la vita, seppellito da una smotta della Craie del Mar del Nord, sono state esposte in gran parte e discusse queste varie opinioni. A cui naturalmente il WROOST ha aggiunta la sua. Contro di essa si è schierato il WETZEL <sup>(3)</sup>, studioso da tempo della questione, il quale ha inoltre ribattuto le opinioni del KÜHNEL <sup>(4)</sup>.

In conclusione però queste opinioni si riferiscono in modo speciale alla localizzazione in noduli, blocchetti irregolari ecc. che si nota nei giacimenti della *Craie d'ecrive*, cretacea, la *Creta bianca*.

Vi ha chi, come il WETZEL, ritiene che si tratti di silice singenetica: mentre il WROOST ritiene che la silice provenga da infiltrazioni di acque nella Creta bianca dopochè essa fu emersa.

Il KÜHNEL invece considera la silice di origine endogena: cosa questa assai discutibile per le silicizzazioni nella Craie ove mancano manifestazioni vulcaniche, e che, in ogni caso, non potrebbe spiegare la disposizione regolare a strati dei noduli. Lascio per eventuali altre Note questa discussione che a noi, che non possediamo giacimenti a tipo *craie*, non interessano molto.

In questa Nota intendo occuparmi invece della silicizzazione specialmente dei vegetali fossili, e, come vedremo, anche viventi.

---

<sup>(1)</sup> Presentata nell'Adunanza del 16 febbraio 1940-XVIII.

<sup>(2)</sup> WROOST V., *Vorgänge der Kieselung*. « Abh. der Senckenbergischen Naturforsch. Gesell. », 1936, n. 432, Franckfurt a. M., 24-7-36.

<sup>(3)</sup> WETZEL W., *Die Entstehungsbedingungen verschiedener Arten von Kreidefeuersteine*. « Zeitschr. d. deut. Geol. Gesell. », 89, p. 365, Berlin, 1937.

— — *Ist eine Thermalhypothese der Feuersteinbildung möglich?* Ibidem, 91, 3°, p. 231.

<sup>(4)</sup> KÜHNEL J., *Sedimentare Kieselgesteine, Hornsteine und das Feuersteinproblem*. Ibidem., 91, Heft. 3, p. 207, Berlin, 1939.



Sono note in vari punti della Terra delle vere proprie foreste silicizzate; in generale esse si hanno in territori desertici.

A questo proposito si può fare incidentalmente una interessante osservazione. Il deserto, come si sa, è terreno spoglio di vegetazione, ed a questo si giunge quando manca l'umidità, senza la quale la vita vegetale è impossibile. Così gli alberi e gli altri vegetali scompaiono. Ma effettivamente si può constatare che è possibile arrivare al deserto anche quando non manca l'acqua. Difatti se le acque circolanti nel terreno sono cariche di  $\text{Si O}_2$  colloidale, il colloide vivente attrae il colloide minerale e si ha la silicizzazione della pianta e la sua morte in tempo più o meno lungo. Questa considerazione ci porta ad un'altra constatazione interessante circa l'uniformità di altezza dei resti di tronchi silicizzati. Si può ammettere che la silicizzazione sia, com'è naturale, prevalente alla base del tronco sino ad una certa altezza, raggiunta la quale la porzione più alta della pianta, per chiusura dei vasi nutritizi, muore. Ora è presumibile che questa altezza letale sia su per giù uguale nei vari individui. Questa potrebbe forse essere una ragione per la quale nelle foreste silicizzate i tronchi sono rotti circa alla stessa altezza. Il fenomeno della silicizzazione accade anche ad alberi isolati quando il terreno sia imbevuto di silice colloidale. Ad esempio non si deve credere che nel retroterra libico vi siano delle foreste silicizzate. Si trovano solo qua e là dei tronchi isolati. Ma tanto per le foreste quanto per gli alberi isolati la causa è sempre la stessa: la silice colloidale.

Ora viene da domandarsi da dove provenga questa silice. Come ho detto sopra, le opinioni sono diverse e non occorre qui soffermarsi su tale questione.

In certe regioni desertiche potrebbe forse pensarsi alla silice colloide liberatesi durante il processo di laterizzazione. Ma ove la laterite manca, occorre pensare ad un'altra origine. Questa, secondo me, deve ricercarsi in modo speciale nelle acque giovanili.

Quando si trovano tronchi silicizzati si può difatti esser quasi certi che a poca distanza si hanno tracce di vulcanismo, come da noi in Libia.

Un recente lavoro è comparso sui vegetali silicizzati di Giava e di Sumatra. Gli avanzi silicizzati sono in talune di queste regioni così numerosi che servono per l'imbrecciatura e la selciatura delle strade. L'Autore, il MUSPER<sup>(1)</sup> si interessa in modo speciale dell'importanza di tali avanzi dal punto di vista paleontologico, allo scopo di conoscere l'antica vegetazione nelle due isole. Egli ci dà però anche delle cartine geologiche schematiche relative ai punti ove queste silicizzazioni si trovano. Da queste

---

(1) MUSPER K. A. F., *Fundorte von Kieselholzreste auf Sumatra und Java*. «Mijnbouw, en Geologie», V, 12, pp. 169-181, Batavia, 1938.

risulta che tali avanzi silicizzati sono sempre in connessione con tufi e pomiei. Nella regione del resto le acque termali sono frequenti. Non vi può esser quindi alcun dubbio che la causa della silicizzazione sia da riportare alle acque giovanili.

Poichè non vi è diversità tra litosfera positiva e litosfera negativa, delle venute di acque giovanili con silice colloidale possono aversi anche in fondo al mare: così potrebbe spiegarsi la silicizzazione di fossili marini. Sebbene non sia da escludere che essi possano anche essersi silicizzati posteriormente all'aria libera quando cioè essi erano già fossili. Allo stesso modo si possono spiegare i crostoni silicizzati, ove il cemento siliceo sarebbe dato dalla silice delle acque giovanili affioranti <sup>(1)</sup>.

Ma per tornare alla silicizzazione dei vegetali è interessante una notizia che giunge ora dal nostro Impero. Le segherie della foresta di Belletà, poco oltre Gimma, hanno avuto delle forti difficoltà per segare tavole a causa delle grandi quantità di silice colloidale diffusa nei tronchi e nei rami. La silice così diffusa, e certo coagulatasi per il movimento rapido delle seghe, le logora rapidamente e ne smussa i denti, oppure forma una specie di granulosità, come di smeriglio, lungo la linea di taglio che impedisce l'avanzamento della sega <sup>(2)</sup>.

Il VIEZZER, che ha fatto queste interessanti constatazioni, crede che la silice possa esser dovuta a fenomeni di laterizzazione. Ritengo invece più probabile che si tratti di acque giovanili a cui del resto anche il VIEZZER accenna. Infatti nella regione non mancano acque termali. Risulta pure il fatto interessante che nella valle verso Gimma si notano dei tronconi d'alberi già silicizzati e in piedi. È quello che quasi certamente accadrebbe in avvenire alle attuali foreste della regione, che sono in continua avanzante silicizzazione. Al posto della foresta verdeggianti si avrebbe pertanto col tempo un territorio desertico.

Da quanto si è detto si possono trarre alcune considerazioni pratiche:

1° La presenza di fossili silicizzati o di crostoni superficiali silicizzati in prossimità di regioni vulcaniche estinte indica l'esistenza di acque giovanili che un giorno affioravano. Se oggi esse più non affiorano con molta probabilità potrebbero essere rinvenute in profondità. Così in certe regioni desertiche nostre, come è accaduto a Ghadames, una perforazione artesianica può rinvenirle e portarle alla superficie. Non è chi non veda quanto ricerche del genere sarebbero utili nel retroterra libico, in corri-

---

<sup>(1)</sup> È probabile che debba riportarsi ad azioni di acque giovanili anche il crostone siliceo di Bur-nen, di cui parla il CECIONI « Boll. Soc. geol. it. », LVIII, pag. 235.

<sup>(2)</sup> VIEZZER C., *Itinerari géologiques da Gimma al confine sudanese in Materie prime Italia e Impero*, III, Roma, novembre 1938.

spondenza delle eruzioni antiche e delle laccoliti che si connettono, ad esempio, alle masse vulcaniche dei Harug.

2° La silicizzazione graduale delle foreste oggi viventi potrebbe portare alla loro morte ed alla formazione di un deserto ove oggi invece si ha vegetazione. Da ciò la necessità di rinnovare continuamente tali foreste, eliminando le piante maggiori con silicizzazione più avanzata per sostituirle con piante giovani e quindi meno affette dalla silice.

3) Dati i nuovi concetti medici per la cura degli uricemici mediante i colloidi, e la silice in modo speciale, sarebbe utile indagare quale delle acque termali con silice colloide potrebbe essere adibita a scopi terapeutici.

---

**Botanica (Microbiologia agraria).** — *Influenza esercitata da un principio ipoglicemico isolato dai Lieviti sopra la fermentazione alcoolica* <sup>(1)</sup>. Nota di ONORATO VERONA e GINO FLORENZANO, presentata <sup>(2)</sup> dall'Accademico BIAGIO LONGO.

È noto come in alcune parti di piante si contengano succhi capaci di abbassare negli animali il tasso glicemico. La loro azione si svolge, sotto certi aspetti, in modo del tutto paragonabile a quella esercitata dall'insulina, sì che su di essi è stata, via via, richiamata l'attenzione degli sperimentatori al fine di ottenere un composto capace di sostituire o coadiuvare l'azione esercitata dal principio ormonico animale.

Non sono mancati tentativi di ricercare nei microrganismi tali principi ipoglicemici; e sono stati trovati, infatti, in liquidi di coltura di *Bact. coli* e *Bac. subtilis* (LITTLE, LEVINE e BEST, 1924); altresì sarebbero stati estratti da *Bact. coli* e *Bac. Chauwaei* (BREUER, 1929 <sup>(3)</sup>); e, infine, da lieviti.

Riprendendo l'argomento uno di noi (VERONA) è riuscito, qualche tempo addietro, ad estrarre da *Sacch. cerevisiae*, a mezzo di particolari trattamenti, un liquido che, introdotto endovena in animali da esperimento, si dimostrò capace di abbassare notevolmente il tasso glicemico. Le esperienze, più volte ripetute, solo poche volte hanno dato, per cause imprecisate, esito negativo (specialmente su cane), mentre altre volte a seguito di introduzione di forti quantità è stato persino possibile di provocare lo shock ipoglicemico. Mentre su tale sostanza continuano gli studi onde precisare meglio il meccanismo della sua azione sugli animali, si è voluto vedere, in occasione di altre ricerche, l'azione da essa esercitata sulla fermentazione alcoolica.

---

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nell'Istituto di Microbiologia agraria e tecnica della R. Università di Firenze.

<sup>(2)</sup> Nell'Adunanza del 16 febbraio 1940-XVIII.

<sup>(3)</sup> BREUER, « Münch. Med. Woch. », pag. 741, 1929.

\*  
\*  
\*

All'uopo, in una prima serie di ricerche, abbiamo determinato la anidride carbonica capace di svolgersi, in un certo intervallo di tempo, da una soluzione di glucosio. Più esattamente, si è impiegato il liquido di WILLSTÄTTER e STEIBELT <sup>(1)</sup> distribuito in matracci da cc. 200 che venivano insemenzati, previa sterilizzazione, con una quantità di lievito fresco (gr. 0.676) corrispondente a gr. 0.2 di lievito secco. La sostanza in esame fu sperimentata nelle concentrazioni dell'1-2-2, 5-5 %. I matracci, appena insemenzati, furono posti in termostato a 25° C. e messi in collegamento con un dispositivo simile a quello usato da EULER e SAHLIN <sup>(2)</sup> e da altri per la misurazione dell'anidride carbonica. Le letture furono effettuate durante le prime quattro ore; tempo ritenuto sufficiente ad osservare eventuali differenze, essendo noto come la maggior produzione di gas si compia nelle prime tre ore.

Fu ottenuto:

|                      |       | CO <sub>2</sub> svolta in cc. dopo ore: |      |      |      |        |
|----------------------|-------|-----------------------------------------|------|------|------|--------|
|                      |       | 1                                       | 2    | 3    | 4    | totale |
| controllo            |       | 27 -                                    | 39.7 | 41.2 | 39.1 | 147 -  |
| sostanza<br>aggiunta | 1 %   | 28.2                                    | 41.2 | 43.6 | 40.5 | 153.5  |
|                      | 2 %   | 31.6                                    | 43 - | 44.8 | 42.7 | 162.1  |
|                      | 2,5 % | 32.4                                    | 46.1 | 46.6 | 44.9 | 170 -  |
|                      | 5 %   | 35.5                                    | 48.4 | 50 - | 45.6 | 179.5  |

In una seconda serie di ricerche fu operato in modo diverso. Furono allestite, cioè, grosse ERLÉNMEYER con cc. 300 di mosto di uva contenente il 23.48 % di zuccheri riduttori. Un recipiente fu lasciato di controllo

<sup>(1)</sup> WILLSTÄTTER e STEIBELT, « Z. Physiol. Ch. », 1921, vol. 115, pag. 211. (Si mescolano a parti uguali una soluzione di glucosio al 10 % e un'altra contenente in 100 p., gr. 2.5 di KH<sub>2</sub>PO<sub>4</sub>, gr. 2 di CH<sub>3</sub>CONH<sub>2</sub>, gr. 0.25 di MgSO<sub>4</sub> · 7H<sub>2</sub>O, gr. 0.10 di CaSO<sub>4</sub> · 2H<sub>2</sub>O. Entrambe le soluzioni si saturano previamente di CO<sub>2</sub> a 25° C.).

<sup>(2)</sup> EULER e SAHLIN, « Z. Gärungsphysiol. », 1913, vol. 3, p. 225. (Il matraccio di coltura è chiuso con tappo di gomma attraversato da due tubi di vetro; uno di questi, munito di rubinetto, comunica con l'esterno; l'altro, piegato a squadra, è collegato con una buretta graduata, aperta alla base e posta entro un tubo pieno di acqua. L'acqua con la quale trovasi riempita la buretta e il tubo viene saturata di NaCl e CO<sub>2</sub> a temperatura ambiente. All'inizio della esperienza si porta a zero il livello dell'acqua nella buretta. Svolgendosi gas, il livello si abbassa e viene letto portando prima a coincidere con esso il livello del liquido situato nel tubo di protezione della buretta).

mentre negli altri fu aggiunta la sostanza in esame nelle proporzioni dell'1-2-2.5 %. Fu seminato, previa sterilizzazione, con una coltura pura di *Sacch. ellipsoideus* e coltivato per 30 giorni a 24° C. determinando l'alcool prodotti al 10°, 20°, 30° giorno.

Risultò:

|                      |       | alcool % in peso dopo giorni: |       |       |
|----------------------|-------|-------------------------------|-------|-------|
|                      |       | 10                            | 20    | 30    |
| controllo            |       | 7.12                          | 8.40  | 8.60  |
| sostanza<br>aggiunta | 1 %   | 7.80                          | 8.56  | 8.70  |
|                      | 2 %   | 10 —                          | 10.91 | 11.14 |
|                      | 2.5 % | 10.64                         | 11.22 | 11.36 |

Questi ultimi dati, integrati dai primi, dimostrano chiaramente che la sostanza in esame esercita, proporzionalmente alla quantità aggiunta, una favorevole influenza sul rendimento alcoolico della fermentazione e ne accelera l'andamento.

\* \*

Il fatto si inquadra con quanto è conosciuto circa l'azione di stimolo che esercitano, sulla fermentazione alcoolica, sostanze di natura ormonica quali adrenalina <sup>(1)</sup>, tiroxina <sup>(2)</sup>, preparati di tiroide <sup>(3)</sup>, insulina <sup>(4)</sup>, estratto corticale del surrene <sup>(5)</sup>, follicolina <sup>(6)</sup> ecc.

Nel caso particolare l'azione del nostro preparato può anche ripor-  
rarsi a quella ben nota del complesso « bios » di WILDIERS <sup>(7)</sup>.

<sup>(1)</sup> ABDERHALDEN, « Fermentforsch. », 1933, vol. 6 pag. 149; POPPER, « Biochem. Zeit. », 1925, vol. 162, pag. 271.

<sup>(2)</sup> TOMITA, « Biochem. Zeit. », 1922, vol. 131, pag. 175; IMSCHENETSKI, « Chem. Zentr. », II, 1933, pag. 3862.

<sup>(3)</sup> ROSENOW, « Biochem. Zeit. », 1925, vol. 160, pag. 269; ZELLER, « Biochem. Zeit. », 1926, vol. 171, pag. 45 e vol. 172, pag. 115.

<sup>(4)</sup> DUCCESCHI, « Arch. Ital. Biol. », 1924, vol. 74, pag. 103; MC GUIRE e FALN, « J. Biol. Chem. », 1924, vol. 60, pag. 489; ZELLER, « Biochem. Zeit. », 1926, vol. 175, pag. 154 e vol. 176, pag. 140; ABDERHALDEN, « Fermentforsch. », 1925, vol. 8, pag. 227.

<sup>(5)</sup> MIGONE e MORTARA, « Boll. Soc. Ital. Biol. sper. », 1933, vol. 8, pag. 1712.

<sup>(6)</sup> MOSSINI, « La Chimica e l'Industria », 1935, vol. 17, pag. 524.

<sup>(7)</sup> Nel complesso « bios » si racchiudono almeno quattro diverse sostanze e precisamente: il mesainositolo (bios I), la biotina (bios II), la vitamina B1 (bios III) ed un'altra ancora non nota (bios IV). La biotina e la vitamina B1 hanno funzione limitante lo sviluppo dei lieviti; le altre due, invece, manifestano semplice azione coadiuvante le prime.





**Matematica.** — *Sull'inversione della trasformata di Laplace e su alcuni teoremi tauberiani* <sup>(1)</sup>. Nota di LUIGI AMERIO, presentata <sup>(2)</sup> da MAURO PICONE, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

In una Memoria <sup>(3)</sup>, attualmente in corso di stampa, ho dato una generalizzazione della nota formula di RIEMANN per l'inversione della trasformazione (bilatera) di LAPLACE

$$f(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt} F(t) dt$$

e ho indicato varie proprietà di tale formula generalizzata, mostrando, tra l'altro, come, mediante essa, si possa risalire dalla trasformata  $f(p)$  alla funzione  $F(t)$ , facendo su quest'ultima le ipotesi più generali possibili.

In una seconda Memoria <sup>(4)</sup>, anch'essa di prossima pubblicazione, valendomi tra l'altro della formula di RIEMANN generalizzata, ho poi dimostrati alcuni teoremi tauberiani relativi al comportamento per  $t \rightarrow \infty$  della  $F(t)$ , supposta nulla per  $t < 0$ , tenendo conto soltanto delle proprietà della trasformata

$$f(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} F(t) dt.$$

Scopo di questa Nota è di esporre brevemente i principali risultati cui sono pervenuto, rinviando, per le dimostrazioni e la trattazione completa, alle Memorie ricordate.

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nel R. Istituto Nazionale di Alta Matematica.

<sup>(2)</sup> Nell'Adunanza del 16 febbraio 1940-XVIII.

<sup>(3)</sup> L. AMERIO, *Sull'inversione della trasformazione di Laplace*. « R. Acc. Scienze di Napoli », 1940.

<sup>(4)</sup> L. AMERIO, *Alcuni teoremi tauberiani per la trasformazione di Laplace*. « Annali di Matematica », S. IV, T. XIX, 1940.

1. — In quanto segue supporremo che  $F(t)$  sia una funzione, reale o complessa, della variabile reale  $t$ , definita per  $-\infty < t < \infty$ , integrabile secondo LEBESGUE in ogni intervallo finito e trasformabile per  $\alpha < R(p) < \beta$ , cioè tale che l'integrale improprio

$$[1] \quad f(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt} F(t) dt$$

risulti convergente nella striscia  $\alpha < R(p) < \beta$  del piano della variabile complessa  $p$ .

Posto allora, per  $\lambda > 0$ ,

$$[2] \quad G_{n,\lambda}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\lambda}^{k+i\lambda} e^{pt} f(p) \left(1 + \frac{p^2}{\lambda^2}\right)^n dp,$$

dove è  $\alpha < k < \beta$  e come cammino di integrazione può assumersi il segmento  $(k - i\lambda) \rightarrow (k + i\lambda)$ , si dimostra il

TEOREMA I. — Per quasi tutti i valori di  $t$  si ha

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} G_{1,\lambda}(t) = F(t).$$

Se, per un dato  $t$  e per un valore intero positivo o nullo di  $n$ , risulta

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} G_{n,\lambda}(t) = s_t$$

finito, è anche

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} G_{n+1,\lambda}(t) = s_t.$$

Se la  $F(t)$  è continua in tutti i punti di un intervallo finito  $a \rightarrow b$ , si ha, per  $n$  intero positivo,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} G_{n,\lambda}(t) = F(t)$$

uniformemente per  $c \leq t \leq d$ , con  $a < c < d < b$ .

Se nel punto  $t$  la  $F(t)$  ha una discontinuità di prima specie, risulta, per  $n$  intero positivo,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} G_{n,\lambda}(t) = \frac{1}{2} (F(t+) + F(t-)).$$

Ricordiamo ora che la formula di inversione di RIEMANN <sup>(1)</sup>

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} e^{pt} f(p) dp,$$

<sup>(1)</sup> G. DOETSCH, *Theorie und Anwendung der Laplace - Transformation*. Berlin, Springer, 1937, pag. 104, Satz 1.

nella quale l'integrale va calcolato come

$$[3] \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\lambda}^{k+i\lambda} e^{pt} f(p) dp = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} G_{0,\lambda}(t),$$

vale sicuramente se la serie di FOURIER relativa alla funzione  $F(t)$ , considerata nell'intervallo  $t - \pi - t + \pi$ , risulta convergente nel punto  $t$  e se anche la funzione  $|F(t)|$  è trasformabile in una striscia  $\alpha_1 < R(p) < \beta_1$  (sarà allora necessariamente  $\alpha \leq \alpha_1 < \beta_1 \leq \beta$  e dovrà prendersi  $\alpha_1 < k < \beta_1$ ).

Come immediata conseguenza del teorema I si deduce che, se vale la [1] e se il limite [3] esiste finito per quasi tutti i valori di  $t$ , la formula di inversione di RIEMANN permette di ricostruire la funzione  $F(t)$  a meno dei valori che essa assume in un insieme di misura nulla.

2. — Se la  $F(t)$  è assolutamente continua in ogni intervallo finito, trasformabile nella striscia  $\alpha < R(p) < \beta$  e se, per  $\alpha < R(p) < \beta$ , risulta

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{-pt} F(t) = 0,$$

si ricava, mediante un'integrazione per parti, che anche la derivata  $F'(t)$  è trasformabile nella stessa striscia e che vale la nota formula

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt} F'(t) dt = p \int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt} F(t) dt.$$

Se  $m$  è un intero positivo, si ottiene perciò dal teorema I, quasi ovunque,

$$\begin{aligned} F'(t) &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\lambda}^{k+i\lambda} e^{pt} pf(p) \left(1 + \frac{p^2}{\lambda^2}\right)^m dp \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} G'_{m,\lambda}(t). \end{aligned}$$

Ora si può dimostrare che la formula di RIEMANN generalizzata permette di ottenere la  $F'(t)$ , o anche le derivate successive, se esistono, imponendo alla  $F(t)$  soltanto condizioni relative a un intorno del punto  $t$  considerato.

TEOREMA II. — Se la funzione  $F(t)$ , integrabile secondo Lebesgue in ogni intervallo finito e trasformabile nella striscia  $\alpha < R(p) < \beta$ , è assolutamente continua nell'intervallo  $a \leq t \leq b$  assieme alle sue derivate  $F'(t)$ ,  $F''(t)$ , ...,  $F^{(n-1)}(t)$ , si ha

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} G_{n+1,\lambda}^{(n)}(t) = F^{(n)}(t)$$

quasi ovunque per  $a \leq t \leq b$ .

Se la derivata  $F^{(n)}(t)$  è continua in tutti i punti dell'intervallo  $a < t < b$ , risulta

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} G_{n+1, \lambda}^{(n)}(t) = F^{(n)}(t)$$

uniformemente per  $c \leq t \leq d$ , con  $a < c < d < b$ .

Se in un punto  $t$ , interno all'intervallo  $a < t < b$ , la  $F^{(n)}(t)$  presenta una discontinuità di prima specie, si ha

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} G_{n+1, \lambda}^{(n)}(t) = \frac{1}{2} (F^{(n)}(t+) + F^{(n)}(t-)).$$

3. — Enunceremo ora alcuni teoremi tauberiani relativi al comportamento per  $t \rightarrow \infty$  della funzione  $F(t)$ , supposta definita nell'intervallo  $0 \leq t < \infty$ , integrabile secondo LEBESGUE in ogni tratto finito, e trasformabile per  $R(p) > \alpha$  (cioè tale che l'integrale improprio

$$f(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} F(t) dt$$

risulti convergente nel semipiano  $R(p) > \alpha$ ) facendo l'ipotesi che la trasformata  $f(p)$  sia analitica nel semipiano  $R(p) > 0$ .

Tali teoremi hanno lo scopo principale di dare condizioni sufficienti, ricavate esclusivamente dalle proprietà della trasformata  $f(p)$ , perchè sia

$$[4] \quad \lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 0$$

oppure, per  $0 \leq t < \infty$ ,

$$[5] \quad |F(t)| \leq M$$

dove  $M$  è una costante positiva <sup>(1)</sup>.

Queste condizioni sono, in particolare, richieste in una vasta classe di problemi, detti, dal prof. PICONE <sup>(2)</sup>, di stabilità, nei quali si conosce la trasformata di LAPLACE della soluzione  $F(t)$  e si vuol sapere se la  $F(t)$  è stabile, cioè soddisfa alla [4], o alla [5], oppure tende a un limite finito  $A$  (quest'ultimo caso si può ricondurre alle condizioni [4]).

4. — Posto  $p = u + iv$ , cominciamo col premettere il seguente

TEOREMA III. — Se la  $F(t)$  è trasformabile nel semipiano  $R(p) > \alpha$ , finito, e se la trasformata  $f(p)$ , analitica per  $R(p) > 0$ , soddisfa alle seguenti condizioni

<sup>(1)</sup> Per la condizione [5] vedi anche: D. WIDDER, *Necessary and sufficient conditions for the representation of a function as a Laplace integral*. « Trans. Am. Math. Soc. », V. 33, 1931, pagg. 873, 875.

<sup>(2)</sup> M. PICONE, *Sulla trasformata di Laplace*. « Rend. Acc. dei Lincei », 1935, vol. XXI, pagg. 306, 313.

a) per quasi tutti i valori finiti di  $v$  esiste finito il

$$\lim_{u \rightarrow 0+} f(u + iv)$$

e risulta una funzione  $f(iv)$  integrabile secondo LEBESGUE in ogni intervallo finito,

b) esiste un numero positivo  $k > \alpha$  tale che, preso  $h > 0$ , valga, nell'intervallo  $-h \leq v \leq h$ , per l'integrale

$$\int_{-h}^h f(u + iv) dv$$

l'equiassoluta continuità, qualunque sia  $u$ , con  $0 < u \leq k$ ,

c) esiste un intero positivo  $m$  e una successione di valori

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots,$$

con

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty,$$

tali che il

$$\lim_{u \rightarrow 0+} f(u \pm i\lambda_n)$$

esista finito e risulti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(u \pm i\lambda_n)}{\lambda_n^m} = 0$$

uniformemente rispetto a  $u$ , con  $0 \leq u \leq k$ ; allora si ha, per quasi tutti i valori di  $t$ ,

$$F(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda_n}^{\lambda_n} e^{ivt} f(iv) \left(1 - \frac{v^2}{\lambda_n^2}\right)^m dv.$$

Tenendo conto del teorema ora enunciato, se le funzioni  $F(t)$  e  $f(p)$  soddisfano alle condizioni in esso richieste, noi porremo sempre

$$F(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda_n}^{\lambda_n} e^{ivt} f(iv) \left(1 - \frac{v^2}{\lambda_n^2}\right)^m dv$$

in tutti i punti  $t$  pei quali il limite stesso esiste-finito, e negli altri  $F(t) = 0$ .

Ciò premesso, si hanno i seguenti teoremi tauberiani.

**TEOREMA IV.** — Se le funzioni  $F(t)$  e  $f(p)$  soddisfano alle condizioni del teorema III e se risulta

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ivt} f(iv) \left(1 - \frac{v^2}{\lambda^2}\right)^m dv = 0$$

uniformemente rispetto a  $\lambda > 0$ , si ha anche

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 0.$$

TEOREMA V. — Se le funzioni  $F(t)$  e  $f(p)$  soddisfano alle condizioni del teorema III e se risulta

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{i\omega t} f(i\omega) d\omega = 0$$

uniformemente rispetto a  $\lambda > 0$ , si ha anche

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 0.$$

Dal teorema V si deducono poi alcune conseguenze notevoli.

TEOREMA VI. — Se le funzioni  $F(t)$  e  $f(p)$  soddisfano alle condizioni del teorema III e se l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(i\omega)| d\omega$$

esiste finito, si ha

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 0.$$

TEOREMA VII. — Se le funzioni  $F(t)$  e  $f(p)$  soddisfano alle condizioni del teorema III e se esiste un numero  $a > 0$  tale che la  $f(i\omega)$  risulti a variazione limitata negli intervalli  $a - |\omega|$ ,  $-\infty - |\omega| - a$ , si ha

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 0.$$

Più in particolare, facendo delle ipotesi relative al comportamento della  $f(i\omega)$  nell'intervallo  $-a \leq \omega \leq a$ , si ottiene il

TEOREMA VIII. — Se le funzioni  $F(t)$  e  $f(p)$  soddisfano alle condizioni del teorema VII e se inoltre nell'intervallo  $-a \leq \omega \leq a$  risulta

$$f(i\omega) = \frac{f_1(\omega)}{|v - b_1|^{\mu_1} \dots |v - b_r|^{\mu_r}} + i \frac{f_2(\omega)}{|v - c_1|^{\nu_1} \dots |v - c_s|^{\nu_s}},$$

dove è

$$-a < b_1 < b_2 < \dots < b_r < a, \quad -a < c_1 < c_2 < \dots < c_s < a, \\ 0 < \mu_i < 1, \quad 0 < \nu_i < 1,$$

e le funzioni  $f_1(\omega)$  e  $f_2(\omega)$  sono a variazione limitata in  $-a - a$ ; allora, indicato con  $\rho < 1$  il maggiore degli esponenti  $\mu_1, \dots, \mu_r, \nu_1, \dots, \nu_s$ , e preso  $\delta > 0$ , risulta, per  $t \geq \delta$ ,

$$|F(t)| < \frac{K_\delta}{t^{1-\rho}}$$

con  $K_\delta$  costante positiva dipendente da  $\delta$  ma non da  $t$ .

Mentre i teoremi IV, V, VI, VII, VIII, danno delle condizioni sufficienti perchè sia verificata la [4], i due seguenti teoremi contengono delle condizioni per cui valga la [4] escludendo però, per la variabilità di  $t$ , una successione di intervalli aventi tutti lunghezza eguale e arbitrariamente piccola.

TEOREMA IX. — Se le funzioni  $F(t)$  e  $f(p)$  soddisfano alle condizioni del teorema III e se risulta

$$f(iv) = g(v)\psi(v),$$

con  $g(v)$  funzione limitata nell'intervallo  $-a \leq v \leq a$ , a variazione limitata negli intervalli  $a - \infty$ ,  $-\infty - -a$ , e  $\psi(v)$  funzione periodica, di periodo  $\tau$ , integrabile secondo Lebesgue in ogni tratto finito, preso  $\sigma$ , con  $0 < \sigma < \frac{\pi}{\tau}$ , si ha

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 0$$

purchè la variabile  $t$ , nel crescere indefinitamente, si mantenga esterna agli intervalli  $\frac{2n\pi}{\tau} - \sigma - \frac{2n\pi}{\tau} + \sigma$ , con  $n$  intero positivo.

TEOREMA X. — Se le funzioni  $F(t)$  e  $f(p)$  soddisfano alle condizioni del teorema III, se risulta

$$f(iv) = g(v)\psi(v),$$

dove è

$$\psi(v) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{-i\lambda_n v},$$

con  $\sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^{1+\frac{1}{r}}$  convergente per un valore  $r \geq 1$ ,  $\lambda_n$  reale e

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq \delta > 0^{(1)},$$

e se esiste un numero  $a > 0$  tale che l'integrale

$$\int_{-a}^a |g(v)|^{1+\frac{1}{r}} dv$$

(1) Si dimostra, con tali ipotesi, che la serie  $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{-i\lambda_n v}$  converge in media in ogni intervallo  $v_1 - v_2$  alla  $\psi(v)$ , la quale è integrabile in  $v_1 - v_2$  insieme a  $|\psi(v)|^{1+r}$ .



esista finito, mentre negli intervalli  $a - \infty, -\infty - a$  la  $g(r)$  è a variazione limitata, allora, preso  $\sigma$ , con  $0 < \sigma < \frac{\delta}{2}$ , si ha

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 0$$

purchè la variabile  $t$ , nel crescere indefinitamente, si mantenga esterna agli intervalli  $\lambda_n - \sigma - \lambda_{n+1} + \sigma$ .

*Osservazione.* — Non è detto che se risulta

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 0$$

la corrispondente funzione  $f(ir)$  sia integrabile in ogni intervallo finito.

Posto infatti  $F(t) = 0$  per  $0 \leq t < 2$ ,  $F(t) = \frac{1}{\log t}$  per  $t \geq 2$ , si dimostra che la  $f(ir)$  è continua in tutti i punti di ogni intervallo  $\sigma - h$ , con  $0 < \sigma < h$ , ma che, posto

$$f(ir) = f_1(r) - i f_2(r),$$

si ha, per un dato  $h$ ,

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{\sigma}^{\sigma+h} f_2(r) dr = +\infty.$$

5. — Dopo aver esaminato il caso in cui la  $f(ir)$  è integrabile in ogni intervallo finito, si può considerare il caso in cui presenti dei poli del primo ordine sull'asse immaginario, e, più precisamente, si può supporre che la  $f(p)$  sia funzione meromorfa, avente solo poli del primo ordine sull'asse immaginario.

Ora se la  $f(p)$ , meromorfa, può porsi nella forma

$$f(p) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{p - i\lambda_n},$$

con  $\sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|$  convergente e

$$\dots < \lambda_{-1} < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots,$$

si ha, per  $R(p) > 0$ ,

$$f(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} F(t) dt,$$

con

$$F(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n t}.$$

La  $F(t)$  è in tal caso una funzione quasi periodica di BOHR e vale per essa l'eguaglianza di PARSEVAL <sup>(1)</sup>

$$[6] \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |F(t)|^2 dt = \sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2.$$

Si ha inoltre

$$[7] \quad |F(t)| \leq \sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|.$$

Le [6] e [7] (quest'ultima coincide con la [5]) esprimono dei teoremi tauberiani relativi alla funzione  $F(t)$ , e possono essere generalizzati considerando il caso in cui la  $\sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|$  sia divergente.

Per questo cominciamo col premettere il seguente

**TEOREMA XI.** — *Se la serie  $\sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2$  è convergente e se la successione di numeri reali  $\lambda_n$  soddisfa alla condizione*

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq \delta > 0,$$

*la serie*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{p - i\lambda_n}$$

*è assolutamente e uniformemente convergente in ogni campo finito del piano  $p$ , dal quale siano esclusi con degli intornoi gli eventuali punti  $i\lambda_n$ , e la sua somma  $f(p)$  è la trasformata di LAPLACE di una funzione  $F(t)$  definita in media in ogni intervallo finito  $0 \leq t \leq T$  dalla serie*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n t}.$$

Ciò posto vale il

**TEOREMA XII.** — *Se per un valore  $m \geq 1$  la serie  $\sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^{1+\frac{1}{m}}$  converge e se la successione  $\{\lambda_n\}$  soddisfa alla condizione*

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq \delta > 0,$$

*si ha, per  $0 \leq T_1 \leq T_2$ ,*

$$\int_{T_1}^{T_2} |F(t)|^{1+m} dt \leq K(T_2 - T_1) + H,$$

*con  $K$  e  $H$  costanti positive.*

<sup>(1)</sup> H. BOHR, *Fastperiodische Funktionen*. Berlin, Springer, 1932, pag. 53.

Dal teorema XII si ricava immediatamente

$$\max_{T \rightarrow \infty} \lim \frac{1}{T} \int_0^T |F(t)|^{1+m} dt \leq K$$

ma si può ottenere un risultato più preciso mediante una estensione, che non mi consta sia stata dimostrata, di un noto teorema di YOUNG-HAUSDORFF <sup>(1)</sup> relativo alle serie di FOURIER.

TEOREMA XIII. — *Se le successioni  $\{a_n\}$  e  $\{\lambda_n\}$  soddisfano alle condizioni del teorema XII, si ha*

$$\max_{T \rightarrow \infty} \lim \frac{1}{T} \int_0^T |F(t)|^{1+m} dt \leq \left( \sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^{1+\frac{1}{m}} \right)^m.$$

*Se poi è  $m = 1$ , vale l'eguaglianza di PARSEVAL*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |F(t)|^2 dt = \sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2.$$

6. — Se le successioni  $\{a_n\}$  e  $\{\lambda_n\}$  soddisfano alle condizioni del teorema XII, la serie

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n t}$$

converge in media, per il teorema XI, alla funzione  $F(t)$  in ogni intervallo  $0 \leq t \leq T$ .

Tenendo conto di questo fatto si può, come è ben noto, definire la  $F(t)$  per tutti i valori di  $t$ , con  $0 \leq t < \infty$ , escluso al più un insieme di misura nulla.

Se conveniamo di porre  $F(t) = 0$  nei punti di tale insieme, possiamo dare delle condizioni sufficienti perchè la  $F(t)$  soddisfi alla [5].

TEOREMA XIV. — *Se le successioni  $\{a_n\}$  e  $\{\lambda_n\}$  soddisfano, per un valore  $\delta > 0$ , alle condizioni del teorema XII, la funzione*

$$F(t) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n t}$$

---

<sup>(1)</sup> A. ZYGMUND, *Trigonometrical series. Monografie matematyczne*, Warszawa, 1935, pagg. 189-190.

è limitata nell'intervallo  $0 \leq t < \infty$ , se sono egualmente limitate le funzioni periodiche, di periodo  $\frac{2\pi}{\delta}$ ,

$$\psi_{N,k,r}(t) = \sum_{n=-N}^N a_{n,k} \varepsilon_n^r e^{in\delta t},$$

con  $N = 0, 1, \dots$ ;  $k = 0, 1, \dots$ ;  $r = 0, 1, \dots$ , e inoltre

$$a_{n,k} = a_n e^{i\lambda_n \frac{2k\pi}{\delta}},$$

$$\varepsilon_n = \lambda_n - n\delta.$$

TEOREMA XV. — Se esiste un numero  $\sigma > 0$  tale che risulti

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \lambda_n - n\sigma = 0,$$

e un numero  $m \geq 1$  per cui siano convergenti le serie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^{1+\frac{1}{m}}, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\sigma_n|^{1+m},$$

con

$$\sigma_n = \lambda_n - n\sigma,$$

condizione necessaria e sufficiente perchè la  $F(t)$  sia limitata per  $0 \leq t < \infty$  è che siano egualmente limitate le funzioni periodiche, di periodo  $\frac{2\pi}{\sigma}$ ,

$$\psi_k(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{n,k} e^{in\sigma t}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

dove è

$$a_{n,k} = a_n e^{i\lambda_n \frac{2k\pi}{\sigma}}.$$

7. — Senza soffermarci a considerare il caso in cui la  $f(p)$  sia meromorfa ma abbia poli tutti di ordine  $\leq N$ , con  $N$  intero positivo, situati nel semipiano  $R(p) \leq 0$ , e nelle conseguenze che si possono dedurre combinando i teoremi dei nn. 5 e 6 con quelli dei nn. 3 e 4, indichiamo ora una proprietà che vale per una classe di funzioni  $F(t)$  che comprende quelle soddisfacenti alle condizioni [4], o [5], e anche le funzioni considerate nel teorema XII.

TEOREMA XVI. — Se la funzione  $F(t)$  è integrabile in ogni intervallo  $0 \leq t \leq T$  assieme a  $|F(t)|^{1+\sigma}$ , per un valore  $\sigma > 0$ , e se esistono due costanti positive  $H$  e  $K$  tali che risulti, per  $0 \leq T_1 \leq T_2$ ,

$$\int_{T_1}^{T_2} |F(t)|^{1+\sigma} dt \leq K(T_2 - T_1) + H,$$

allora la  $F(t)$  è trasformabile nel semipiano  $R(p) > 0$  e, se  $iv_0$  è un punto di analiticità della sua trasformata  $f(p)$ , si ha

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{-iv_0 t} F(t) dt = 0.$$

Come immediata conseguenza di questo teorema si ricava allora che, se per  $p = iv_0$  la  $f(p)$  presenta un polo del primo ordine, nel quale  $A$  sia il residuo, risulta

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{-iv_0 t} F(t) dt = A,$$

ciò che costituisce una generalizzazione di un teorema già noto per le funzioni quasi periodiche di BOHR <sup>(1)</sup>.

---

<sup>(1)</sup> H. BOHR, loc. cit., pag. 45.

**Matematica.** — *Un criterio sufficiente di stabilità per le soluzioni dei sistemi di equazioni integrali lineari e sue applicazioni* <sup>(1)</sup>. Nota di DOMENICO CALIGO, presentata <sup>(2)</sup> da MAURO PICONE, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Nelle ricerche, anche le più recenti, intese al conseguimento di criteri sufficienti di stabilità per gli integrali delle equazioni differenziali ordinarie si fa spesso ricorso alla traduzione dell'equazione in particolari equazioni integrali di VOLTERRA, sulle quali si opera. Nella presente Nota voglio mostrare che è possibile dare una proposizione del tutto generale per la stabilità delle soluzioni di una equazione integrale di VOLTERRA dalla quale in modo naturale discendono numerosi criteri di stabilità per le soluzioni delle equazioni differenziali ordinarie.

1. CRITERIO SUFFICIENTE DI STABILITÀ PER LE SOLUZIONI DEI SISTEMI DI EQUAZIONI INTEGRALI DI VOLTERRA. Sussiste il teorema:

I. *Le funzioni (reali o complesse)*

$$y_k(x) \quad , \quad \varphi_k(x) \quad , \quad V_{s,k}(x, \xi) \quad (s, k = 1, 2, \dots, n)$$

sono considerate al variare delle variabili reali  $x$  e  $\xi$  nell'intervallo  $(0, +\infty)$ , essendo in ogni intervallo finito le  $y_k(x)$  misurabili e limitate e, per ogni  $x \geq 0$ , le  $V_{s,k}(x, \xi)$  funzioni di  $\xi$  misurabili e sommabili. Quasi ovunque nell'intervallo  $(0, +\infty)$  valgano le equazioni

$$[1] \quad y_k(x) = \varphi_k(x) + \sum_{s=1}^{s=n} \int_0^x V_{s,k}(x, \xi) y_s(\xi) d\xi \quad (k=1, 2, \dots, n);$$

condizione sufficiente affinché ogni  $y_k(x)$  sia limitata nell'intervallo  $(0, +\infty)$  è che, con la limitatezza in tale intervallo delle  $\varphi_k(x)$  per ogni  $x$  di  $(0, +\infty)$

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le applicazioni del Calcolo. Mi è grato esprimere pubblicamente i miei vivi ringraziamenti al prof. PICONE, Direttore dell'Istituto, per avermi incitato a compiere le ricerche, delle quali tratta la Nota presente, e per avermi dato le idee fondamentali, che mi hanno condotto al compimento di esse.

<sup>(2)</sup> Nell'Adunanza del 21 marzo 1940-XVIII.

le  $V_{s,k}(x, \xi)$  siano funzioni di  $\xi$  sommabili nello stesso intervallo ed esistano tre numeri positivi  $x_0$ ,  $N$  e  $\sigma$ , con  $\sigma < 1$ , per i quali si abbia, per  $x \geq x_0$ ,

$$[2] \quad \sum_{s=1}^{s=n} \int_0^{x_0} |V_{s,k}(x, \xi)| d\xi < N$$

$$[3] \quad \sum_{s=1}^{s=n} \int_{x_0}^x |V_{s,k}(x, \xi)| d\xi < \sigma.$$

La dimostrazione del teorema è ben facile; dalla [1] si trae invero, per  $x \geq x_0$

$$\begin{aligned} |y_k(x)| &\leq |\varphi_k(x)| + \sum_{s=1}^{s=n} \int_0^{x_0} |V_{s,k}(x, \xi)| |y_s(\xi)| d\xi + \\ &+ \sum_{s=1}^{s=n} \int_{x_0}^x |V_{s,k}(x, \xi)| |y_s(\xi)| d\xi. \end{aligned}$$

Detto  $\bar{\mu}$  un numero positivo non superato nell'intervallo  $(0, x_0)$  dai moduli delle  $y_k(x)$ , posto

$$\mu_s(x) = \text{estr. sup. } |y_s(\xi)|, \quad \text{per } x_0 \leq \xi \leq x,$$

poichè, per le ipotesi ammesse, esiste un certo  $M > 0$  tale che è sempre

$$[4] \quad |\varphi_k(x)| < M,$$

la precedente disuguaglianza diviene

$$|y_k(x)| < M + \sum_{s=1}^{s=n} \bar{\mu} \int_0^{x_0} |V_{s,k}(x, \xi)| d\xi + \sum_{s=1}^{s=n} \mu_s(x) \int_{x_0}^x |V_{s,k}(x, \xi)| d\xi$$

e pertanto, detto  $\mu(x)$  il più grande dei  $\mu_s(x)$ , fissato un  $X > x_0$ , si ha

$$|y_k(x)| < M + \bar{\mu}N + \sigma\mu(X), \quad \text{per } x_0 \leq x \leq X,$$

onde

$$\mu_k(X) < M + \bar{\mu}N + \sigma\mu(X),$$

e quindi

$$\mu(x) < \frac{M + \bar{\mu}N}{1 - \sigma}, \quad \text{per } x \geq x_0 \quad (3).$$

2. UN PRIMO CRITERIO SUFFICIENTE DI STABILITÀ PER LE SOLUZIONI DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI ORDINARIE. Siano

(3) Un analogo ragionamento ha fatto già G. ASCOLI applicandolo ad una ricerca di stabilità per la particolare equazione differenziale del II ordine.

$$y'' + A(x)y = 0$$

Cfr. ASCOLI, *Sul comportamento asintotico degli integrali delle equazioni differenziali* (« Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei », [6], 22 (1935), pagg. 234-243).



$p_0(x), p_1(x), \dots, p_{n-1}(x)$  e  $F(x)$   $n+1$  funzioni, reali o complesse, sommabili in ogni segmento finito dell'intervallo  $(0, +\infty)$  e consideriamo l'equazione differenziale lineare di ordine  $n$

$$[5] \quad y^{(n)}(x) + \sum_{s=0}^{s=n-1} p_s(x) y^{(s)}(x) = F(x).$$

Per soluzione, nell'intervallo  $(0, +\infty)$ , di una siffatta equazione intenderemo sempre una funzione che, in ogni segmento finito di detto intervallo, riesca con le sue derivate dei primi  $n-1$  ordini assolutamente continua, e verifichi quasi ovunque, nell'intervallo stesso, l'equazione.

Indicheremo sempre nella nostra trattazione con

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x),$$

$n$  soluzioni particolari fra di loro linearmente indipendenti dell'equazione omogenea

$$[5_0] \quad y^{(n)}(x) + \sum_{s=0}^{s=n-1} p_s(x) y^{(s)}(x) = 0,$$

e con

$$Y(x, \xi)$$

quella soluzione della stessa (5<sub>0</sub>) che verifica nel punto  $\xi$  le seguenti condizioni

$$\left[ \frac{\partial^k Y}{\partial x^k} \right]_{x=\xi} = 0 \quad k = 0, 1, \dots, n-2$$

$$\left[ \frac{\partial^{n-1} Y}{\partial x^{n-1}} \right]_{x=\xi} = 1.$$

È ben noto dagli elementi (\*) che una qualunque soluzione  $y(x)$  della [5], può rappresentarsi nel modo seguente

$$y(x) = \sum_{i=1}^{i=n} c_i y_i(x) + \int_0^x Y(x, \xi) F(\xi) d\xi$$

con le  $c_i$  costanti.

Ciò ricordato e posto noi dimostreremo subito il seguente importante teorema:

II. Siano  $\eta_0(x), \eta_1(x), \dots, \eta_{n-1}(x), f(x)$  funzioni, reali o complesse, sommabili nell'intervallo  $(0, +\infty)$ . Se ogni soluzione  $y_i(x)$  dell'equazione

---

(\*) PICONE, *Esercizi di Analisi Infinitesimale*. (Rondinella, Napoli, 1927), pagg. 482 sgg.; CARATHÉODORY, *Vorlesungen über reelle Funktionen*. (B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1927), pagg. 655-675; PICONE, *Corso di Analisi Superiore*, Anno Accademico 1938-39 XVII (D. U. S. A. Roma, 1939), pagg. 67-89.

omogenea ( $\xi_0$ ) e le sue derivate dei primi  $n-1$  ordini sono limitate nell'intervallo  $(0, +\infty)$ , e se esiste un numero positivo  $L$ , indipendente da  $\xi$ , per il quale riesce

$$[6] \quad |Y^{(k)}(x, \xi)| < L \quad (k=0, 1, \dots, n-1),$$

per  $x > \xi$  <sup>(5)</sup>, allora ogni soluzione dell'equazione

$$[7] \quad y^{(n)}(x) + \sum_{s=0}^{s=n-1} [p_s(x) + \eta_s(x)] y^{(s)}(x) = f(x)$$

è pur essa nell'intervallo  $(0, +\infty)$  limitata con le sue derivate dei primi  $n-1$  ordini.

Per il ricordato teorema elementare si ha invece che per ogni soluzione  $y(x)$  della [7] sussistono le eguaglianze:

$$[8] \quad y^{(k)}(x) = \varphi_k(x) + \sum_{s=0}^{s=n-1} \int_0^x V_{s,k}(x, \xi) y^{(s)}(\xi) d\xi,$$

ovvero

$$[9] \quad \begin{cases} \varphi_k(x) = \sum_{i=1}^{i=n} c_i y_i^{(k)}(x) + \int_0^x Y^{(k)}(x, \xi) f(\xi) d\xi, \\ V_{s,k}(x, \xi) = -\eta_s(\xi) Y^{(k)}(x, \xi). \end{cases}$$

Per le nostre ipotesi valgono le seguenti limitazioni

$$|y_i^{(k)}(x)| < g, \quad |Y^{(k)}(x, \xi)| < L, \quad x > \xi, \quad \begin{matrix} i=1, 2, \dots, n \\ k=0, 1, \dots, n-1 \end{matrix}$$

essendo  $g$  ed  $L$  opportune costanti positive ed inoltre si può sempre determinare un valore  $x_0$  di  $x$  tale che risulti

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} \int_{x_0}^{\infty} \eta_s(\xi) d\xi < \frac{1}{L+1}.$$

Ne seguono, per le funzioni definite dalle [9], le seguenti limitazioni

$$[4]' \quad |\varphi_k(x)| < g \sum_{i=1}^{i=n} |c_i| + L \int_0^{\infty} |f(\xi)| d\xi = M$$

$$[2]' \quad \sum_{s=0}^{s=n-1} \int_0^{x_0} |V_{s,k}(x, \xi)| d\xi < L \sum_{s=0}^{s=n-1} \int_0^{\infty} |\eta_s(\xi)| d\xi = N$$

$$[3]' \quad \sum_{s=0}^{s=n-1} \int_{x_0}^x |V_{s,k}(x, \xi)| d\xi < L \sum_{s=0}^{s=n-1} \int_{x_0}^{\infty} \eta_s(\xi) d\xi < \frac{L}{L+1} = \sigma < 1.$$

<sup>(5)</sup> Poniamo  $Y^{(k)}(x, \xi) = \frac{\partial^k Y}{\partial x^k \partial \xi}$ .

Pertanto per il sistema di equazioni integrali [8], al quale soddisfa una qualsivoglia soluzione  $y(x)$  della [7] e le derivate di questa fino all'ordine  $n-1$ , riescono verificate tutte le ipotesi del teorema I, ciò che ci permette di ritenere dimostrato il teorema.

Mettiamoci ora nell'ipotesi particolare che le funzioni  $p_s(x)$  siano costanti ed abbiano il valore  $p_s$  ( $s = 0, 1, \dots, n-1$ ); allora l'ipotesi che ogni soluzione  $y_i(x)$  dell'equazione omogenea

$$y^{(n)}(x) + \sum_{s=0}^{s=n-1} p_s y^{(s)}(x) = 0$$

è limitata nell'intervallo  $(0, +\infty)$  porta di conseguenza alla limitatezza di tutte le derivate delle soluzioni nello stesso intervallo.

Detta inoltre  $Y(x)$  quella soluzione dell'equazione stessa che nel punto zero è nulla con tutte le sue derivate dei primi  $n-2$  ordini, avendovi la derivata di ordine  $n-1$  il valore uno, si ha

$$Y(x, \xi) = Y(x - \xi)$$

e pertanto il numero  $L$  menzionato nel teorema ottenuto, per il quale sussistono le [6], non è altro che un numero che non è superato nell'intervallo  $(0, +\infty)$  dai moduli dell'integrale  $Y(x)$  e delle sue derivate. Sono dunque soddisfatte le ipotesi del teorema II se si suppongono limitate tutte le soluzioni dell'equazione omogenea (5<sub>0</sub>) a coefficienti costanti e si ha pertanto il teorema:

III. *Se l'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti*

$$y^{(n)}(x) + \sum_{s=0}^{s=n-1} p_s y^{(s)}(x) = 0$$

*ha nell'intervallo  $(0, +\infty)$  tutte le soluzioni stabili, ciò avviene anche per l'equazione:*

$$[10] \quad y^{(n)}(x) + \sum_{s=0}^{s=n-1} [p_s + \eta_s(x)] y^{(s)}(x) = f(x),$$

*non appena le funzioni  $\eta_s(x), f(x)$  siano sommabili nell'intervallo  $(0, +\infty)$  risultando limitate in tale intervallo ogni soluzione dell'equazione e le sue derivate dei primi  $n-1$  ordini.*

Tale teorema perfeziona un risultato indicato recentemente dal CESARI <sup>(6)</sup> in quanto, per concludere la stabilità delle soluzioni della [10] non occorre, secondo esso, ammettere che le funzioni  $\eta_s(x)$  ed  $f(x)$  siano limitate ed infinitesime per  $x \rightarrow +\infty$ .

<sup>(6)</sup> Cfr. C. CESARI, *Proprietà asintotiche delle equazioni differenziali lineari ordinarie*. (« Rend. Seminario Matematico della R. Università di Roma », 1940, ser. IV, vol. 3<sup>o</sup>, pagg. 181-183).

3. Nel caso in cui si sapesse che la [5] ha limitate tutte le soluzioni con le loro derivate dei primi  $n-2$  ordini, anzichè dei primi  $n-1$ , si può dimostrare con procedimento analogo il seguente teorema:

IV. *Nell'ipotesi che la [5<sub>0</sub>] abbia nell'intervallo  $(0, +\infty)$  tutte le soluzioni limitate con le loro derivate dei primi  $n-2$  ordini, allora, comunque si assegnino le funzioni  $f(x)$ ,  $\eta_0(x)$ ,  $\dots$ ,  $\eta_{n-2}(x)$  misurabili nello stesso intervallo e tali che i prodotti*

$$[11] \quad f(x) \cdot e^{\int_0^x p_{n-1}(t) dt}, \quad \eta_s(x) \cdot e^{\int_0^x p_{n-1}(t) dt}, \quad (s=0, 1, \dots, n-2)$$

*riescano sommabili nell'intervallo stesso, le soluzioni della seguente equazione differenziale di ordine  $n$ :*

$$[12] \quad y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x) y^{(n-1)}(x) + \sum_{s=0}^{s=n-2} [p_s(x) + \eta_s(x)] y^{(s)}(x) = f(x),$$

*sono nell'intervallo  $(0, +\infty)$  pur esse limitate con le loro derivate dei primi  $n-2$  ordini.*

Possiamo ancora scrivere il sistema di equazioni integrali [8], ossia

$$[8]' \quad y^{(k)}(x) = \varphi_k(x) + \sum_{s=0}^{s=n-2} \int_0^x V_{s,k}(x, \xi) y^{(s)}(\xi) d\xi, \quad (k=0, 1, \dots, n-2)$$

con le posizioni

$$[9]' \quad \begin{cases} \varphi_k(x) = \sum_{i=1}^{i=n} c_i y_i^{(k)}(x) + \int_0^x Y^{(k)}(x, \xi) f(\xi) d\xi, \\ V_{s,k}(x, \xi) = -\eta_s(\xi) Y^{(k)}(x, \xi). \end{cases}$$

Osserviamo che è inoltre

$$[13] \quad Y(x, \xi) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(\xi) & y_2(\xi) & \dots & y_n(\xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}(\xi) & y_2^{(n-2)}(\xi) & \dots & y_n^{(n-2)}(\xi) \\ y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(\xi) & y_2(\xi) & \dots & y_n(\xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}(\xi) & y_2^{(n-2)}(\xi) & \dots & y_n^{(n-2)}(\xi) \\ y_1^{(n-1)}(\xi) & y_2^{(n-1)}(\xi) & \dots & y_n^{(n-1)}(\xi) \end{vmatrix}} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{W_i(\xi)}{W(\xi)} y_i(x).$$

Scegliendo le  $y_i(x)$  in modo che sia

$$y_i^{(i-1)}(0) = 1, \quad y_i^{(k)}(0) = 0 \quad \text{per } k \neq i-1$$

il denominatore delle  $Y^{(k)}(x, \xi)$  risulta

$$W(\xi) = e^{-\int_0^\xi p_{n-1}(t) dt};$$

per le ipotesi ammesse esistono le costanti positive  $g, L_0, \dots, L_{n-1}$  tali che

$$[14_1] \quad |y_i^{(k)}(x)| < g$$

$$[14_2] \quad \sum_{i=1}^{i=n} |W_i(\xi) y_i^{(k)}(x)| < n! g^n$$

$$[14_3] \quad \int_0^\infty e^{\int_0^\xi p_{n-1}(t) dt} |f(\xi)| d\xi < L_{n-1}; \quad \int_0^\infty e^{\int_0^\xi p_{n-1}(t) dt} |\eta_s(\xi)| d\xi < L_s, \\ (s = 0, 1, \dots, n-2)$$

e si può inoltre trovare un  $x_0$  in modo che per ogni  $\xi > x_0$  si abbia

$$[15] \quad \int_{x_0}^\infty e^{\int_0^\xi p_{n-1}(t) dt} |\eta_s(\xi)| d\xi < \frac{1}{(n+1)! g^n}, \quad (s = 0, 1, \dots, n-2),$$

Per le [14] abbiamo

$$|\varphi_k(x)| \leq \sum_{i=1}^{i=n} |c_i| |y_i^{(k)}(x)| + \int_0^\infty |f(\xi)| |Y^{(k)}(x, \xi)| d\xi < \\ < g \sum_{i=1}^{i=n} |c_i| + n! g^n \int_0^\infty |f(\xi)| e^{\int_0^\xi p_{n-1}(t) dt} d\xi < g \sum_{i=1}^{i=n} |c_i| + L_{n-1} n! g^n = M,$$

ed anche

$$\sum_{s=0}^{s=n-2} \int_0^{x_0} |V_{s,k}(x, \xi)| d\xi = \sum_{s=0}^{s=n-2} \int_0^{x_0} |Y^{(k)}(x, \xi)| |\eta_s(\xi)| d\xi < \\ < n! g^n \sum_{s=0}^{s=n-2} \int_0^\infty e^{\int_0^\xi p_{n-1}(t) dt} |\eta_s(\xi)| d\xi < n! g^n \sum_{s=0}^{s=n-2} L_s = N.$$

Le [14<sub>2</sub>], [15] giustificano la maggiorazione

$$\int_{x_0}^x |V_{s,k}(x, \xi)| d\xi < n! g^n \int_{x_0}^\infty e^{\int_0^\xi p_{n-1}(t) dt} |\eta_s(\xi)| d\xi < n! g^n \frac{1}{(n+1)! g^n} = \frac{1}{n+1}.$$

Risultano dunque verificate le limitazioni

$$[4]'' \quad |\varphi_k(x)| < M$$

$$[2]'' \quad \sum_{s=0}^{n-2} \int_0^{x_0} |V_{s,k}(x, \xi)| d\xi < N \quad (M, N, \sigma \text{ costanti positive}),$$

$$[3]'' \quad \sum_{s=0}^{n-2} \int_{x_0}^x |V_{s,k}(x, \xi)| d\xi < \frac{n-1}{n+1} = \sigma < 1$$

richieste dal teorema I quali condizioni sufficienti perchè  $y(x), y'(x), \dots, y^{(n-2)}(x)$  siano limitate.

4. In conseguenza delle ipotesi sulle funzioni  $f(x), p_{n-1}(x), \eta_{n-2}(x), \dots, \eta_0(x), y_1(x), \dots, y_n(x)$  e della proprietà ora dimostrata per  $y(x)$  e le sue derivate dei primi  $n-2$  ordini, si prova subito che esistono  $n$  costanti  $C_1, C_2, \dots, C_n$  tali che

$$[16] \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (y^{(k)} - C_1 y_1^{(k)} - C_2 y_2^{(k)} - \dots - C_n y_n^{(k)}) = 0, \quad (k=0, 1, \dots, n-2).$$

Infatti, con la particolare scelta delle  $y_i(x)$ , ( $i=1, 2, \dots, n$ ), fatta al n. 3 e tenendo presente la [13], il sistema di equazioni integrali [8]' può essere scritto

$$y^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^{i=n} \left\{ c_i + (-1)^{n+i} \int_0^x e^{\int_0^t p_{n-1}(t) dt} W_i(\xi) \left[ f(\xi) - \sum_{s=0}^{s=n-2} \eta_s(\xi) y^{(s)}(\xi) \right] d\xi \right\} y_i^{(k)}(x);$$

ma, per le limitazioni a cui ci riferiamo, si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{\int_0^t p_{n-1}(t) dt} W_i(\xi) \eta_s(\xi) y^{(s)}(\xi) d\xi = -k_s \quad (s=0, 1, \dots, n-2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{\int_0^t p_{n-1}(t) dt} W_i(\xi) f(\xi) d\xi = k_{n-1},$$

e posto

$$C_i = c_i + (-1)^{n+i} \sum_{h=0}^{h=n-1} k_h,$$

si ottiene la [16]

Derivando ulteriormente la  $(n-1)$ -esima delle [8]' otteniamo

$$y^{(n-1)}(x) = \varphi_{n-1}(x) + \sum_{s=0}^{s=n-2} \int_0^x V_{s,n-1}(x, \xi) y^{(s)}(\xi) d\xi$$

dove per  $\varphi_{n-1}(x), V_{s,n-1}(x, \xi)$  valgono le [9] con  $k=n-1$ .

Poichè il teorema IV non fa nessuna ipotesi sulle derivate di ordine  $n-1$  degli integrali particolari  $y_i(x)$  della [5], in generale potremo solo scrivere

$$y^{(n-1)}(x) = \sum_{i=1}^{i=n} [C_i + \varepsilon_i(x)] y_i^{(n-1)}(x) \quad \begin{array}{l} \text{con le } \varepsilon_i(x) \text{ infinitesime} \\ \text{per } x \rightarrow +\infty. \end{array}$$

Se invece si sa che anche le  $y_i^{(n-1)}(x)$ , sono limitate nell'intervallo  $(0, +\infty)$ , ripetendo il ragionamento precedente risulta che la limitatezza delle derivate della  $y(x)$  e la [16] sussistono anche per  $k=n-1$ .

5. Una particolare applicazione dei risultati precedenti porta ad alcune deduzioni, che additano un interessante metodo di indagine. Si dimostra subito il teorema:

V. *Assegnata comunque una funzione  $\varphi(x)$  continua, derivabile e positiva nell'intervallo  $(0, +\infty)$ , l'equazione*

$$[17] \quad y''(x) - \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} y'(x) + [\varphi^2(x) + \eta(x)] y(x) = f(x)$$

*ha integrali stabili non appena risultano sommabili i quozienti*

$$[18] \quad \frac{\eta(x)}{\varphi(x)} \quad , \quad \frac{f(x)}{\varphi(x)}.$$

Infatti l'equazione

$$y''(x) - \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} y'(x) + \varphi^2(x) y(x) = 0,$$

che ha gli integrali

$$y_1(x) = \cos \int \varphi(x) dx \quad , \quad y_2(x) = \sin \int \varphi(x) dx,$$

equivale alla [5<sub>0</sub>] per  $n=2$ , e la [17] alla [12]; poichè le [18] esprimono le condizioni [11], sono soddisfatte le ipotesi del teorema IV ed è così provato l'asserto.

La trasformazione della [17] in equazione autoaggiunta, mediante le posizioni

$$\vartheta(x) = \frac{1}{\varphi(x)} \quad , \quad A(x) = \varphi(x) + \frac{\eta(x)}{\varphi(x)} \quad , \quad g(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

suggerisce un teorema assai generale per questo tipo di equazioni e cioè



IV. *Date le funzioni continue  $\vartheta(x)$ ,  $A(x)$ ,  $g(x)$ ,  $\vartheta(x) \geq 0$ , la più generale equazione lineare autoaggiunta del secondo ordine*

$$[19] \quad \frac{d}{dx} \left[ \vartheta(x) \frac{dy}{dx} \right] + A(x) y(x) = g(x)$$

*ha integrali stabili se risultano sommabili*

$$A(x) - \frac{1}{\vartheta(x)} \quad \text{e} \quad g(x).$$

Per i risultati del n. 4 si può aggiungere che, se  $\vartheta(x)$  si mantiene non inferiore ad una quantità positiva, sono limitate anche le derivate prime delle soluzioni delle [19].

**Meccanica.** — *Energie potenziali termodinamiche nell'equilibrio di continui quasielastici.* Nota di PIERO LOCATELLI, presentata <sup>(1)</sup> da UMBERTO CISOTTI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Consideriamo un continuo soggetto, sotto l'azione di forze, a deformazione infinitesima, nel quale esista l'energia interna di deformazione, funzione univoca della configurazione, ma per il quale il legame sforzi deformazione non sia il semplice legame lineare omogeneo, che caratterizza gli ordinari corpi elastici, ma sia un legame qualsivoglia; chiamerò *quasi-elastico* un continuo così fatto.

Mi propongo in questa Nota di porre in rilievo che l'*entalpia* e la *seconda energia potenziale termodinamica* costituiscono formazioni integrali  $F$  che risultano stazionarie nell'equilibrio di un generico continuo quasielastico rispetto a variazioni rispettivamente adiabatiche ed isoterme che lascino inalterate le forze esterne, in modo del tutto analogo a quanto avviene in un fluido per variazioni adiabatiche ed isoterme, isopiestiche.

Mostrerò come, se il continuo è un ordinario continuo perfettamente elastico (legame lineare, omogeneo, fra sforzi e deformazioni), la stazionarietà della  $F$  si identifichi con la stazionarietà dell'energia interna affermata dal principio di MENABREA; infine, come da questo principio, nel campo elastico, si trae il teorema di CASTIGLIANO, di tanto vasta portata teorica e pratica, trarrò dalla stazionarietà della  $F$  un teorema che lega le derivate parziali della  $F$ , rispetto ai moduli delle forze esterne, alle componenti, secondo le forze stesse, degli spostamenti dei loro punti di applicazione. Si noti che, così facendo, questo teorema, come già la stazionarietà sopra accennata, risulta stabilito per continui quasielastici, per continui cioè a legami sforzi deformazioni qualsivoglia, purchè sia rispettata la restrizione energetica anzidetta <sup>(2)</sup>.

---

<sup>(1)</sup> Nell'adunanza del 21 marzo 1940-XVIII.

<sup>(2)</sup> Cfr. LORD KELVIN, « Math. a. Phys. Papers. », 1, pag. 291; 3, pag. 386.

## § 1. ENTALPIA DEI SISTEMI CONTINUI.

Sia un continuo qualsivoglia caratterizzato da parametri  $k, k_1, k_2, \dots$ , alcuni dei quali indipendenti, altri tra loro vincolati, ossia tra loro legati da determinate relazioni traducenti i vincoli.

L'equilibrio di un così fatto sistema è governato dal principio dei lavori virtuali nella sua forma più generale: se il sistema è in equilibrio, è nullo il lavoro complessivo (complessivo anche per quanto riguarda le varie forme di esso: termico, elettrico, chimico, meccanico ecc.) che si compie per qualsiasi variazione infinitesima, reversibile, compatibile coi vincoli, dei parametri  $k, k_1, k_2, \dots$ , e, precisamente per qualsiasi variazione virtuale di detti parametri è:

$$[1] \quad \delta \mathcal{E} - \delta^* \varrho - \delta^* q = 0$$

essendo  $\mathcal{E}$  l'energia interna del sistema,  $\delta^* \varrho$  il lavoro elementare fatto dall'esterno,  $\delta^* q$  il calore elementare fornito al sistema. Per l'ipotesi fatta la variazione di  $\mathcal{E}$  è un differenziale esatto; non altrettanto possiamo dire in generale di  $\delta^* \varrho$  e di  $\delta^* q$ ; l'asterisco ai  $\delta$  sta appunto a ricordarci che  $\delta^* \varrho$  e  $\delta^* q$ , a priori, sono semplicemente quantità infinitesime.

Fra le variazioni virtuali dei parametri  $k, k_1, k_2, \dots$  consideriamo ora le adiabatiche, consideriamo cioè quelle che rispettano l'ulteriore vincolo:

$$\delta^* q = 0.$$

La [1] diviene allora:

$$[2] \quad \delta \mathcal{E} - \delta^* \varrho = 0$$

che se, in particolare, il lavoro fatto dall'esterno può essere considerato fatto a spese di una energia potenziale esterna  $\varpi$ , la [2] assume l'aspetto:

$$[3] \quad \delta (\mathcal{E} + \varpi) = 0.$$

La [3] ci afferma la stazionarietà dell'energia totale rispetto ad una variazione reversibile, adiabatica, compatibile coi vincoli, dei parametri  $k, k_1, k_2, \dots$ .

Se il lavoro esterno è dovuto solo a forze e queste si mantengono costanti durante la variazione, chiamando  $\delta' u^i$  le componenti degli spostamenti secondo le forze stesse  $Q_i$  dei punti di applicazione di queste, la [2] si potrà scrivere:

$$[4] \quad \delta' \mathcal{E} - \sum Q_i \delta' u^i = 0.$$

Tenendo presente che, se il sistema è in equilibrio, si ha <sup>(1)</sup>:

$$\int_V p_{ik} \delta \xi^{ik} dV + \Sigma Q_i \delta u^i = 0$$

essendo con le abituali notazioni:  $V$  il volume del continuo,  $p_{ik}$  il tensore degli sforzi interni,  $\xi^{ik}$  il tensore di deformazione, infinitesimo, legato allo spostamento  $s^i$  dalla:

$$\xi^{ik} = \frac{1}{2} (s^{i/k} + s^{k/i}),$$

la [4] si può scrivere:

$$[5] \quad \delta' \mathcal{E} + \int_V p_{ik} \delta' \xi^{ik} dV = 0.$$

Ora si ha pure:

$$\begin{aligned} \int_V p_{ik} \delta' \xi^{ik} dV &= \delta' \int_V p_{ik} \xi^{ik} dV - \int_V \xi^{ik} \delta' p_{ik} dV \\ \int_V \xi^{ik} \delta' p_{ik} dV &= \int_V s^{i/k} \delta' p_{ik} dV = \int_V (s^i \delta' p_{ik})^{/k} dV - \int_V s^i \delta' p_{ik}^{/k} dV. \end{aligned}$$

Ricordando infine che, essendo costanti le forze esterne, deve essere:

$$\delta' Q_i = 0$$

e conformemente a ciò:

$$[6] \quad \delta' p_{ik} = \delta' p_{ki} \quad \delta' p_{ik}^{/k} = 0 \text{ nel volume } V \quad \delta' p_{ik} n^k = 0 \text{ al contorno } \sigma \text{ }^{(2)},$$

si ha:

$$\int_V \xi^{ik} \delta' p_{ik} dV = - \int_{\sigma} s^i \delta' p_{ik} n^k d\sigma - \int_V s^i \delta' p_{ik}^{/k} dV = 0$$

e quindi:

$$[7] \quad \int_V p_{ik} \delta' \xi^{ik} dV = \delta' \int_V p_{ik} \xi^{ik} dV.$$

<sup>(1)</sup> Conforme all'uso gli indici in basso indicano le componenti covarianti, quelli in alto le controvarianti; una lineetta fra gli indici è simbolo di derivazione tensoriale; sono sottintesi i segni di sommatoria quando questa è una semplice saturazione rispetto agli indici spaziali  $i, k = 1, 2, 3$ .

<sup>(2)</sup>  $n^k$  coseni direttori della normale al contorno volta verso l'interno.

La [5] in virtù della [7] diviene:

$$\delta' \mathcal{E} + \delta' \int_V p_{ik} \xi^{ik} dV = 0.$$

ossia:

$$[8] \quad \delta' \left( \mathcal{E} + \int_V p_{ik} \xi^{ik} dV \right) = 0.$$

La [8], valevole per un qualsivoglia continuo quasielastico, afferma la stazionarietà della:

$$[9] \quad \mathcal{H} = \mathcal{E} + \int_V p_{ik} \xi^{ik} dV$$

rispetto ad una variazione adiabatica che lasci inalterate le forze esterne.

Se ci si riferisce ad un fluido nel quale le forze esterne si riducano alla sola pressione esterna  $p$ , la [9] assume il noto aspetto:

$$\mathcal{H} = \mathcal{E} + pV$$

$\mathcal{H}$  è l'entalpia.

## § 2. SECONDA ENERGIA TERMODINAMICA DEI SISTEMI CONTINUI.

In modo del tutto analogo, se, in luogo di variazioni adiabatiche, consideriamo variazioni isoterme (nella statica elastica è questo il caso cui ordinariamente ci si riferisce), e poniamo ancora la restrizione che le forze esterne restino immutate, otteniamo la stazionarietà della:

$$[10] \quad \mathcal{F} = \mathcal{A} + \int_V p_{ik} \xi^{ik} dV$$

essendo:

$$\mathcal{A} = \mathcal{E} - \tau S$$

nella quale  $\mathcal{A}$  è la *prima energia potenziale termodinamica o affinità*:  $\tau$  è la temperatura assoluta,  $S$  è l'entropia del sistema.

Se si riferisce ad un fluido si ha la nota:

$$\mathcal{F} = \mathcal{A} + pV$$

$\mathcal{F}$  è la *seconda energia potenziale termodinamica* <sup>(1)</sup>.

---

(<sup>1</sup>) Cfr. W. VOIGT, *Termodynamik*, I vol. Lipsia, 1903, 128, 129, 130.

Concludendo, l'equilibrio di un continuo soddisfa la seguente equazione simbolica:

$$\delta' F = \delta' \int_V (\varphi + p_{ik} \varepsilon^{ik}) dV = 0$$

dove  $\delta'$  è simbolo di variazione virtuale equilibrata, ossia rispondente alle [6];  $\varphi$  è la densità di energia interna, se la variazione è adiabatica; è l'affinità o prima energia potenziale termodinamica per unità di volume se la variazione è isoterma.

Ma in ogni caso dovendo la  $\varphi$  essere la densità di energia di deformazione, si ha:

$$\varphi = - \int_V p_{ik} \delta \varepsilon^{ik}$$

quindi la stazionarietà della  $F$  conduce alla:

$$\delta' \int_V \left( - \int p_{ik} d\varepsilon^{ik} + p_{ik} \varepsilon^{ik} \right) dV = 0$$

dalla quale:

$$[11] \quad \delta' \int_V \varepsilon^{ik} dp_{ik} dV = 0.$$

La [11] afferma la stazionarietà dell'ente:

$$F = \int_V \varepsilon^{ik} dp_{ik} dV$$

stazionarietà che è stata recentemente per via diretta messa in luce da FINZI (<sup>1</sup>). La  $F$  di FINZI non è altro che o l'entalpia, o la seconda energia potenziale termodinamica nel caso di un continuo qualsivoglia.

Si vede subito che nel caso elastico classico (legame sforzi-deformazioni lineare omogeneo) la  $F$  coincide, a meno del segno, con la energia interna e che l'affermare la stazionarietà della  $F$  equivale ad affermare la stazionarietà della energia interna: si ritrova cioè il principio di MENABREA.

Si ha infatti:

$$\delta' F = \delta' \int_V \varepsilon^{ik} dp_{ik} dV = \delta' \int_V c^{ikrs} p_{rs} dp_{ik} dV - \delta' \int_V p_{rs} d\varepsilon^{rs} dV = - \delta' \mathcal{E} = 0$$

essendo  $c^{ikrs} = c^{rsik}$  il tensore elastico.

(<sup>1</sup>) Cfr. B. FINZI, questi « Rendiconti ».

§ 3. UN TEOREMA SULLE DERIVATE DELLA  $F$ .

In possesso ora di un teorema di stazionarietà, analogo al teorema di MENABREA, ma valevole non solo per continui elastici, ma anche per continui quasielastici, possiamo con tutta facilità ottenere un teorema analogo al teorema di CASTIGLIANO, ma valevole esso pure per continui quasielastici.

Parafrasando una ben nota dimostrazione del teorema di CASTIGLIANO, diremo: consideriamo un sistema quasielastico  $A$ , dotato di vincoli almeno sufficienti a caratterizzarne, a meno della deformazione, la posizione nello spazio. Si supponga di aggiungere al sistema così vincolato un'asta sottile  $B$  dello stesso materiale, lunga  $L$ , di sezione uniforme, attaccata ai suoi estremi mediante snodi perfetti al corpo  $A$  e ad un punto fisso.

Si carichi ora il corpo  $A$  con forze. La  $F$  del sistema  $A + B$  è stazionaria rispetto ad una variazione equilibrata dello sforzo interno  $Q$  esercitato dall'asta: avremo quindi:

$$[12] \quad \frac{\partial}{\partial Q} (F_A + F_B) = \frac{\partial F_A}{\partial Q} + \frac{\partial}{\partial Q} \int_0^L \epsilon dQ dL = 0$$

essendo  $\epsilon$  l'allungamento unitario dell'asta. Per la costanza dello sforzo lungo l'asta, e quindi, data la uniformità dell'asta, della  $\epsilon$ , la [12] fornisce:

$$[13] \quad \frac{\partial F_A}{\partial Q} = -\epsilon L = -u.$$

Questa, quando si tenga presente che conforme all'uso per i continui tridimensionali, ho fatto positivi allungamenti e pressioni, ci dice che la derivata della  $F$  rispetto al modulo della forza  $Q$  eguaglia, a meno del segno, lo spostamento  $u$  secondo la  $Q$  del punto d'applicazione di questa.

Alla stessa conclusione possiamo anche giungere nel modo seguente: consideriamo un continuo quasielastico caratterizzato da un volume  $V$  limitato da una superficie  $\sigma$ . Agiscano le forze, distribuite in superficie,  $f_i$ . Indico al solito con  $p_{ik}$  il tensore degli sforzi interni; ad una variazione equilibrata delle forze di superficie terrò dietro una variazione degli sforzi interni e precisamente avremo:

$$\delta p_{rs} = \delta p_{sr} \quad \delta p_{rs}/r = 0 \text{ nel volume} \quad \delta p_{rs} n^r = \delta f_s \text{ sul contorno}$$



essendo  $n^r$  i coseni direttori della normale al contorno volta verso l'interno. Se  $\xi^{rs}$  è il tensore di deformazione, infinitesimo, nella configurazione d'equilibrio sotto l'azione delle  $f_i$  avremo:

$$\delta F = \int_V \xi^{rs} \delta p_{rs} dV = \int_V (s^r dp_{rs})/s dV - \int_V s^r \delta p_{rs}/s dV = - \int_{\sigma} s^r \delta p_{rs} n^s d\sigma = - \int_{\sigma} s^r \delta f_r d\sigma$$

essendo  $s^r$  il vettore spostamento.

Dunque  $\delta F$  è uguale, a meno del segno, al lavoro fatto dalla variazione delle forze esterne per lo spostamento reale, che ha condotto il sistema dalla posizione di riposo alla posizione di equilibrio sotto l'azione delle forze di superficie  $f_i$ . Se le forze anziché distribuite sono concentrate, potremo analogamente scrivere:

$$\delta F = \int_V \xi^{rs} \delta p_{rs} dV = - \sum u_i \delta Q^i$$

essendo  $\delta Q^i$  la variazione di modulo delle forze e  $u_i$  le componenti secondo le forze degli spostamenti reali dei loro punti d'applicazione.

D'altra parte:

$$\delta F = \sum \frac{\partial F}{\partial Q_i} \delta Q^i$$

quindi:

$$\frac{\partial F}{\partial Q_i} = -u_i \quad \text{c. d. d.}$$

Concludendo potremo quindi dire: *In un sistema quasielastico, in un sistema cioè nel quale il legame sforzi deformazioni sia qualunque, ma tale che esista per esso l'energia interna di deformazione funzione univoca della configurazione, in condizioni di equilibrio è stazionaria rispetto ad una variazione che lasci inalterate le forze esterne, una  $F$  che si identifica rispettivamente con la entalpia o con la seconda energia potenziale termodinamica secondo che la variazione è adiabatica o isoterma, rispetto cioè ad una variazione adiabatica o isoterma che rispetti le [6].*

Dalla stazionarietà della  $F$  si deduce che la derivata parziale della  $F$  stessa rispetto al modulo di una forza eguaglia, a meno del segno, la componente secondo la forza stessa dello spostamento del suo punto di applicazione.

Poichè nel caso elastico ordinario, la  $F$  uguaglia l'energia elastica cambiata di segno, i due enunciati sopra esposti si identificano in tal caso coi teoremi di MENABREA e di CASTIGLIANO.

**Meccanica.** --- *Applicazione di un nuovo metodo di M. Picone all'integrazione delle equazioni dell'elasticità in un parallelepipedo rettangolo* <sup>(1)</sup>. Nota di CARLO TOLOTTI, presentata <sup>(2)</sup> da MAURO PICONE, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. INTRODUZIONE. — In una recente conferenza <sup>(3)</sup>, tenuta a Cracovia, Varsavia, Amburgo, Giessen e Milano, il PICONE ha illustrato come l'uso della trasformata di LAPLACE delle soluzioni, ad intervallo d'integrazione finito, costituisca un metodo d'indagine delle equazioni lineari a derivate parziali di alto interesse teorico, additando, tra l'altro, come esso si possa prestare anche per l'effettivo calcolo della soluzione. Sotto tale aspetto, anzi, esperienze <sup>(4)</sup> già da tempo fatte eseguire dal PICONE nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo, da lui diretto, avevano portato a riconoscere la grande potenza approssimatrice del metodo stesso.

Nella presente Nota io ho considerato l'applicazione del detto metodo all'integrazione delle equazioni dell'elasticità in un parallelepipedo rettangolo soggetto a date forze sulle due basi e con assegnati, su ognuna delle facce laterali, indifferentemente o gli spostamenti o le forze agenti.

Uno studio delle equazioni dell'equilibrio elastico di un parallelepipedo rettangolo (sebbene non in forma altrettanto generale) era già stato eseguito dal PICONE come applicazione illustrativa di un altro suo metodo di integrazione <sup>(5)</sup>. Consigliato dal PICONE stesso, io ho tuttavia voluto esaminare la questione anche nel nuovo indirizzo citato, sia per

---

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

<sup>(2)</sup> Nell'adunanza del 21 marzo 1940-XVIII.

<sup>(3)</sup> M. PICONE, *Nuovi metodi d'indagine per la teoria delle equazioni lineari a derivate parziali*. « Rend. Semin. Mat. e Fisico di Milano », vol. XIII, 1939.

<sup>(4)</sup> Cfr. per qualche notizia in proposito: *L'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo nel quadriennio 1933-37*, edito dal Consiglio Naz. Ricerche, pagg. 57-58, ricerca n. 8.

<sup>(5)</sup> M. PICONE, *Vedute unitarie sul calcolo delle soluzioni delle equazioni alle derivate parziali della fisica-matematica*. « Atti I Convegno Mat. Applicata », Roma, giugno 1936, pagg. 24-32.

la maggior potenza approssimatrice del nuovo metodo e sia per la notevole eleganza e semplicità di risultati che se ne consegue.

Consiste il procedimento seguito nell'introdurre come nuove incognite le trasformate doppie di FOURIER degli spostamenti e degli sforzi in ogni sezione parallela alle basi del parallelepipedo. Una volta determinate dette trasformate, si risale alle espressioni effettive delle funzioni richieste mediante i classici sviluppi in serie doppie di FOURIER.

Però (ed è questa la difficoltà sostanziale dipendente dal non esserci qui la periodicità come nei casi soliti di applicazione degli sviluppi in serie di FOURIER all'integrazione delle equazioni differenziali) le equazioni differenziali ordinarie e relative condizioni ai limiti, che si deducono per le trasformate di FOURIER degli spostamenti dall'originario problema al contorno, contengono come funzioni da supporre note gli spostamenti e gli sforzi agenti sulle facce laterali del parallelepipedo, mentre per ognuna di tali facce sono effettivamente noti, come dati al contorno, solamente o gli uni o gli altri. Ebbene l'idea, in proposito, del metodo del PICONE è che la determinazione di quelli di detti spostamenti o sforzi, che non sono noti, possa essere richiesta alle condizioni esprimenti che le trasformate degli spostamenti calcolate dalle dette equazioni risultino, quando si considerino anche per valori complessi dei parametri  $\xi, \eta$  della trasformazione, funzioni intere di  $\xi, \eta$  come richiede la loro definizione stessa (che per  $\xi, \eta$  complessi diventa quella di una generica trasformata doppia di LAPLACE ad intervalli di integrazione finiti).

Ritengo utile segnalare che, nell'applicazione di detta idea al caso considerato, io sono riuscito a riconoscere che le condizioni, a cui porta quella imposizione, non sono altro che il teorema di reciprocità di BETTI applicato allo spostamento incognito effettivo e ad una successione infinita di convenienti spostamenti fittizi corrispondenti a forze di massa nulle in tutto il parallelepipedo e a forze superficiali nulle sulle due basi. Potendo tali spostamenti fittizi corrispondere ad un'arbitraria (purchè equilibrata) distribuzione di forze sulle facce laterali del parallelepipedo, la funzione dell'idea del PICONE si rivela, nel nostro caso, esser quella di un criterio per la scelta di una successione di detti spostamenti fittizi in guisa che il corrispondente sistema di equazioni integrali FISCHER-RIESZ, a cui porta l'applicazione per ognuno di essi del teorema di reciprocità di BETTI, sia atto alla determinazione di quelli degli effettivi spostamenti o sforzi sulle facce laterali del parallelepipedo, che non sono noti come dati al contorno del problema.

Certo non si può affermare con tutta sicurezza, dato che ne manca l'effettiva dimostrazione, che la successione di equazioni integrali FISCHER-RIESZ scelta con tale criterio sia sufficiente a determinare le funzioni cercate (a meno di un eventuale spostamento rigido). Tuttavia si hanno ragioni di ciò presumere, sia per effettiva verifica fattane in qualche pro-

blema particolare, e sia per l'intuizione che porta a ritenere esaurito tutto il contenuto delle originarie equazioni e condizioni al contorno nelle equazioni e condizioni trasformate quando a queste si aggiunga la condizione che la relativa soluzione sia funzione intera dei parametri  $\xi, \eta$  della trasformazione.

Questo è quanto era necessario dire nella presente introduzione per una chiara comprensione del lavoro. Avverto qui infine il lettore che in esso egli troverà un'esposizione solo per linee essenziali. Un'esposizione dettagliata e completa comparirà in una Memoria di prossima pubblicazione.

2. POSIZIONE DEL PROBLEMA. — Riferiremo il parallelepipedo rettangolo considerato ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali  $(x, y, z)$  avente come assi gli assi del parallelepipedo, cosicchè, se  $2a, 2b, 2c$  sono le relative dimensioni, esso resta definito dalle limitazioni  $|x| \leq a$ ,  $|y| \leq b$ ,  $|z| \leq c$ .

Diremo  $u, v, w$  le componenti dello spostamento del generico punto  $(x, y, z)$ ;  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  le sei componenti dello sforzo in detto generico punto;  $X, Y, Z$  le componenti della forza di massa agente sull'unità di volume;  $\lambda, \mu$  le costanti di LAMÉ del materiale elastico, omogeneo ed isotropo, costituente il parallelepipedo.

Con tali notazioni le equazioni indefinite dell'equilibrio, che devono valere in tutto il parallelepipedo, si scrivono

$$[1] \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0, \end{array} \right.$$

con

$$[2] \quad \left\{ \begin{array}{ll} \sigma_x = \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} & , \quad \sigma_y = \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \sigma_z = \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} & , \quad \tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ \tau_{xz} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & , \quad \tau_{yz} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \end{array} \right.$$

e

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

In quanto alle condizioni al contorno, supporremo che sulle facce  $z = \pm c$  gli sforzi  $\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z$  si riducano a funzioni assegnate. Per le

facce  $x = \pm a$ ,  $y = \pm b$  lasceremo invece imprecisato (restando la nostra trattazione ugualmente valida) se siano assegnati gli spostamenti o le forze agenti; in corrispondenza si intenderanno noti su dette facce i valori assunti da  $u, v, w$  o da  $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$  per le facce  $x = \pm a$  e da  $\tau_{xy}, \sigma_y, \tau_{yz}$  per le facce  $y = \pm b$ .

Il procedimento che seguiremo per l'integrazione di detto sistema di equazioni e condizioni è, come accennavamo al n. 1, di introdurre come nuove incognite al posto delle funzioni  $u, v, w, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  le relative trasformate di FOURIER  $u^*, v^*, \dots, \tau_{yz}^*$  definite da

$$u^*(\xi, \eta, z) = \int_{-a}^a \int_{-b}^b u(x, y, z) e^{-i(\xi x + \eta y)} dx dy$$

e formule analoghe ottenute mutando  $u$  in  $v, w, \dots, \tau_{yz}$ .

Daremo ai nn. 3, 4 il modo di calcolare dette trasformate di FOURIER. Osserviamo intanto che, proponendoci di cercare le incognite  $u, v, \dots, \tau_{yz}$  tra le funzioni che posseggono in tutto il parallelepipedo derivate finite e continue fino all'ordine massimo interveniente nelle [1], [2], una tale soluzione, ove esista, non può esser data che da

$$[3] \quad u(x, y, z) = \frac{1}{4ab} \sum_{h,k}^{+\infty} u^*\left(\frac{h\pi}{a}, \frac{k\pi}{b}, z\right) e^{i\pi\left(\frac{hx}{a} + \frac{ky}{b}\right)}$$

e serie analoghe per  $v, w, \dots, \tau_{yz}$ , colle  $u^*, v^*, \dots, \tau_{yz}^*$  calcolate ai numeri 3 e 4.

Le serie doppie (3) ed analoghe per  $v, w, \dots, \tau_{yz}$ , nell'ipotesi dell'esistenza di una soluzione del problema nella classe considerata di funzioni, convergono uniformemente in ogni campo chiuso per cui sia  $|x| < a$ ,  $|y| < b$ ,  $|z| < c$ . Esse non sono in generale atte a fornire i valori delle funzioni generatrici corrispondenti sulle facce laterali del parallelepipedo  $x = \pm a$  e  $y = \pm b$ . Ciò tuttavia non interessa dato che la ricerca di detti valori necessita che venga già fatta in precedenza (per quelli che non sono già noti) onde poter addivenire al calcolo delle  $u^*, v^*, \dots, \tau_{yz}^*$  come vedremo ai nn. 3, 4.

3. CALCOLO DELLE TRASFORMATE DI FOURIER DEGLI SPOSTAMENTI E DEGLI SFORZI. — Ci converrà introdurre delle notazioni apposite per le funzioni (alcune note ed altre incognite) a cui si riducono  $u, v, \dots, \tau_{yz}$  sulle facce del parallelepipedo. Precisamente porremo

$$U_1(y, z) = u(a, y, z) \quad , \quad U_2(y, z) = u(-a, y, z) \quad , \quad U_3(x, z) = u(x, b, z), \\ U_4(x, z) = u(x, -b, z) \quad , \quad U_5(x, y) = u(x, y, c) \quad , \quad U_6(x, y) = u(x, y, -c),$$

ed analoghe mutando  $u$  in  $v, w, \sigma_x, \dots, \tau_{yz}$  e  $U_k$  in  $V_k, W_k, S_x^{(k)}, \dots, T_{yz}^{(k)}$  ( $k = 1, 2, \dots, 6$ ).

Apporremo a dette funzioni l'asterisco per indicarne la relativa trasformata di FOURIER rispetto ad  $x$  o  $y$  oppure rispetto ad  $x$  e  $y$ , a seconda che dipendono da  $x$  o da  $y$  o da  $x$  e  $y$ ; così, ad es., sarà

$$U_1^*(\eta, z) = \int_{-b}^b U_1(y, z) e^{-i\eta y} dy, \quad U_3^*(\xi, z) = \int_{-a}^a U_3(x, z) e^{-i\xi x} dx,$$

$$U_5^*(\xi, \eta) = \int_{-a}^a \int_{-b}^b U_5(x, y) e^{-i(\xi x + \eta y)} dx dy.$$

Con tali notazioni si ha, moltiplicando ambo i membri delle [2] per  $e^{-i(\xi x + \eta y)}$  ed integrando a tutto il rettangolo  $-a \leq x \leq a$ ,  $-b \leq y \leq b$ ,

$$\begin{aligned} \sigma_x^* &= (\lambda + 2\mu) (i\xi u^* + e^{-i\xi a} U_1^* - e^{i\xi a} U_2^*) + \\ &\quad + \lambda (i\eta v^* + e^{-i\eta b} V_3^* - e^{i\eta b} V_4^*) + \lambda \frac{\partial w^*}{\partial z}, \\ \sigma_y^* &= \lambda (i\xi u^* + e^{-i\xi a} U_1^* - e^{i\xi a} U_2^*) + \\ &\quad + (\lambda + 2\mu) (i\eta v^* + e^{-i\eta b} V_3^* - e^{i\eta b} V_4^*) + \lambda \frac{\partial w^*}{\partial z}, \\ \sigma_z^* &= \lambda (i\xi u^* + e^{-i\xi a} U_1^* - e^{i\xi a} U_2^*) + \\ &\quad + \lambda (i\eta v^* + e^{-i\eta b} V_3^* - e^{i\eta b} V_4^*) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w^*}{\partial z}, \\ \tau_{xy}^* &= \mu (i\eta u^* + e^{-i\eta b} U_3^* - e^{i\eta b} U_4^* + i\xi v^* + e^{-i\xi a} V_1^* - e^{i\xi a} V_2^*), \\ \tau_{xz}^* &= \mu \left( \frac{\partial u^*}{\partial z} + i\xi w^* + e^{-i\xi a} W_1^* - e^{i\xi a} W_2^* \right), \\ \tau_{yz}^* &= \mu \left( \frac{\partial v^*}{\partial z} + i\eta w^* + e^{-i\eta b} W_3^* - e^{i\eta b} W_4^* \right), \end{aligned}$$

le quali riconducono il calcolo delle trasformate di FOURIER degli sforzi a quello delle trasformate degli spostamenti  $u^*$ ,  $v^*$ ,  $w^*$  e  $U_1^*$ ,  $U_2^*$ , ...,  $W_4^*$  (quest'ultime possono anche essere tutte o in parte note).

Per il calcolo di  $u^*$ ,  $v^*$ ,  $w^*$  si osservi che, analogamente, moltiplicando le [1] per  $e^{-i(\xi x + \eta y)}$  ed integrando a tutto il rettangolo  $-a \leq x \leq a$ ,  $-b \leq y \leq b$ , si ha, tenendo presente le espressioni ora scritte di  $\sigma_x^*$ ,  $\sigma_y^*$ , ...,  $\tau_{yz}^*$ ,

$$[4] \quad \begin{cases} \mu \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2} + (\lambda + \mu) i\xi \frac{\partial w^*}{\partial z} - [(\lambda + \mu) \xi^2 + \mu \tau^2] u^* - (\lambda + \mu) \xi \eta v^* + F_1 = 0, \\ \mu \frac{\partial^2 v^*}{\partial z^2} + (\lambda + \mu) i\eta \frac{\partial w^*}{\partial z} - (\lambda + \mu) \xi \eta u^* - [(\lambda + \mu) \eta^2 + \mu \tau^2] v^* + F_2 = 0, \\ (\lambda + 2\mu) i \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^2} - (\lambda + \mu) \cdot \left( \xi \frac{\partial u^*}{\partial z} + \eta \frac{\partial v^*}{\partial z} \right) - \mu i \tau^2 w^* + F_3 = 0, \end{cases}$$



$$\text{con } \tau = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \quad \text{e}$$

$$\begin{aligned} F_1 &= X^* + e^{-i\xi a} \left[ S_x^{(1)*} + (\lambda + 2\mu) i\xi U_1^* + \mu i\eta V_1^* + \mu \frac{\partial W_1^*}{\partial z} \right] - \\ &\quad - e^{i\xi a} \left[ S_x^{(2)*} + (\lambda + 2\mu) i\xi U_2^* + \mu i\eta V_2^* + \mu \frac{\partial W_2^*}{\partial z} \right] + \\ &\quad + e^{-i\eta b} [T_{xy}^{(8)*} + \mu i\eta U_3^* + \lambda i\xi V_3^*] - e^{i\eta b} [T_{xy}^{(4)*} + \mu i\eta U_4^* + \lambda i\xi V_4^*], \\ F_2 &= Y^* + e^{-i\xi a} [T_{xy}^{(1)*} + \lambda i\eta U_1^* + \mu i\xi V_1^*] - e^{i\xi a} [T_{xy}^{(2)*} + \lambda i\eta U_2^* + \mu i\xi V_2^*] + \\ &\quad + e^{-i\eta b} [S_y^{(3)*} + \mu i\xi U_3^* + (\lambda + 2\mu) i\eta V_3^* + \mu \frac{\partial W_3^*}{\partial z}] - \\ &\quad - e^{i\eta b} [S_y^{(4)*} + \mu i\xi U_4^* + (\lambda + 2\mu) i\eta V_4^* + \mu \frac{\partial W_4^*}{\partial z}], \\ F_3 &= iZ^* + e^{-i\xi a} \left[ i T_{xz}^{(1)*} + \lambda i \frac{\partial U_1^*}{\partial z} - \mu \xi W_1^* \right] - e^{i\xi a} \left[ i T_{xz}^{(2)*} + \lambda i \frac{\partial U_2^*}{\partial z} - \mu \xi W_2^* \right] + \\ &\quad + e^{-i\eta b} \left[ i T_{yz}^{(3)*} + \lambda i \frac{\partial V_3^*}{\partial z} - \mu \eta W_3^* \right] - e^{i\eta b} \left[ i T_{yz}^{(4)*} + \lambda i \frac{\partial V_4^*}{\partial z} - \mu \eta W_4^* \right]. \end{aligned}$$

Inoltre deve essere per  $z = \pm c$

$$[5] \quad \left\{ \begin{aligned} \mu \left( \frac{\partial u^*}{\partial z} + i\xi w^* \right) &= \begin{cases} f_1 & \text{per } z = c \\ f_2 & \text{per } z = -c, \end{cases} \\ \mu \left( \frac{\partial v^*}{\partial z} + i\eta w^* \right) &= \begin{cases} f_3 & \text{per } z = c \\ f_4 & \text{per } z = -c, \end{cases} \\ (\lambda + 2\mu) i \frac{\partial w^*}{\partial z} - \lambda (\xi u^* + \eta v^*) &= \begin{cases} f_5 & \text{per } z = c \\ f_6 & \text{per } z = -c \end{cases} \end{aligned} \right.$$

ove si è posto.

$$f_1 = T_{xz}^{(5)*} - \mu [e^{-i\xi a} W_1^* - e^{i\xi a} W_2^*]_{z=c},$$

$$f_3 = T_{yz}^{(5)*} - \mu [e^{-i\eta b} W_3^* - e^{i\eta b} W_4^*]_{z=c},$$

$$f_5 = iS_z^{(5)*} - i\lambda [e^{-i\xi a} U_1^* - e^{i\xi a} U_2^* + e^{-i\eta b} V_3^* - e^{i\eta b} V_4^*]_{z=c},$$

$f_2, f_4, f_6$  ottenendosi da esse mutando  $c$  in  $-c$  e l'indice 5 in 6, e dove (è bene osservarlo esplicitamente)  $T_{xz}^{(k)*}, T_{yz}^{(k)*}, S_z^{(k)*}$  ( $k = 5, 6$ ) sono funzioni note essendo per ipotesi assegnate le forze agenti sulle facce  $z = \pm c$  del parallelepipedo.

Le equazioni [4] costituiscono un sistema di tre equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti nelle incognite  $u^*, v^*, w^*$  rispetto alla variabile  $z$ . Esse, assieme alle condizioni ai limiti [5], permettono di ricavare  $u^*, v^*, w^*$  per mezzo di  $F_l$  ( $l = 1, 2, 3$ ) ed  $f_r$  ( $r = 1, 2, \dots, 6$ ).



Posto  $u_1 = u^*$ ,  $u_2 = v^*$ ,  $u_3 = i w^*$ , le espressioni finali a cui così si perviene sono ( $k = 1, 2, 3$ ).

$$[6] \quad u_k(\xi, \eta, z) = \sum_{l=1}^3 \int_{-c}^c G_{kl}(\xi, \eta, z, \zeta) F_l(\xi, \eta, \zeta) d\zeta + \sum_{r=1}^6 g_{kr}(\xi, \eta, z) f_r(\xi, \eta),$$

colle  $g_{kr}$  e  $G_{kl}$  che ora definiremo.

Precisamente, introdotte le notazioni, per  $n = 1, 2$ .

$$p_0(\tau, z) = \frac{\cosh \tau(z+c)}{\sinh(2c\tau)},$$

$$p_n(\tau, z) = \frac{\sinh(2c\tau)}{\sinh^2(2c\tau) - (2c\tau)^2} \left[ \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \cosh \tau(z+c) + (-1)^n \tau(z-c) \sinh \tau(z+c) \right] + \\ + \frac{2c\tau}{\sinh^2(2c\tau) - (2c\tau)^2} \left[ (-1)^{n+1} \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \cosh \tau(z-c) - \tau(z+c) \sinh \tau(z-c) \right],$$

$$p_{n+2}(\tau, z) = \frac{\sinh(2c\tau)}{\sinh^2(2c\tau) - (2c\tau)^2} \left[ \frac{\mu}{\lambda + \mu} \sinh \tau(z+c) + (-1)^{n+1} \tau(z-c) \cosh \tau(z+c) \right] + \\ + \frac{2c\tau}{\sinh^2(2c\tau) - (2c\tau)^2} \left[ (-1)^{n+1} \frac{\mu}{\lambda + \mu} \sinh \tau(z-c) + \tau(z+c) \cosh \tau(z-c) \right],$$

le espressioni delle  $g_{kr}$  da sostituirsi in [6] sono

$$g_{11} = \frac{1}{\mu \tau^3} \left( \eta^2 p_0 + \frac{1}{2} \xi^2 p_2 \right), \quad g_{13} = g_{21} = -\frac{\xi \eta}{\mu \tau^3} \left( p_0 - \frac{1}{2} p_2 \right), \\ g_{15} = \frac{\xi}{\eta} g_{25} = -\frac{\xi}{2\mu \tau^2} p_3, \quad g_{23} = \frac{1}{\mu \tau^3} \left( \xi^2 p_0 + \frac{1}{2} \eta^2 p_2 \right), \\ g_{31} = \frac{\xi}{\eta} g_{33} = -\frac{\xi}{2\mu \tau^2} p_4, \quad g_{35} = \frac{1}{2\mu \tau} p_4,$$

le  $g_{k2}, g_{k4}, g_{k6}$  ( $k = 1, 2, 3$ ) ottenendosi rispettivamente dalle  $g_{k1}, g_{k3}, g_{k5}$ , ora date, mutando  $c$  in  $-c$ .

Quanto alle  $G_{kl}$ , posto, con  $n = 1, 2$ ,

$$q_1(\tau, \zeta) = \cosh \tau(\zeta - c),$$

$$q_2(\tau, \zeta) = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \tau(\zeta - c) \sinh \tau(\zeta - c),$$

$$q_{n+2}(\tau, \zeta) = \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \sinh \tau(\zeta - c) + (-1)^{n+1} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \tau(\zeta - c) \cosh \tau(\zeta - c),$$

si ha come loro espressione per  $\zeta \cong z$ ,  $k = 1, 2, 3$

$$G_{k1} = g_{k1} \left( q_1 + \frac{\xi^2}{\tau^2} q_2 \right) + \frac{\xi \eta}{\tau^2} g_{k3} q_2 - \frac{\xi}{\tau} g_{k5} q_3,$$

$$G_{k2} = \frac{\xi \eta}{\tau^2} g_{k1} q_2 + g_{k3} \left( q_1 + \frac{\eta^2}{\tau^2} q_2 \right) - \frac{\eta}{\tau} g_{k5} q_3,$$

$$G_{k3} = -\frac{1}{\tau} (\xi g_{k1} + \eta g_{k3}) q_4 + g_{k5} (q_1 - q_2),$$

le espressioni per  $\zeta \leq z$  ricavandosi subito da quelle ora date tenendo presente che, scambiando  $z$  con  $\zeta$ ,  $G_{kl}$  si muta in  $G_{lk}$ .

Le espressioni [6] sopra date delle trasformate  $u_k(\xi, \eta, z)$  ( $k = 1, 2, 3$ ) presentano (se le  $F_l$  ed  $f_r$  non soddisfano particolari relazioni) un polo in corrispondenza ad ogni autovalore del parametro  $\tau$  del problema trasformato [4], [5] e non possono quindi essere senz'altro usate per il calcolo delle  $u_k(\xi, \eta, z)$  quando  $\tau = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$  viene a coincidere con uno di detti autovalori.

D'altra parte, per il calcolo del termine  $h = k = 0$  nella serie risolutiva [3] e serie analoghe per  $v, w$  date al n. 2, interessa appunto la determinazione delle  $u_k(0, 0, z)$ ; corrispondenti all'autovalore  $\tau = 0$ . Osserviamo perciò che per  $\xi = \eta = 0$  l'esame diretto del sistema delle equazioni [4], [5] mostra che, purchè sia nullo il risultante delle forze attive e vincolari agenti sul parallelepipedo, si hanno ancora soluzioni e come loro espressione  $u_k^{(0)}(z)$  si può assumere (a meno di una costante additiva arbitraria per ciascuna delle  $u_k^{(0)}$ ) ancora la [6], però colla seguente definizione delle  $g_{kr}^{(0)}(z), G_{kl}^{(0)}(z, \zeta)$ :

$$g_{11}^{(0)} = g_{23}^{(0)} = \frac{z}{\mu}, \quad g_{33}^{(0)} = \frac{z}{\lambda + 2\mu},$$

$$G_{11}^{(0)} = G_{22}^{(0)} = \frac{z}{\mu}, \quad G_{33}^{(0)} = \frac{z}{\lambda + 2\mu} \quad \text{per } \zeta \geq z,$$

le  $G_{kk}^{(0)}$  per  $\zeta \leq z$  ottenendosi scambiando  $z$  con  $\zeta$ , e le altre  $g_{kr}^{(0)}, G_{kl}^{(0)}$  ponendosi eguali a zero.

Con ciò non si può però ancora dire completato il calcolo delle trasformate di FOURIER degli spostamenti  $u^*, v^*, w^*$  e degli sforzi  $\sigma_x^*, \sigma_y^*, \dots, \tau_{yz}^*$ . E difatti comparando, nelle loro espressioni date nel presente numero, come funzioni da supporre note gli spostamenti e gli sforzi sulle facce laterali del parallelepipedo, è necessario predeterminare dette funzioni per poter effettivamente usare le formule trovate. Di ciò ci occuperemo al n. 4.

4. CALCOLO DEGLI SPOSTAMENTI E DEGLI SFORZI SULLE FACCE LATERALI DEL PARALLELEPIPEDO. — Nelle ipotesi già ammesse al n. 2 per  $u, v, w$ , le relative trasformate  $u_k(\xi, \eta, z)$  ( $k = 1, 2, 3$ ) devono, per loro stessa definizione, risultare funzioni intere delle due variabili complesse  $\xi, \eta$ . Tali non sono invece, se non si presuppongono sussistere particolari relazioni tra le  $F_l$  ed  $f_r$ , le espressioni  $\Phi_k(\xi, \eta, z)$  (così denoteremo d'ora innanzi i secondi membri delle [6]) che abbiamo date al n. 3 per le  $u_k(\xi, \eta, z)$  e che, sebbene ivi non ne abbiamo fatta esplicita menzione, valgono anche per  $\xi, \eta$  complessi. Ne segue che le  $F_l$  ed  $f_r$  ( $l = 1, 2, 3$ ;  $r = 1, 2, \dots, 6$ ) devono soddisfare a quelle condizioni che si richiedono affinchè le  $\Phi_k(\xi, \eta, z)$  risultino funzioni intere di  $\xi, \eta$ .

I vari termini delle  $\Phi_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) hanno come multiplo comune dei loro denominatori.

$$\varphi(\tau) = \tau^5 \sinh(2c\tau) [\sinh^2(2c\tau) - (2c\tau)^2];$$

siano  $\varphi_k$  i numeratori delle espressioni delle  $\Phi_k$  ridotte ad un'unica frazione con denominatore  $\varphi$ , cioè si ponga

$$[7] \quad \Phi_k(\xi, \eta, z) = \frac{\varphi_k(\xi, \eta, z)}{\varphi(\tau)} \quad (k = 1, 2, 3).$$

Ad un primo esame potrebbe sembrare che le  $\Phi_k$  non siano funzioni uniformi di  $\xi, \eta$  dato che esse dipendono da  $\xi, \eta$  anche pel tramite di  $\tau = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ . Un esame più accurato, partendo dall'osservazione che mutando  $\tau$  in  $-\tau$  le  $\varphi, \varphi_k, \Phi_k$  si mutano in se stesse, mostra però che effettivamente le  $\varphi, \varphi_k, \Phi_k$  sono funzioni uniformi di  $\xi, \eta$  e, precisamente, intere le  $\varphi, \varphi_k$ , meromorfe (od eventualmente intere per particolari  $F_l$  ed  $f_r$ ) le  $\Phi_k$ .

Gli eventuali poli delle  $\Phi_k$  sono le coppie di valori  $\xi, \eta$  tali che sia  $\xi^2 + \eta^2 = \tau^2$  con  $\tau$  zero di  $\varphi(\tau)$  (e cioè autovalore del problema trasformato [4], [5]). Ne segue che, ai fini della ricerca dei poli  $\xi, \eta$  delle  $\Phi_k$ , ci si può limitare a considerare (dato che se  $\tau$  è zero di  $\varphi$  lo è anche  $-\tau$ ) i soli zeri di  $\varphi$  che hanno, ad es., positivo il coefficiente dell'immaginario. Ordineremo detti zeri in successione in ordine crescente rispetto al coefficiente dell'immaginario e, a parità di questo, in ordine crescente rispetto all'argomento; diremo  $\tau_s$  ( $s = 1, 2, \dots$ ) il generico di essi. Si dimostra che il solo  $\tau_1 = 0$  è zero multiplo (decuplo) di  $\varphi$  e che tutti gli altri sono zeri (complessi) semplici.

In corrispondenza, le  $\Phi_k$  hanno, per generiche  $F_l$  ed  $f_r$ , un polo semplice in tutti i punti  $\xi, \eta$  dei cerchi (nel senso esteso della geometria analitica)

$$[8] \quad \xi^2 + \eta^2 = \tau_s^2 \quad (s = 2, 3, \dots),$$

ed un polo di ordine superiore nei punti delle rette (ancora in senso esteso)

$$[9] \quad \xi \pm i\eta = 0.$$

Affinchè le  $\Phi_k$ , come richiesto, diventino funzioni intere di  $\xi, \eta$  appare da [7] esser necessario che le  $\varphi_k$  si annullino in tutti i punti dei cerchi [8], cioè che sia identicamente rispetto a  $\theta$  e  $z$

$$[10] \quad \varphi_k(\tau_s \cos \theta, \tau_s \sin \theta, z) = 0 \quad \left( \begin{matrix} k = 1, 2, 3; \\ s = 2, 3, \dots \end{matrix} \right)$$

e che (essendo  $\tau = 0$  zero decuplo di  $\varphi$ ) in tutti i punti delle rette [9] si annullino le  $\varphi_k$  e le loro derivate parziali rispetto a  $\xi, \eta$  fino a quelle di ordine 9 incluso, cioè sia identicamente rispetto a  $\xi, \eta, z$

$$[11] \quad \left[ \frac{\partial^n \varphi_k(\xi, \eta, z)}{\partial \xi^m \partial \eta^{n-m}} \right]_{\eta = \pm i\xi} = 0 \quad \left( \begin{array}{l} k = 1, 2, 3; \\ n, m = 0, 1, \dots, 9, m \leq n \end{array} \right).$$

Si dimostra che basta soddisfare le [10] per uno  $z$  prefissato qualsiasi, con che di conseguenza esse risultano soddisfatte identicamente rispetto a  $z$ . Non abbiamo approfondito se la stessa affermazione possa farsi per le [11], ma certamente basta soddisfarle per un numero finito di valori di  $z$  (non maggiore di 6) perchè esse risultino soddisfatte per ogni altro  $z$ .

Per soddisfare identicamente le [10] rispetto a  $\theta$  occorre invece un'infinità di condizioni dato che le  $\varphi_k$  ( $\tau_\theta \cos \theta, \tau_\theta \sin \theta, z$ ) dipendono da  $\theta$  anche pel tramite delle incognite  $F_l$  ed  $f_r$ . Trattandosi però di funzioni intere della  $\theta$  basterà esprimere che esse e tutte le loro derivate rispetto a  $\theta$  si annullano in  $\theta = 0$ . Analogamente le [11] risulteranno identicamente soddisfatte rispetto a  $\xi$  quando si esprima che i primi membri di esse e tutte le loro derivate rispetto a  $\xi$  si annullano per  $\xi = 0$ .

Si riconosce, sulla base delle espressioni delle  $F_l$  ed  $f_r$  date al n. 3, che l'infinità numerabile di condizioni a cui così si perviene è del tipo

$$\begin{aligned} 2] \quad & \sum_k (-1)^{k+1} \int_{-b}^b \int_{-c}^c (\bar{U}_k S_x^{(k)} + \bar{V}_k T_{xy}^{(k)} + \bar{W}_k T_{xz}^{(k)} - U_k \bar{S}_x^{(k)} - V_k \bar{T}_{xy}^{(k)} - W_k \bar{T}_{xz}^{(k)}) dy dz + \\ & + \sum_k (-1)^{k+1} \int_{-a}^a \int_{-c}^c (\bar{U}_k T_{xy}^{(k)} + \bar{V}_k S_y^{(k)} + \bar{W}_k T_{yz}^{(k)} - U_k \bar{T}_{xy}^{(k)} - V_k \bar{S}_y^{(k)} - W_k \bar{T}_{yz}^{(k)}) dx dz = \\ & = \sum_k (-1)^k \int_{-a}^a \int_{-b}^b (\bar{U}_k T_{xz}^{(k)} + \bar{V}_k T_{yz}^{(k)} + \bar{W}_k S_z^{(k)}) dx dy - \int_{-a}^a \int_{-b}^b \int_{-c}^c (\bar{u} X + \bar{v} Y + \bar{w} Z) dx dy dz, \end{aligned}$$

con  $\bar{U}_k, \bar{V}_k, \bar{W}_k, \bar{S}_x^{(k)}, \dots, \bar{T}_{yz}^{(k)}$  espressi per mezzo di  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$  come ai nn. 2, 3 i corrispondenti simboli senza soprassegno per mezzo di  $u, v, w$ , ed opportune  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$  che, per ognuna di dette condizioni, riporteremo nella Memoria che abbiamo preannunciata nell'introduzione.

Concludendo, l'imposizione che le  $\Phi_k(\xi, \eta, z)$  ( $k = 1, 2, 3$ ) risultino funzioni intere delle due variabili complesse  $\xi, \eta$  porta ad una successione di infinite equazioni [12] tra gli spostamenti  $U_h, V_h, W_h$  e gli sforzi  $S_x^{(i)}, S_y^{(j)}, T_{xy}^{(h)}, T_{xz}^{(i)}, T_{yz}^{(j)}$  ( $h = 1, 2, 3, 4; i = 1, 2; j = 3, 4$ ) sulle facce laterali del parallelepipedo. Esse costituiscono un sistema di infinite equazioni integrali FISCHER-RIESZ a cui richiedere la determinazione di quelle 12 di dette 24 funzioni che non risultano assegnate nelle condi-

zioni al contorno del problema e che, comparendo come funzioni da sup-porsi note nelle formule risolutive dei nn. 2, 3, era necessario predetermi-nare per poter effettivamente applicare dette formule. Come abbiamo già detto nell'introduzione, non è però dimostrato (sebbene si abbiano ragioni per presumerlo) che effettivamente la successione di equazioni trovate è sufficiente per determinare le funzioni che si cercano, a meno di un eventuale spostamento rigido.

La forma [12], che siamo riusciti a dare alle condizioni di riduzione delle  $\Phi_k$  a funzioni intere di  $\xi, \eta$ , le ricollega al teorema di reciprocità di BETTI applicato allo spostamento incognito effettivo  $u, v, w$  e agli spo-stamenti noti fittizi  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$  che, nelle loro determinazioni spettanti alle varie condizioni trovate, corrispondono sempre a forze di massa nulle in tutto il parallelepipedo e a forze superficiali nulle sulle facce  $z = \pm c$  di esso. Ed è interessante notare come il noto procedimento di risoluzione dei sistemi di equazioni FISCHER-RIESZ porti ad approssimare su ogni faccia le incognite componenti dello spostamento mediante una stessa combinazione lineare delle componenti degli sforzi fittizi (dedotti da  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ ) agenti su quella faccia e, viceversa, se sono invece incogniti gli sforzi effettivi, ad approssimare questi mediante una stessa combinazione lineare degli spostamenti fittizi per ogni faccia considerata.

Osserveremo qui infine che tra le condizioni [12] compaiono anche quelle esprimenti che sia equilibrato il sistema delle forze attive e vin-colari agenti sul parallelepipedo. Nel caso in cui su tutte le facce del paral-lelepipedo siano assegnate le forze agenti e non gli spostamenti, si hanno così le note condizioni restrittive a cui devono soddisfare le forze assegnate affinchè il problema risulti compatibile; soddisfatte le quali, il sistema delle equazioni [12] può ammettere soluzioni che, ad ogni modo, sono da esse ricavabili solo a meno di uno spostamento rigido arbitrario dell'intero parallelepipedo, come notoriamente prevedibile e come risulta dalla proprietà degli sforzi corrispondenti ai vari  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ , ed agenti sulle facce laterali del parallelepipedo, di costituire di per sè un sistema equilibrato.

---

**Fisica.** — *Sulla scissione degli elementi pesanti.* Nota di MARIO AGENO, EDOARDO AMALDI, DARIA BOCCIARELLI, NESTORE BERNARDO CACCIAPUOTI, GIULIO CESARE TRABACCHI, presentata <sup>(1)</sup> da GIULIO CESARE TRABACCHI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Dopo la scoperta di HAHN e STRASSMANN che gli elementi uranio e torio, bombardati con neutroni, si scindono in due parti pressochè uguali dando così luogo alla formazione di elementi di numero atomico medio, è stato pubblicato un notevole numero di lavori sia teorici che sperimentali intesi a chiarire le particolarità di questo fenomeno <sup>(2)</sup>.

Uno dei problemi più interessanti e che meglio si prestano al confronto fra i risultati sperimentali e la teoria è la determinazione della dipendenza della sezione d'urto del fenomeno di scissione dalla energia dei neutroni incidenti.

Alcune misure a questo riguardo sono state eseguite da ROBERTS, MEYER, HAFSTAD <sup>(3)</sup> e da LADENBURG, KANNER, BARSCHALL, VAN VOORHIS <sup>(4)</sup>. Mentre i primi hanno confrontato qualitativamente l'efficienza, nel produrre la scissione, di neutroni provenienti da diverse sorgenti, i secondi hanno misurato la sezione d'urto dell'uranio e del torio per neutroni di 2,4 MV di energia ( $D + D$ ) ed hanno trovato rispettivamente  $0,5 \cdot 10^{-24}$  e  $0,1 \cdot 10^{-24}$  cm<sup>2</sup>. Questi Autori hanno inoltre dimostrato che tale sezione d'urto rimane sensibilmente costante qualora si vari l'energia dei neutroni fra 2,1 e 3,1 MV.

Tale risultato bene si inquadra nella descrizione del fenomeno di scissione data da BOHR e WHEELER <sup>(5)</sup>. Infatti secondo questi autori la sezione d'urto per la scissione dovrebbe essere piccolissima, per così dire

<sup>(1)</sup> Nell'Adunanza del 21 marzo 1940-XVIII.

<sup>(2)</sup> Vedi, p. es., l'articolo riassuntivo di L. A. TURNER, « Rev. Mod. Phys. », 12, 1, 1940.

<sup>(3)</sup> R. D. ROBERTS, R. C. MEYER, L. R. HAFSTAD, « Phys. Rev. », 55, 416, 1939.

<sup>(4)</sup> R. LADENBURG, M. H. KANNER, H. BARSCHALL, C. C. VAN VOORHIS, « Phys. Rev. », 56, 168, 1939. /

<sup>(5)</sup> N. BOHR, J. A. WHEELER, « Phys. Rev. », 56, 426, 1939.



nulla, per energie di eccitazione del nucleo in esame inferiori ad una certa energia critica  $E_f$ , caratteristica del nucleo stesso. Per energie di eccitazione prossime ad  $E_f$ , la sezione d'urto crescerebbe rapidamente fino a raggiungere un valore  $\sigma$  che poi si manterrebbe costante anche per energie di eccitazione notevolmente maggiori di  $E_f$ .

Il fatto che nel caso dell'uranio sia possibile provocare la scissione sia con neutroni veloci che con neutroni lenti viene interpretato da BOHR <sup>(6)</sup> ammettendo che per l'isotopo 235 di questo elemento l'energia critica  $E_f$  sia inferiore all'energia di legame del neutrone incidente, mentre per l'isotopo 238  $E_f$  sarebbe di circa 0,7 MV maggiore dell'energia di legame del neutrone. Tale interpretazione è stata recentemente confermata sperimentalmente da NIER, BOOTH, DUNNING e V. GROSSE <sup>(7)</sup> i quali, bombardando gli isotopi 235 e 238 dell'uranio separati a mezzo dello spettrografo di massa, hanno verificato che solo il primo di essi si scinde sotto l'azione dei neutroni lenti.

La scissione del torio e del protoattinio <sup>(8)</sup> avviene invece solo con neutroni veloci; il fenomeno si presenta quindi in questi elementi in modo analogo a ciò che accade per l' $U^{238}$ ; infatti si valuta che le corrispondenti energie critiche  $E_f$  siano rispettivamente di 1,7 MV e 1 MV maggiori della energia di legame del neutrone incidente <sup>(9)</sup>.

In questo lavoro riferiamo sui risultati di alcune esperienze intese a determinare in misura relativa, nel caso dell'uranio e del torio, la dipendenza della sezione d'urto del fenomeno di scissione dall'energia dei neutroni incidenti; le misure sono state eseguite solo con neutroni veloci, e precisamente di energia non inferiore a 0,2 MV, sembrandoci questo il modo migliore di verificare sperimentalmente le previsioni di BOHR e WHEELER a cui abbiamo precedentemente accennato <sup>(5)</sup>.

L'ideale sarebbe evidentemente di disporre di neutroni omogenei e di eseguire la misura della sezione d'urto del fenomeno di scissione per diverse energie dei neutroni stessi. Purtroppo sono approssimativamente omogenei solo i neutroni emessi nelle reazioni  $D + C$  e  $D + D$ , mentre in tutti gli altri casi si tratta sempre di spettri assai complicati estendentesi con continuità da 0 fino a parecchi milioni di volt.

Qualora però si ammetta che la dipendenza della sezione d'urto dalla energia dei neutroni incidenti sia quella sopra accennata, è chiaro che la sezione d'urto dovrà risultare la stessa comunque complesso sia lo spettro di energia dei neutroni incidenti, purchè estendentesi solo al di

---

<sup>(6)</sup> N. BOHR, « Phys. Rev. », 55, 418, 1939.

<sup>(7)</sup> Q. O. NIER, E. T. BOOTH, J. R. DUNNING, A. V. GROSSE, « Phys. Rev. », 57, 546, 1940.

<sup>(8)</sup> A. V. GROSSE, E. T. BOOTH, J. R. DUNNING, « Phys. Rev. », 56, 382, 1939.

<sup>(9)</sup> N. BOHR, J. A. WHEELER, « Phys. Rev. », 56, 1065, 1939.



sopra della energia critica  $E_f$ ; nel caso poi in cui lo spettro si estenda al di sotto di tale limite, sarà sufficiente, per controllare le previsioni di BOHR e WHEELER, conoscere la percentuale  $\alpha$  del numero totale dei neutroni incidenti aventi energia superiore ad  $E_f$ ; solo questi infatti contribuiscono alla sezione d'urto osservata, dato che i neutroni di energia inferiore ad  $E_f$ , rappresentanti la frazione  $1 - \alpha$  del totale, hanno sezione d'urto nulla.

Immaginiamo ora di misurare da un lato il numero di scissioni provocate in una determinata quantità di uranio, e dall'altro il numero totale dei neutroni incidenti; il rapporto di queste due grandezze è evidentemente proporzionale a  $\alpha\sigma$ . Ripetendo la misura con diversi spettri di neutroni incidenti è così possibile verificare, sia pure nelle grandi linee se non nei particolari, la costanza della sezione d'urto  $\sigma$  al di sopra dell'energia critica  $E_f$ . Il metodo, in linea di principio, permetterebbe evidentemente di determinare anche il valore dell'energia critica  $E_f$ ; questo però richiederebbe una assai precisa conoscenza dello spettro dei neutroni incidenti, specialmente per basse energie, quale purtroppo ancor oggi difetta.

2. I neutroni venivano prodotti bombardando, con  $D^+$  accelerati a mezzo dell'impianto ad 1.100 KV dell'Istituto di Sanità Pubblica, diversi elementi e precisamente D, C, Be, B, Li.

La targhetta di deuterio era ottenuta facendo adsorbire questo gas da circa 20 gr. di polvere di zirconio alla temperatura di  $200^\circ C$ <sup>(10)</sup>; dopo che tale polvere aveva adsorbito circa 3 litri di deuterio essa veniva compressa in un recipiente di ottone del diametro di 3,5 cm. e profondo 2 mm. che veniva posto nell'estremità inferiore del tubo. Abbiamo dovuto usare questo metodo che presenta alcuni inconvenienti, tra i quali ricorderemo la debole intensità e la relativamente elaborata preparazione, poichè l'uso del ghiaccio pesante era da escludersi richiedendo il raffreddamento della targhetta con l'aria liquida, cosa impossibile dato il metodo di misura che abbiamo usato.

Il berillio, il litio ed il carbonio sono stati usati in forma di dischetti dei corrispondenti elementi; il boro sotto forma di un disco di  $B_2O_3$ .

Per osservare la scissione ci siamo serviti di una camera di ionizzazione a elettrodi piani e paralleli in forma di dischi di 5 cm. di diametro; uno di questi era connesso alla griglia della prima valvola di un amplificatore proporzionale, mentre il secondo, situato ad una distanza di 3 cm. dal primo, veniva mantenuto ad un potenziale costante di 3800 volt, a mezzo di un sistema stabilizzato. La superficie di questo elettrodo era interamente coperta da uno strato di  $U_3O_8$ , spesso rispetto al percorso dei prodotti della scissione; esso poteva venir rapidamente sostituito con un altro elettrodo

<sup>(10)</sup> F. M. PENNING, J. H. A. MOUBIS, « Physica », 4, 1190, 1937.

ricoperto di un analogo strato di  $\text{ThO}_2$  oppure con un elettrodo privo di deposito di elementi pesanti, il quale veniva usato talvolta per controllare l'effetto di zero del sistema e garantirci così della assoluta mancanza di eventuali disturbi elettrici. Data la elevata tensione applicata alla camera, gli ioni primari generati dai prodotti della scissione davano luogo ad una debole moltiplicazione per urti nel gas. Gli impulsi venivano registrati a mezzo di una scala di 8, ed osservati contemporaneamente a mezzo dell'oscillografo catodico, allo scopo di sorvegliare il regolare funzionamento del sistema e la assoluta mancanza di disturbi.

Dato che la estremità del tubo era raffreddata con una circolazione d'acqua, abbiamo ritenuto opportuno ricoprire interamente sia l'estremità del tubo che la camera di ionizzazione con uno strato di cadmio di  $0,52 \text{ gr/cm}^2$ , in modo da eliminare completamente eventuali neutroni di energia termica. Questi peraltro, nelle nostre condizioni, erano certamente in numero trascurabile, poichè togliendo il cadmio non si aveva aumento sensibile nel numero di impulsi registrati dalla camera.

Per misurare il numero totale di neutroni incidenti sull'uranio ci siamo serviti dell'attività, con periodo di 44 sec., provocata nel rodio dai neutroni rallentati a mezzo di acqua. Tutte queste misure sono state eseguite con tre lastre di rodio di  $5 \times 5,5 \text{ cm}^2$  di area e  $0,36 \text{ gr/cm}^2$  di spessore; l'attività veniva al solito misurata a mezzo di una camera di ionizzazione a 2,5 atmosfere di  $\text{CO}_2$  connessa ad un elettrometro. Le attività date nelle tabelle sono definite come le attività totali (ossia misurate dal tempo zero fino all'infinito) di tali lastre di rodio dopo un minuto di irraggiamento, prendendo come unità l'attività di un preparato di 85 gr. di  $\text{U}_3\text{O}_8$ ; questo è 42,1 volte maggiore del preparato usato come campione in precedenti ricerche (<sup>11</sup>).

3. Il principio su cui è basato il metodo di misura da noi seguito è il seguente. Si immagini di disporre attorno all'estremità inferiore del tubo, col centro sulla targhetta nel punto in cui vengono generati i neutroni, uno strato di uranio (o torio) di forma sferica in modo che tutti i neutroni emessi lo attraversino perpendicolarmente. È chiaro che la grandezza che ci interessa ossia la grandezza che risulta proporzionale ad  $\alpha\sigma$  è il rapporto tra il numero di scissioni provocate per esempio in un minuto nello strato di uranio ed il numero totale di neutroni incidenti. Per misurare quest'ultimo numero ci siamo serviti del noto metodo (<sup>11</sup>) di rallentare i neutroni nell'acqua e di determinare quindi la densità dei neutroni termici punto per punto a mezzo dell'attività indotta in un rivelatore di rodio; l'integrale

---

(<sup>11</sup>) E. AMALDI, E. FERMI, « Ric. Scient. », VII-I, 454, 1936; « Phys. Rev. », 50, 899, 1936.

di volume della densità dei neutroni, esteso a tutto lo spazio, rappresenta il numero totale dei neutroni emessi.

Si potrebbe a prima vista pensare che si possa ottenere lo stesso risultato semplicemente misurando in una determinata direzione, per esempio in avanti, oppure a  $90^\circ$ , rispetto alla direzione dei deutoni incidenti, sia il numero di scissioni provocate in uno strato d'uranio depositato sull'elettrodo della camera precedentemente descritta, che l'integrale

$$[1] \quad \int_0^{\infty} A(r) r^2 dr$$

dell'attività  $A(r)$  di un rivelatore di rodio in funzione della distanza  $r$  dalla targhetta, quale si ottiene circondando l'estremità inferiore del tubo con un esteso volume di sostanza idrogenata (acqua).

Se si fa in questo modo si trova in generale un assai diverso risultato a seconda della direzione, rispetto a quella dei deutoni incidenti, in cui viene svolta la misura. La spiegazione di questo fatto è da ricercarsi nella anisotropia con cui i neutroni vengono emessi dalle diverse targhetze; infatti mentre il numero delle scissioni risente integralmente dell'anisotropia con cui vengono emessi i neutroni, l'integrale [1] varia assai meno con la direzione in cui esso viene misurato poichè il processo di rallentamento che subiscono i neutroni nell'acqua tende a far scomparire ogni ricordo della eventuale anisotropia con cui i neutroni veloci vengono emessi dalla targhetta. Si comprende quindi come sia necessario ripetere sia la misura delle scissioni avvenute entro la camera di ionizzazione in un dato tempo, che la misura dell'integrale [1] in diverse direzioni, in modo da poter integrare rispetto all'angolo solido eliminando così ogni effetto di anisotropia.

È facile riconoscere che a questo integrale contribuiscono principalmente le misure eseguite a  $90^\circ$ . Per ragioni di praticità noi ci siamo quindi limitati ad eseguire le misure in avanti ed a  $90^\circ$  con la direzione dei deutoni incidenti.

Le misure venivano eseguite nel seguente modo; la camera di ionizzazione veniva posta in una posizione ben riproducibile rispetto alla targhetta, ad una distanza da questa di cm. 5,7; ed in queste condizioni veniva contato il numero  $n$  di scissioni al minuto. Veniva quindi rapidamente asportata la camera di ionizzazione e veniva posto, attorno all'estremità del tubo contenente la targhetta, un recipiente pieno d'acqua del diametro di cm. 28 e alto cm. 25. Un rivelatore di rodio veniva posto per un minuto in una posizione ben riproducibile rispetto alla targhetta (e precisamente a cm. 5,7 da questa) e ne veniva quindi misurata l'attività  $a$ . Queste due misure con l'uranio (o col torio) e con il rodio venivano ripetute alternativamente più volte in modo da assicurarsi che l'intensità dei neutroni emessi non fosse variata sensibilmente durante le misure.

TABELLA I ( $\theta = 0^\circ$ ).

| Reazione                   | Energia<br>D <sup>+</sup> in MV | $\alpha$        | $K$              | $n_U$                          | $n_{Th}$      | $n_{U/\sigma K}$ | $n_{Th/\sigma K}$ |
|----------------------------|---------------------------------|-----------------|------------------|--------------------------------|---------------|------------------|-------------------|
| D + C                      | 0,85                            | $241 \pm 2$     | $0,34 \pm 0,03$  | $6,9 \pm 0,8$                  | —             | 0,084            | —                 |
| »                          | »                               | $214 \pm 6$     | »                | $6,3 \pm 1$                    | —             | 0,087            | —                 |
| »                          | »                               | $244 \pm 5$     | »                | $7,2 \pm 1$                    | —             | 0,087            | —                 |
| »                          | 1,0                             | $702 \pm 16$    | 0,47 0,03        | $20,5 \pm 2$                   | —             | 0,062            | —                 |
| »                          | »                               | $709 \pm 2$     | »                | $13,4 \pm 1$                   | —             | 0,040            | —                 |
| D + Be                     | 0,85                            | $2790 \pm 40$   | $0,90 \pm 0,05$  | $669 \pm 6$                    | —             | 0,27             | —                 |
| »                          | »                               | $2960 \pm 100$  | »                | $755 \pm 7$                    | —             | 0,28             | —                 |
| »                          | 0,50                            | $199 \pm 4$     | »                | $51 \pm 0,4$                   | —             | 0,28             | —                 |
| »                          | 0,85                            | $3065 \pm 30$   | »                | —                              | $114 \pm 2$   | —                | 0,041             |
| »                          | »                               | $2737 \pm 30$   | »                | —                              | $86 \pm 2$    | —                | 0,035             |
| D + B                      | »                               | $640 \pm 5$     | $0,71 \pm 0,04$  | $164 \pm 3$                    | —             | 0,36             | —                 |
| »                          | »                               | $671 \pm 5$     | $0,72 \pm 0,04$  | —                              | $27,6 \pm 2$  | —                | 0,057             |
| D + D                      | 0,50                            | $100 \pm 3$     | $1,1 \pm 0,06$   | $48,5 \pm 2$                   | —             | 0,44             | —                 |
| »                          | »                               | $76 \pm 1$      | »                | $30,3 \pm 2$                   | —             | 0,36             | —                 |
| »                          | »                               | $26,4 \pm 0,5$  | »                | $12,2 \pm 1$                   | —             | 0,42             | —                 |
| »                          | »                               | $22,7 \pm 0,5$  | »                | $11,5 \pm 0,7$                 | —             | 0,46             | —                 |
| »                          | »                               | $154 \pm 2$     | »                | $66,3 \pm 3$                   | —             | 0,39             | —                 |
| »                          | »                               | $128 \pm 3$     | »                | —                              | $8,7 \pm 0,6$ | —                | 0,062             |
| D + Li                     | 0,75                            | $2400 \pm 50$   | $1,075 \pm 0,01$ | $1070 \pm 7$                   | —             | 0,42             | —                 |
| »                          | »                               | $2300 \pm 50$   | »                | $1020 \pm 7$                   | —             | 0,42             | —                 |
| »                          | »                               | $2839 \pm 50$   | »                | $1310 \pm 10$                  | —             | 0,43             | —                 |
| »                          | »                               | $5860 \pm 100$  | »                | —                              | $427 \pm 4$   | —                | 0,066             |
| »                          | »                               | $2857 \pm 50$   | »                | —                              | $206 \pm 4$   | —                | —                 |
| $\gamma$ Ra + Be<br>500 mC | »                               | $3,95 \pm 0,04$ | $0,39 \pm 0,04$  | $79/980 =$<br>$= 0,08 + 0,009$ | —             | 0,052            | —                 |

L'attività del rodio misurata come abbiamo sopra descritto non è però proporzionale al numero totale dei neutroni emessi dalla sorgente, in quanto che la distribuzione spaziale dei neutroni nell'acqua è notoria-

mente diversa a seconda dello spettro di energia dei neutroni veloci emessi dalla sorgente. Per tener conto di questo fatto in un secondo tempo disponevamo attorno alla targhetta un cilindro di acqua alto cm. 70 del diametro di cm. 50 per le misure in avanti, ed un parallelepipedo di acqua di  $38 \times 80 \times 28$  per le misure a  $90^\circ$ , e misuravamo l'attività  $A(r)$  del rodio in funzione della distanza dalla targhetta. Calcolavamo quindi il rapporto

$$[2] \quad K = \int_0^\infty Ar^2 dr / A(5,7)$$

dell'integrale  $\cdot [1]$  alla attività del rodio osservata a cm. 5,7, ossia nella stessa posizione in cui era stata fatta la misura dell'attività  $a$ . Il prodotto  $Ka$  è evidentemente eguale al valore dell'integrale  $[1]$  nelle condizioni in cui veniva misurato il numero delle scissioni.

TABELLA II ( $\theta = 90^\circ$ ).

| Reazione            | Energia D <sup>+</sup><br>in MV | $a$           | $K$             | $n_U$         | $n_U/aK$ |
|---------------------|---------------------------------|---------------|-----------------|---------------|----------|
| D + C               | 0.85                            | $184 \pm 5$   | $0.41 \pm 0.03$ | $32 \pm 0.5$  | 0.042    |
| »                   | »                               | $273 \pm 2$   | »               | $5.2 \pm 0.7$ | 0.046    |
| »                   | 1                               | $669 \pm 7$   | $0.46 \pm 0.03$ | $11.4 \pm 1$  | 0.037    |
| »                   | »                               | $621 \pm 6$   | »               | $9.3 \pm 0.9$ | 0.033    |
| D + Be              | 0.85                            | $2217 \pm 23$ | $1.03 \pm 0.05$ | $580 \pm 7$   | 0.25     |
| D + B               | 0.85                            | $514 \pm 11$  | $0.76 \pm 0.05$ | $101 \pm 2$   | 0.26     |
| D + D               | 0.50                            | $80.7 \pm 2$  | $0.96 \pm 0.05$ | $18.2 \pm 1$  | 0.24     |
| D <sup>+</sup> + Li | 0.75                            | $1627 \pm 30$ | $1.11 \pm 0.03$ | $660 \pm 8$   | 0.37     |
| »                   | 0.60                            | $780 \pm 6$   | »               | $310 \pm 5$   | 0.36     |

4. I risultati delle misure in avanti ed a  $90^\circ$  sono riportati rispettivamente nelle tabelle I e II; i valori di  $K$  dati nelle tabelle sono stati moltiplicati per  $10^{-3}$ . Nel caso del boro, per esempio, due misure in avanti del fattore  $K$  hanno dato rispettivamente  $0,71 \pm 0,04$  e  $0,72 \pm 0,04$ . Nella figura 1 sono riprodotte le curve rappresentanti  $A(r)r^2$  in funzione di  $r$  quali sono risultate nelle misure in avanti nel caso del D + Li e D + Be.

È bene notare che tutte le distanze date in questo lavoro rappresentano la radice quadrata della media quadratica delle distanze in modo da tener conto delle dimensioni finite della targhetta (la parte utile è di circa mm. 16 di diametro) e del rivelatore. Nel caso della reazione  $D + Be$  i punti grossi rappresentano i risultati delle misure di AMALDI, HAFSTAD e TUVE <sup>(12)</sup>; le crocette sono i punti calcolati con un esponenziale, scelto opportunamente, a mezzo del quale è stato valutato il contributo all'integrale [1] dovuto alle parti più lontane.

Come risulta dalla tabella I abbiamo eseguito una misura anche con i fotoneutroni del Be sotto l'azione dei raggi  $\gamma$  del deposito attivo. A tale

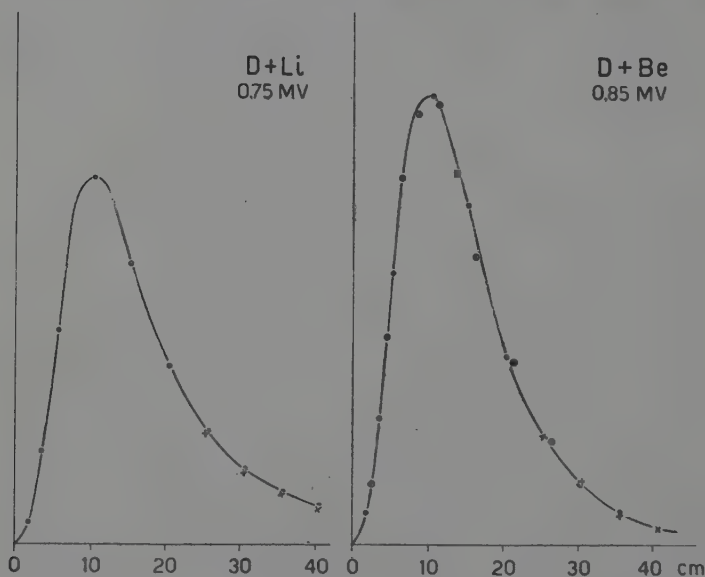


Fig. 1.

scopo un tubo di ottone avente la stessa forma e dimensioni dell'estremità del tubo era stato riempito, per uno spessore di circa cm. 5, con polvere di berillio, nella quale era immerso un aghetto di vetro contenente inizialmente circa mc. 500 di emanazione. La geometria del sistema era la stessa di quella usata nelle esperienze col tubo, in avanti. Per controllo contavamo il numero di impulsi registrati dal nostro sistema alternativamente con e senza la sorgente di fotoneutroni vicino alla camera. Abbiamo così

<sup>(12)</sup> E. AMALDI, L. R. HAFSTAD, M. A. TUVE, « Phys. Rev. », 51, 896, 1937.



contato sotto l'azione dei fotoneutroni 75 impulsi in 980 minuti, contro 1 impulso in 709 minuti in assenza della sorgente di fotoneutroni. Ci sembra quindi ragionevole concludere che l'effetto osservato sia da attribuirsi ai fotoneutroni.

5. Nella tabella III sono riassunti i valori dei rapporti  $n/Ka$  quali risultano dalle tabelle I e II. Nel caso in cui si avevano a disposizione più misure è stato preso il loro valore medio.

TABELLA III.

| Reazione         | $n_U/aK$<br>$\theta = 0^\circ$ | $n_U/aK$<br>$\theta = 90^\circ$ | $\sim \alpha\sigma$ | $\sigma \times 10^{25}$ | $n_{Th}/aK$<br>$\theta = 0^\circ$ | $\sigma_U/\sigma_{Th}$ |
|------------------|--------------------------------|---------------------------------|---------------------|-------------------------|-----------------------------------|------------------------|
| D + D            | 0,41                           | 0,24                            | 0,26                | 5                       | 0,062                             | 6,6                    |
| D + Be           | 0,27                           | 0,25                            | 0,25                | 5                       | 0,038                             | 7,1                    |
| D + B            | 0,36                           | 0,26                            | 0,27                | 5                       | 0,057                             | 6,3                    |
| D + Li           | 0,42                           | 0,36                            | 0,37                | 7                       | 0,066                             | 6,4                    |
| D + C            | 0,051                          | 0,035                           | $\sim 0,03$         | 0,6                     |                                   |                        |
| 1 MV             |                                |                                 |                     |                         |                                   |                        |
| D + C            |                                |                                 |                     |                         |                                   |                        |
| 0,85 MV          | 0,086                          | 0,044                           |                     |                         |                                   |                        |
| $\gamma$ Ra + Be | 0,052                          | —                               | 0,052               | 1                       |                                   |                        |

Dalle dimensioni dei rivelatori di rodio e della camera di ionizzazione e dalla distanza (cm. 5,7) a cui questi si trovavano dalla targhetta, risulta che nell'eseguire l'integrale rispetto all'angolo solido per eliminare gli effetti di anisotropia, si deve dare alle misure a  $90^\circ$  un peso 6,6 volte maggiore che alle misure in avanti. Nella 4<sup>a</sup> colonna nella tabella III sono dati appunto i valori medi delle misure a  $0^\circ$  e a  $90^\circ$  ottenuti attribuendo loro i pesi 1 e 6,6.

Il prendere questa media presuppone alcune approssimazioni e precisamente 1) si ammette che il rapporto  $n/Ka$  vari linearmente tra  $0^\circ$  e  $90^\circ$ ; 2) si fa la media del rapporto  $n/Ka$  invece che il rapporto delle medie. Dall'esame dei dati della tabella III ci sembra ragionevole ritenere che gli errori così introdotti siano dello stesso ordine di quelli sperimentali.

Infine è da notare che sarebbe stato opportuno eseguire anche una misura all'indietro ed aggiungere un corrispondente termine nelle medie date



nella colonna IV della tabella III. La cosa però presentava alcune difficoltà pratiche specialmente per ciò che riguarda le misure col rodio nell'acqua.

Si può però notare che l'effetto di questo termine sarebbe quello di far diminuire un poco i valori dati nella colonna 4<sup>a</sup> tabella III, per modo che possiamo ragionevolmente ritenere che i valori veri siano probabilmente compresi tra quelli dati nella colonna 3<sup>a</sup> e 4<sup>a</sup> della tabella suddetta. Le differenze tra queste due serie di dati non sono peraltro fuori dagli errori sperimentali. Convenzionalmente prenderemo a base della discussione i dati della 4<sup>a</sup> colonna.

Nella 5<sup>a</sup> colonna sono date le sezioni d'urto in  $\text{cm}^2$  ottenute assumendo per i neutroni della reazione  $D + D$  il valore di  $5 \cdot 10^{-25}$  dato da LADENBURG e altri (4).

Dall'esame dei dati della 4<sup>a</sup> colonna sembra si possa concludere quanto segue:

1° La sezione d'urto media dei neutroni della reazione  $D + Be$  è eguale, nei limiti degli errori sperimentali, a quella dei neutroni della  $D + D$  ed  $\alpha \sim 1$ ; infatti estrapolando ragionevolmente da 0,6 MV a 0 i dati di BONNER e BRUBAKER (13), sembra che nello spettro  $D + Be$  i neutroni al di sotto di 1 MV rappresentino circa il 5 % del totale e che non ve ne siano praticamente affatto al di sotto di 0,6 MV. Inoltre se si ammette che la sezione d'urto per scissione abbia l'andamento previsto da BOHR e WHEELER (4), dal confronto dei dati ottenuti con le reazioni  $D + Be$  e  $D + D$  sembra che si debba concludere che il pianerottolo nella sezione d'urto si estenda almeno fino a circa 4 MV (il limite dello spettro del Be è 4,6 MV).

2° Con i neutroni della reazione  $D + B$  si è ottenuta una sezione d'urto media lievemente maggiore che con la reazione precedentemente discusse; la differenza è però negli errori sperimentali. È difficile potere interpretare questo risultato dato che lo spettro del boro, che si estende fino a circa 13 MV, è poco noto nella regione delle basse energie, che d'altronde sembra ricca di neutroni (14).

3° La sezione d'urto media dei neutroni della  $D + Li$  risulta maggiore che per i neutroni delle reazioni  $D + D$ ,  $D + Be$ ; la differenza sembra essere fuori dagli errori sperimentali; non possiamo tuttavia escludere che essa sia dovuta, almeno in parte, all'aver corretto in modo incompleto per l'anisotropia. Su questo punto sono in corso altre esperienze.

Qualora si confermasse tale differenza sarebbe ragionevole concludere che per energie inferiori ai 15 MV (limite dello spettro della reazione  $D + Li$ ) la sezione d'urto del fenomeno di scissione aumenti sensibilmente.

---

(13) L. W. BONNER, W. M. BRUBAKER, « Phys. Rev. », 50, 308, 1936.

(14) T. W. BONNER, W. M. BRUBAKER, « Phys. Rev. », 50.

4° Le misure col C — D sono state eseguite ad 1 MV e 0.85 MV, corrispondenti rispettivamente a 0,7 e 0.55 MV di energia dei neutroni in avanti e 0,55 e 0,40 MV a 90°.

A prima vista può sembrare strano che la sezione d'urto apparente sia più grande per neutroni di energia minore. Ciò è senza dubbio dovuto in parte ad errori di misura. La cosa però si può perfettamente spiegare ammettendo che la targhetta di grafite adsorbisse piccole quantità di deuterio dando così luogo ad emissione di neutroni della reazione D — D per i quali  $\sigma = 0.25$ . Un piccolo numero  $N_D$  di neutroni di questo tipo influenza assai poco i risultati ad 1 MV, mentre altera sensibilmente i risultati a bassa energia, dato che con questa il numero  $N_e$  dei neutroni del carbonio cala assai più rapidamente di  $N_D$ . Tale considerazione si può precisare: infatti detta  $x$  la sezione d'urto media del fenomeno di scissione fra 0.40 e 0.55 MV dei neutroni incidenti, si possono scrivere quattro equazioni lineari nelle quattro incognite  $x$ :  $N_e(0.85)$ ;  $N_e(1)$ ;  $N_D$ , osservando che a ciascuna delle tensioni usate  $N_e - N_D$  è proporzionale all'attività del rodio integrata a tutto lo spazio e che  $N_e x - N_D 0.25$  è uguale alla sezione d'urto osservata; risolvendo queste equazioni si trova  $x \sim 0.03$ ;  $N_D \sim 28$ ;  $N_e(0.85) \sim 38$ ;  $N_e(1) \sim 280$ .

Si può quindi concludere che per neutroni di 0.5 MV la sezione di urto per scissione è circa  $\frac{1}{8} \sigma$ ; tale valore risulta circa sei volte maggiore

di quello usato da BOHR e WHEELER; per quanto il nostro valore sia molto poco preciso ci sembrerebbe di poter escludere un errore di un fattore 10.

5° Il dato ottenuto con fotoneutroni di 200 KV sembra confermare l'esistenza di una sezione d'urto non trascurabile del fenomeno di scissione per basse energie dei neutroni incidenti.

Secondo B. FERRETTI sembra difficile ammettere che questo relativamente elevato valore della sezione d'urto sia dovuto all' $U^{238}$  in base al seguente argomento: al di sotto della energia critica  $E_c$ , che tutto porta a ritenere corrisponda a circa 0,7 MV di energia del neutrone incidente, la sezione d'urto decresce assai rapidamente; quindi, se la sezione d'urto osservata con fotoneutroni fosse essenzialmente da attribuirsi all' $U^{238}$ , con i neutroni della D + C si dovrebbe avere una sezione d'urto assai maggiore. Si può quindi pensare che la sezione d'urto osservata con neutroni di 200 KV sia da attribuirsi quasi totalmente all' $U^{238}$  che rappresenta 1 parte in 139 dell'elemento; per questo isotopo, nella regione termica, sembra che valga la legge  $1/v$  <sup>(15)</sup>. In tale ipotesi si otterrebbe per neutroni di 200 KV una sezione d'urto circa 100 volte minore di quella osservata

(15) H. L. ANDERSON, E. T. BOOTH, J. R. DUNNING, E. FERMI, G. N. GLASOE, F. G. SLACK, « Phys. Rev. », 55, 511, 1939.

Si può però notare che la legge  $1/v$  viene certamente meno per energie relativamente elevate e che per neutroni di 200 KV di energia la massima sezione d'urto possibile è  $\frac{\lambda^2}{\pi} = 13 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ ; tenendo conto dell'abbondanza dell'isotopo 235 si ottiene così  $\sigma \leq 0,9 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2$  ossia un valore assai prossimo a quello osservato sperimentalmente. Una analoga interpretazione si può dare, almeno per la quasi totalità, della sezione d'urto calcolata dai dati ottenuti con i neutroni della  $D + C$ .

6° Come risulta dall'ultima colonna della tabella III il rapporto delle sezioni d'urto dell'uranio e del torio (ottenuto dai dati delle colonne 1ª e 6ª) è pressochè costante e pari a circa 6,6 (i poteri frenanti del  $U_3O_8$  e del  $ThO_2$  differiscono solo del 5 %). Tale rapporto è lievemente superiore al valore 5 dato da altri autori (3).

Ci è infine gradito ringraziare M. MARZIALI per la costruzione di alcuni degli apparecchi usati in questa ricerca.

**Elettrochimica.** — *Potenziali elettrochimici ed effetto Volta.*  
V. *Le tensioni di soluzioni dei metalli* <sup>(1)</sup>. Nota <sup>(2)</sup> di  
OSCAR SCARPA, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

La presente nota, come le precedenti, ha lo scopo di esaminare le conseguenze apportate nelle teorie elettrochimiche dalla applicazione delle moderne teorie elettroniche al calcolo dei potenziali elettrochimici.

Come ho fatto più volte rilevare, tutti i calcoli elettrochimici finora effettuati sono fondati sulla ipotesi (sostenuta specialmente dai chimici e tacitamente ammessa dagli elettrochimici) per la quale sarebbero nulle, o trascurabili, le differenze di potenziale elettrico al contatto fra i metalli eterogenei (*effetti Volta interni*). Le moderne teorie elettroniche affermano invece che tali differenze di potenziale sono notevolissime e secondo le conclusioni di molti fisici (cito: MILLIKAN, LANGMUIR, CORBINO ecc.) sono misurate, a meno dei piccolissimi valori corrispondenti agli effetti Peltier, dai valori degli *effetti Volta esterni*, cioè dalle differenze di potenziale che si misurano con il metodo del condensatore variabile o con i metodi analoghi (metodi di ALESSANDRO VOLTA, di LORD KELVIN ecc.) oppure si deducono dai risultati delle esperienze foto o termoelettroniche <sup>(3)</sup>. Non è superfluo ricordare che tale conclusione coincide con le geniali deduzioni di ALESSANDRO VOLTA, deduzioni che furono aspramente combattute dai chimico-fisici e in particolare, nel tempo recente, da WILHELM OSTWALD <sup>(4)</sup>.

Se e come sia possibile accordare i risultati delle teorie elettroniche sopraindicate con le teorie ritenute valide da tutti gli elettrochimici, e

---

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nel Laboratorio di Elettrochimica del R. Politecnico di Milano.

<sup>(2)</sup> Presentata nell'Adunanza del 21 marzo 1940-XVIII.

<sup>(3)</sup> Le ragioni per cui non è possibile, allo stato attuale delle conoscenze sperimentali, tener conto anche dei cosiddetti potenziali interni dei metalli, sono state esposte nelle note precedenti.

<sup>(4)</sup> Vedere, ad es., in: W. OSTWALD, *L'évolution de l'électrochimie*. Alcan, Paris, 1912, pagg. 51, 55 e segg.

come queste debbano venir eventualmente modificate, non era stato ancora indagato <sup>(1)</sup>.

È con lo scopo di giungere a una conclusione definitiva (che interessa anche la valutazione elettrochimica dell'opera immortale di ALESSANDRO VOLTA, troppo sovente dimenticata nei trattati moderni di Elettrochimica e di Chimica-fisica) che ho intrapreso i presenti studi.

1. Lo studio delle differenze di potenziale che si sviluppano al contatto dei metalli con gli elettroliti è stato fondato da W. NERNST sulla considerazione di una ipotetica pressione (detta: *tensione di soluzione*) che solleciterebbe gli ioni metallici a uscire dal metallo per entrare nella soluzione. Questa pressione sarebbe contrastata, secondo NERNST, dalla pressione osmotica posseduta dagli ioni omonimi, esistenti nell'elettrolita. Fondandosi su questa ipotesi NERNST dedusse la espressione <sup>(2)</sup>:  $E = \frac{RT}{\nu F} \log_e \frac{P}{p}$ , e quindi indicando con  $j_c$  il coefficiente di attività degli ioni  $M^{\nu\oplus}$  nelle condizioni di concentrazione  $c$ , risulta (in Volt):

$$[1] \quad E = \frac{0.0002}{\nu} T \log_{10} \frac{P}{RT j_c c} = \frac{0.0002}{\nu} T \log_{10} \frac{P}{RT} - \\ - \frac{0.0002}{\nu} T \log_{10} j_c c$$

Per le soluzioni con attività unitaria rispetto agli ioni considerati (cioè per quelle per cui  $j_c c = 1$ ) il valore di  $E$  misura il *potenziale elettrochimico*

<sup>(1)</sup> Fra i pochissimi fisici che affermarono la necessità di tener conto delle teorie elettroniche moderne nello studio delle f. e. m. delle pile elettrochimiche, sono da citare BUTLER e CORBINO.

Fra i recenti tentativi sperimentali eseguiti per provare la verità della teoria chimica dell'effetto Volta (e quindi per contrastare i risultati delle moderne teorie elettroniche dell'effetto Volta) ricordo le misure di KRUGER secondo le quali l'effetto Volta esterno sarebbe esclusivamente dovuto ai gas occlusi nei metalli. Ricordo anche gli opposti risultati di GISAE e WAGENER. Per la discussione di queste esperienze rinvio a quanto ho pubblicato nell'anno 1938-XVI sulla « Ricerca Scientifica » (serie II, vol. I) e nelle mie note sui « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei » e sul « Nuovo Cimento » (anni 1938 e sgg.).

<sup>(2)</sup>  $R$  indica la costante dei gas,  $T$  la temperatura assoluta del sistema,  $\nu$  la valenza della specie degli ioni del metallo  $M$  considerati nella soluzione, ove hanno la concentrazione  $c$ ,  $F$  la carica elettrica del grammo-ione equivalente,  $p$  la pressione osmotica esercitata dagli ioni metallici considerati,  $P$  la ipotetica tensione di soluzione del metallo.

normale assoluto del metallo. Generalmente tale valore viene confuso con quello per cui  $e = 1$  <sup>(1)</sup>.

I valori delle tensioni di soluzione esposti nei trattati e in particolare a pag. 1028 (vol. II, anno 1923) delle Tabelle chimico-fisiche del LANDOLT, sono calcolati usufruendo della equazione 1) sostituendo a  $E$  quei valori dei potenziali elettrochimici che ho chiamato *apparenti* <sup>(2)</sup>; poichè sono dedotti non tenendo conto dei valori delle differenze di potenziale che esistono al contatto fra i metalli eterogenei costituenti i circuiti delle pile impiegate per le misure. L'ordine di grandezza delle tensioni di soluzione così calcolate è inconcepibilmente grande per i metalli più ossidabili (ad esempio:  $10^{91}$  atmosfere per il bario,  $10^{58}$  atmosfere per il potassio,  $10^{17}$  atmosfere per lo zinco, ecc.) e inconcepibilmente piccolo per quelli meno ossidabili (ad es.  $10^{-21}$  atmosfere per il rame rispetto agli ioni rameici, ecc.). Gli ordini di grandezza di queste tensioni di soluzione hanno indotto più volte a dubitare della validità della ipotesi di NERNST, la quale tuttavia viene implicitamente o esplicitamente ammessa poichè facilita la trattazione di molti problemi elettrochimici.

Circa la impossibilità di considerare le tensioni elettrochimiche di soluzione come realtà fisiche è anche da notare (in aggiunta alle obiezioni fin'ora esposte) che nel caso di metalli capaci di dar luogo a ioni con valenza diversa (ad esempio oro, rame, nichel, cromo, ferro, ecc.) <sup>(3)</sup> si dovrebbero

---

<sup>(1)</sup> Il coefficiente  $f_c$  non veniva considerato all'epoca in cui Nernst dedusse la equazione sopraricordata. A quell'epoca si consideravano soltanto i gradi di dissociazione degli elettroliti, cosicchè la concentrazione degli ioni veniva espressa da  $\alpha c$ . In prima approssimazione si poneva per le soluzioni saline molto dissociate:  $\alpha = 1$ .

<sup>(2)</sup> Per la differenza fra i valori *apparenti* e i valori REALI dei pot. elettrochimici vedere le Note precedenti e in particolare la Nota I<sup>a</sup> pubblicata nei « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », marzo 1939-XV. Per quanto riguarda i valori dei potenziali elettrochimici assoluti, *apparenti* e *reali*, vedere specialmente la Nota IV pubblicata in questi « Rendiconti » (febbraio 1940-XVIII).

<sup>(3)</sup> Per i metalli che danno origine a ioni elettrolitici con valenza diversa, è noto che ad ogni specie di ioni si fa corrispondere un valore del potenziale elettrochimico normale relativo APPARENTE. Sembra quindi indeciso, per questi metalli, il valore del potenziale elettrochimico che si deve assumere per ricavare mediante i diagrammi esposti nelle note precedenti il valore della corrispondente funzione  $\varphi$  o quello dei correlativi effetti Volta. Si deve però osservare che i valori di  $\varphi$  risultanti dal diagramma di fig. 5 (nota IV) impiegando l'uno o l'altro valore dei pot. el. chimici corrispondenti al diverso grado di ossidazione non risultano tanto differenti da rendere impossibile l'impiego del diagramma stesso ove si abbia lo scopo di conoscere, almeno in prima approssimazione, il valore della funzione elettronica  $\varphi$  e quindi quello dell'effetto Voltiano. Ad esempio, nel caso del rame, se si assume il potenziale elettrochimico apparente relativo all'ione rameico si ottiene



ammettere coesistenti alla superficie del metallo in contatto con l'elettrolita, delle enormemente diverse tensioni di soluzione. Ad esempio per il ferro si avrebbero  $3,5 \cdot 10^6$  atmosfere rispetto agli ioni ferrosi e  $7,6 \cdot 10^{12}$  atmosfere rispetto agli ioni ferrici. Inoltre (e l'osservazione mi sembra particolarmente decisiva) siccome i valori delle ipotetiche tensioni di soluzione eguagliano quelli delle pressioni osmotiche che dovrebbero essere esercitate dagli ioni del metallo contenuti nell'elettrolita allorchando è nulla la differenza di potenziale fra l'elettrodo e l'elettrolita, esse dovrebbero corrispondere alle pressioni determinanti le condizioni di equilibrio statistico fra ioni omonimi contenuti nelle due fasi a contatto. Ma la nozione di equilibrio statistico perde ogni significato, quando le concentrazioni delle particelle disperse raggiungono valori così piccoli come quelli che si dovrebbero ammettere per gli ioni nelle soluzioni in contatto con i metalli meno ossidabili. Anzi lo stesso concetto fisico di pressione esercitata dalle particelle disperse, perde ogni significato per valori così piccoli delle concentrazioni.

D'altra parte è noto che è possibile realizzare sperimentalmente in alcuni di questi casi (rame, argento ecc.) <sup>(1)</sup> condizioni dell'elettrolita per cui  $E = 0$ , cioè condizioni in cui la tensione di soluzione del metallo sarebbe equilibrata (secondo la ipotesi di NERNST) soltanto dalle forze osmotiche esercitate dagli ioni del metallo contenuti nell'elettrolita. Se si accettasse la teoria di NERNST si dovrebbe perciò ammettere la possibilità di realizzare sperimentalmente equilibri statistici in condizioni fisiche certamente non ammissibili.

Nè maggiore consistenza hanno, per analoghe ragioni, le considerazioni derivanti dalla ipotesi della dissoluzione nell'elettrolita di atomi metallici e di un conseguente loro equilibrio con il metallo e con gli ioni metallici omonimi.

2. La teoria da me svolta nelle precedenti Note mostra come, tenendo conto degli effetti Volta esistenti al contatto fra i metalli eterogenei, si

---

$\varphi = 3,95$  Volt, mentre se si assume il pot. el. app. relativo all'ione rameoso si ottiene  $\varphi = 4,05$  Volt. Per il ferro si ha  $3,6$  Volt ove si assuma il potenziale el. app. caratteristico degli ioni ferrosi, e  $3,8$  Volt ove si assuma quello relativo agli ioni ferrici. Considerando la piccola precisione che è generalmente possibile di raggiungere in  $\varphi$  mediante le misure dirette, l'indecisione fra questi valori non è da considerare eccessiva. Quando tratterò della deduzione dei calori di solvatazione dei diversi ioni tornerò su questo argomento; ricordo però fin d'ora che i valori che si debbono assumere sono quelli risultanti dalla misura delle tensioni: elettrodo metallico-elettrolita.

<sup>(1)</sup> Ciò si può ottenere aggiungendo all'elettrolita opportune quantità di reattivi (cianuri alcalini, ecc.) atti a generare la formazione di ioni complessi.



ottengono, sia per i metalli più ossidabili, sia per i metalli più nobili, valori assoluti dei potenziali elettrochimici normali meno elevati di quelli apparenti. Ne segue che le tensioni di soluzione, calcolate in base a questi valori, risultano molto diminuite per i metalli più ossidabili e aumentate per alcuni di quelli più nobili. Ecco ad esempio alcuni valori per i metalli che si trovano verso le due estremità della serie elettrochimica dei potenziali: per il potassio  $P = 10^3$  atmosfere invece di  $10^{53}$  atmosfere, per lo zinco  $10^{-6}$  invece di  $10^{17}$ , per l'oro  $10^{-77}$  invece di  $10^{-81}$  atmosfere. I valori delle tensioni di soluzione calcolati in base ai dati risultanti dalla teoria da me svolta assumono quindi grandezze che fisicamente sarebbero ammissibili nel caso dei metalli più ossidabili, ma permane la impossibilità di accettare i valori che si deducono per metalli meno ossidabili.

Debbo però aggiungere che se invece di  $+0,56$  Volt, corrispondenti al Potenziale assoluto dell'elettrodo normale a calomelano (valore al quale come ho fatto rilevare nella Nota precedente viene generalmente assegnato, per numerose ragioni, il massimo peso), si accettasse il valore  $-0,20$  Volt che secondo le esperienze di BILLITZER, SCHULTZ e BENNEWITZ, misurerebbe il detto potenziale assoluto, i valori dei potenziali assoluti reali dei diversi elettrodi metallici (calcolati tenendo conto dei potenziali Voltiani) diverrebbero ad esempio:  $-0,85$  Volt per il potassio,  $-0,52$  Volt per lo zinco,  $-0,15$  Volt per l'idrogeno (nel platino idrogenato in equilibrio con idrogeno gassoso alla pressione di una atmosfera),  $+0,03$  Volt per il rame,  $+0,37$  Volt per l'argento,  $+0,76$  Volt per l'oro (rispetto agli ioni aurici) e quindi i valori delle corrispondenti tensioni di soluzione risulterebbero dell'ordine di  $10^{16}$  atmosfere per il potassio,  $10^6$  per lo zinco,  $10^{0,4}$  per il rame,  $10^{-5}$  atmosfere per l'argento,  $10^{-34}$  per l'oro. Si avrebbero così anche per i metalli estremi nella serie elettrochimica valori di  $P$  con ordini di grandezza meno lontani da quelli fisicamente accettabili. Ma, come ho detto nella Nota precedente, non sembra che si possa dare, allo stato attuale delle conoscenze, alcun affidamento ai valori del potenziale elettrochimico assoluto dell'elettrodo normale a calomelano, che è stato dedotto dagli autori sopracitati.

4. Colgo l'occasione del presente studio per mostrare come si può arrivare a una espressione che assegna, in modo più rigoroso e più efficace di quanto è stato fatto fin ora, il vero significato fisico delle grandezze individuate da NERNST come tensioni di soluzione.

Indico con  $\Psi$  il valore del potenziale termodinamico (a volume costante) posseduto alla temperatura  $T$  da un grammo ione del metallo  $M$ , quando è contenuto nel metallo, e con  $\Phi$  il valore del potenziale termodinamico posseduto dal grammo ione dello stesso metallo, quando con la valenza  $v$ , e allo stato solvatato, è contenuto nell'elettrolita.

Alla trasformazione reversibile e isoterma corrispondente al passaggio dell'ione del metallo all'elettrolita corrisponde la diminuzione di

energia libera:  $\Psi - \Phi$ , e poichè  $\Phi = \pi + RT \log_e j_e c$  <sup>(1)</sup> risulta:  $\nu F E = \Psi - \pi - RT \log_e j_e c$ , cioè:

$$[2] \quad E = \frac{\Psi - \pi}{\nu F} - \frac{RT}{\nu F} \log_e j_e c$$

Se si confronta questa equazione con la equazione 1), cioè con la:

$$E = \frac{RT}{\nu F} \log_e \frac{P}{RT} - \frac{RT}{\nu F} \log_e j_e c$$

risulta che la grandezza che NERNST ha individuato come una tensione di soluzione ha per espressione:

$$[3] \quad P = RT e^{\frac{\Psi - \pi}{RT}}$$

La cosiddetta *tensione di soluzione del metallo M* non è quindi assimilabile (salvo che mediante troppo ardite ipotesi, fisicamente non giustificabili), a una pressione, ma è misurata dal valore che assume per il dato metallo una funzione esponenziale del lavoro necessario per estrarre reversibilmente un grammo ione di ioni metallici dal metallo facendoli entrare nella soluzione, in modo che la estrazione sia accompagnata, all'atto della entrata nella soluzione, dalla loro combinazione con molecole di solvente formando i corrispondenti solvati e ciò in condizioni da acquistare attività ionica unitaria.

La equazione [2] assegna il significato termodinamico del *potenziale elettrochimico dei metalli* e il suo primo termine del secondo membro determina il valore del parametro chiamato: *potenziale elettrochimico normale dei metalli*.

<sup>(1)</sup>  $\pi$  indica quella funzione della temperatura e dei parametri caratteristici della specie ionica considerata, che compare nella espressione del potenziale termodinamico delle particelle disperse entro al solvente. Per ogni data specie di particelle, ad ogni temperatura, la  $\pi$  ha un valore ben determinato che esprime il valore del potenziale termodinamico delle particelle stesse in condizioni di attività unitaria.

**Chimica.** — *Eteri triselenortoformici*. Nota <sup>(1)</sup> di ALESSANDRO BARONI, presentata <sup>(2)</sup> da GUIDO BARGELLINI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

H. J. BACKER e P. L. STEDEHONDER <sup>(3)</sup> facendo agire il tetracloruro di carbonio sui mercapturi in soluzione alcoolica hanno recentemente preparato gli eteri tritioortoformici corrispondenti alla formula generale  $\text{CH}(\text{SR})_3$  e dimostrato che le precedenti ricerche di CLAEISSON <sup>(4)</sup> secondo il quale con la stessa reazione si otterrebbero gli eteri dell'acido tetratio-ortocarbonico, sono errate. Io ho voluto estendere la stessa reazione ai selenmercapturi per stabilire se il loro comportamento sia identico a quello dei mercapturi e preparare per questa via una classe di composti non ancora noti.

Secondo BACKER l'azione del tetracloruro di carbonio che porta alla formazione di una miscela di disolfuro e di etere tritioortoformico, potrebbe essere spiegata dalla equazione:



Le relazioni stechiometriche di questa non rendono però ragione delle percentuali dei prodotti ottenibili nei quali si osserva la formazione in preponderanza del disolfuro. Ciò può essere spiegato o con una maggiore complessità della reazione o con una facile decomponibilità degli eteri tritioortoformici. Poichè BACKER sottopone i prodotti di reazione ad un isolamento per distillazione in corrente di vapore, ciò può essere ritenuto abbastanza verosimile. Nel caso della reazione del tetracloruro di carbonio coi selenmercapturi io ho trovato però che anche eliminando tale distillazione, si ha una resa molto bassa in eteri triselenortoformici e formazione preponderante di diseleniuri.

La reazione fra i selenmercapturi ed il tetracloruro di carbonio è stata da me applicata ai selenmercapturi metilico, etilico e propilico. Essa

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

<sup>(2)</sup> Nell'Adunanza del 21 marzo 1940-XVIII.

<sup>(3)</sup> « Rec. travaux chimiques Pays Bas », 52, 437 (1933).

<sup>(4)</sup> « J. prakt. Chemie » (2), 15, 212 (1877).

mi ha permesso di realizzare la formazione dei corrispondenti triselenortoformiati. Applicando ad essi la ossidazione acida con permanganato di potassio ho ottenuto i corrispondenti metilentialchilselenoni ed acidi selenici. La ossidazione dei selenortoformiati avviene quindi nello stesso modo trovato da Holmberg <sup>(1)</sup> per gli eteri tritioortoformici; con ciò viene dimostrata la perfetta analogia di comportamento chimico fra zolfo e selenio nei composti organici già da me dimostrata in numerosi casi <sup>(2)</sup>.

#### PARTE SPERIMENTALE.

*Reazione fra metilselenmercaptano e  $\text{CCl}_4$ .* — Ad una soluzione di 2, 3 g di sodio in 60 cc. di alcool etilico ho aggiunto 12 g di metilselenmercaptano preparato col metodo da me precedentemente studiato <sup>(3)</sup>. Alla soluzione ho aggiunto lentamente 4 g di  $\text{CCl}_4$  evitando un innalzamento troppo brusco di temperatura. A reazione ultimata ho diluito la massa con acqua ottenendo la separazione di un olio di color aranciato che ho distillato nel vuoto dopo essiccamento su solfato di sodio anidro. Ho così ottenuto una frazione bollente a  $60^\circ$  a mm 26 le cui caratteristiche corrispondono a quelle del diseleniuro dimetilico e una frazione a punto di ebollizione  $120^\circ$  pure a mm. 26. L'analisi di questa seconda frazione eseguita determinando il selenio come selenio metallico, ha dato i seguenti risultati:

| sostanza pesata | Se pesato | Se % trovato |
|-----------------|-----------|--------------|
| 0,1163          | 0,0936    | 80,49        |
| 0,1041          | 0,0838    | 80,47        |

I valori così ottenuti si identificano con quelli calcolabili per il triselenortoformiato di metile  $\text{CH}(\text{SeCH}_3)_3$  (Se = 80,53 %).

Il triselenortoformiato di metile è un liquido di colore aranciato. Per confermare la sua costituzione ho sottoposto questo prodotto alla ossidazione con permanganato di potassio in soluzione acida. A tale scopo ho trattato 5 g del mio prodotto in sospensione in acido solforico N/1 a  $20^\circ$  con permanganato di potassio fino a colorazione violetta persistente. Ho filtrato la soluzione, la ho estratta con etere e per evaporazione dell'estratto eterico ho ottenuto 0.5 g di un composto a p. f.  $160^\circ$  che ha dato all'analisi i seguenti risultati:

<sup>(1)</sup> « Berichte », 40, 1741 (1907).

<sup>(2)</sup> Questi « Rendiconti », IX, 6°, 772 e 1019 (1929); XI, 6°, 579 (1930); XVI, 6°, 514 (1932); XVI, 6°, 253 (1932); XXVI, 6°, 460 (1937).

<sup>(3)</sup> Questi « Rendiconti », XII, 6°, 234 (1930).

| sostanza pesata | Se pesato | Se % trovato |
|-----------------|-----------|--------------|
| 0,0991          | 0,0587    | 59,20        |
| 0,1246          | 0,0738    | 59,25        |

Se % per il metilenmetilselenone  $\text{CH}_2(\text{SeO}_2\text{C}_2\text{H}_5)_2 = 59,38$ .

La soluzione acquosa la ho neutralizzata con carbonato di bario, ho filtrato il solfato di bario formatosi ed ho poi aggiunto acetone ottenendo la formazione di un precipitato bianco che è risultato essere metilsele-  
niato di bario.

*Reazione fra etilselenmercaptano e  $\text{CCl}_4$ .* - La reazione è stata fatta come per il metilselenmercaptano partendo da una soluzione di 2,3 g di sodio in 60 cc di alcool etilico contenente 10 g di etilselenmercaptano (ottenuto facendo agire ioduro di etile sul selenidrato di sodio in soluzione alcoolica) e aggiungendo lentamente 4 g di tetracloruro di carbonio. Alla distillazione a mm 26 ho ottenuto del diseleniuro dietilico (p. eb. 70°) ed un prodotto a p. eb. 148-150° che alla analisi ha i seguenti risultati:

| sostanza pesata | Se pesato | Se % trovato |
|-----------------|-----------|--------------|
| 0,1145          | 0,0804    | 70,22        |
| 0,1274          | 0,0894    | 70,19        |

Se % teorico per  $\text{CH}(\text{SeC}_2\text{H}_5)_3 = 70,31$ . Anche il triselenortoformiato di etile è un liquido di color arancio. La sua ossidazione con permanganato di potassio eseguita nel modo sopra descritto mi ha permesso di ottenere il metilenetilselenone  $\text{CH}_2(\text{SeO}_2\text{C}_2\text{H}_5)_2$ .

| sostanza pesata | Se pesato | Se % trovato |
|-----------------|-----------|--------------|
| 0,1561          | 0,0837    | 53,60        |
| 0,0973          | 0,0522    | 53,64        |

Se % teorico per  $\text{CH}_2(\text{SeO}_2\text{C}_2\text{H}_5)_2 = 53,71$ . Questo composto fonde a 125°.

*Reazione fra propilselenmercaptano e  $\text{CCl}_4$ .* - Nel modo sopra indicato ho fatto reagire 2,3 g di sodio in 60 cc di alcool etilico con 6 g di propilselenmercaptano (ottenuto da ioduro propilico e selenidrato di sodio in soluzione alcoolica) e 4 g di tetracloruro di carbonio. Alla distillazione a mm 26 ho ottenuto del diseleniuro dipropilico (p. eb. 113°) ed un prodotto a p. eb. 180-182° che alla analisi ha dato i seguenti risultati:

| sostanza pesata | Se pesato | Se % trovato |
|-----------------|-----------|--------------|
| 0,1004          | 0,0627    | 62,42        |
| 0,1178          | 0,0735    | 62,39        |

Se % teorico per  $\text{CH}(\text{SeC}_3\text{H}_7)_3 = 62,51$ .

Per ossidazione permanganica del triselenortoformiato di propile, che è un liquido di colore giallo, ho ottenuto il metilenpropilselenone a p. f.  $112^{\circ}$  che alla analisi ha dato i seguenti risultati:

| sostanza pesata | Se pesato | Se % trovato. |
|-----------------|-----------|---------------|
| 0,1618          | 0,0773    | 47,80         |
| 0,1342          | 0,0641    | 47,78         |

Se% teorico per  $\text{CH}_2(\text{SeO}_2\text{C}_3\text{H}_7)_2 = 47,99$ .

---

**Chimica** (Chimica organica). — *Azione del bromo sull'acido 2,4-dimetil-3-pirrolcarbonico* <sup>(1)</sup>. Nota di FRANCO LANFRANCHI, presentata <sup>(2)</sup> da SABATO VISCO, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Molti anni fa H. FISCHER <sup>(3)</sup>, eseguendo la bromurazione dell'estere etilico dell'acido 2,4-dimetil-3-pirrolcarbonico in ambiente di acido acetico, osservò la formazione di una sostanza intensamente colorata. Il meccanismo di reazione fu perfettamente chiarito. Per azione del bromo si ha dapprima sostituzione di un atomo di idrogeno sia nella posizione  $\alpha$  libera, che nel radicale metilico occupante l'altra posizione  $\alpha$  con conseguente formazione di un dibromopirrolo. In un secondo tempo una molecola del dibromopirrolo reagisce con una seconda molecola del pirrolo non ancora bromurato e con eliminazione di acido bromidrico si ha la formazione di un bromodipirilmetano, che non può venire isolato perchè subito ossidato dal bromo si trasforma in un bromodipirilmetene asimmetrico intensamente colorato.

Nella bromurazione dell'acido 2,4-dimetil-3-pirrolcarbonico, eseguita nelle stesse condizioni del rispettivo estere etilico, fu ottenuto invece dall'A. un prodotto di bromurazione, per il quale non fu stabilita la costituzione chimica. Dai risultati dell'analisi elementare era però da escludere, che la reazione fosse decorsa in maniera analoga all'estere etilico del suddetto acido pirrolcarbonico; cioè nel senso della formazione di un bromodipirilmetene bicarbossilato. Per quanto non fosse riconosciuto, durante la bromurazione, alcuno svolgimento di anidride carbonica, la

---

<sup>(1)</sup> Il presente lavoro, eccezion fatta per alcune microanalisi da me compiute nel laboratorio di microanalisi dell'Istituto di Fisiologia generale di Roma, fu da me completamente eseguito nel Laboratorio di Chimica organica della Technische Hochschule di Monaco sotto la diretta guida del prof. Geh. rat HANS FISCHER, presso il quale ho lavorato con una borsa di studio concessami dal Comitato della Biologia del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

<sup>(2)</sup> Nell'Adunanza del 21 marzo 1940-XVIII.

<sup>(3)</sup> H. FISCHER, « Sitzungsber. des Bayer. Akademie der Wissenschaften », München, 1915, 401.

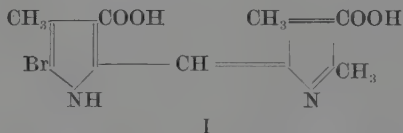


poltiglia rossa cristallina risultò essere insolubile in soluzione di idrato di sodio al 5 %. La sostanza cristallizzata da piridina si presentò in lunghi prismi giallo-rossi senza punto di fusione fino a 290° e all'analisi elementare diede i seguenti risultati:

$$\text{C } \% = 38,09 \quad \text{H } \% = 3,17 \quad \text{N } \% = 6,82 \quad \text{Br } \% = 39,06.$$

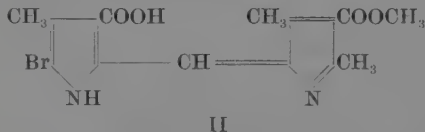
Da allora, la reazione, osservata per la prima volta per l'estere etilico dell'acido 2,4-dimetil-3-pirrolcarbonico, fu riconosciuta generale da H. FISCHER e dalla sua scuola per numerosi altri pirroli aventi una posizione  $\alpha$  libera e l'altra occupata da un radicale metile (<sup>1</sup>).

Durante la mia permanenza a Monaco, per incarico del prof. H. FISCHER e sotto la sua diretta guida, ripresi in esame il prodotto di bromurazione dell'acido 2,4-dimetil-3-pirrolcarbonico. Eseguendo la bromurazione nelle condizioni che sono descritte nella parte sperimentale, ottenni una sostanza rossa, che, cristallizzata da piridina, si presentò in lunghi prismi giallo-rossi senza punto di fusione fino a 240°. Detta sostanza risultò essere il 5-bromo-4,3',5'-trimetil-3,4'-dicarbossipirrometene:



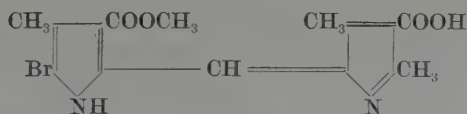
Infatti per quanto i risultati all'analisi concordassero bene solo parzialmente (C e H) per detta formula, la sostanza esterificata con forte eccesso di diazometano, per i risultati all'analisi, risultò essere indubbiamente un estere monometilico del metene I.

Restava però di stabilire se si trattasse del 5-bromo-4,3',5'-trimetil-3-carbossi-4'-carbometossipirrometene:

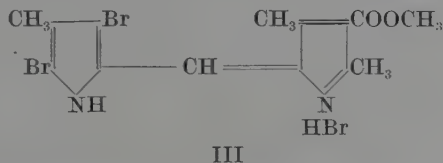


oppure del 5-bromo-4,3',4'-trimetil-3-carbometossi-4'-carbossipirrometene:

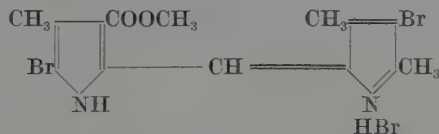
(<sup>1</sup>) Per la letteratura a tal proposito v. H. FISCHER e H. ORTH, *Die Chemie des Pyrrols*. II Band « Akademische Verlags Gesellschaft », m. b. h. Leipzig Cap. *Bromierte Pyrrometene*, pag. 71.



Per stabilire la costituzione chimica di detto estere metilico procedetti alla sua ulteriore bromurazione in ambiente di acido formico ed ottenni un prodotto ben cristallizzato in lunghi aghi prismatici rossi senza punto di fusione. Dai risultati all'analisi risultò che si trattava o del 3,5-dibromo-4,3',5'-trimetil-4'-carbometossipirrometene-bromidrato:

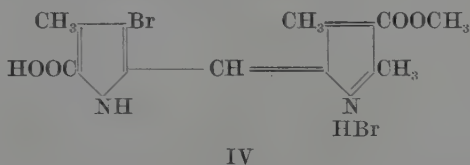


oppure del 5,4'-dibromo-4,3',5'-trimetil-3-carbometossipirrometene-bromidrato:

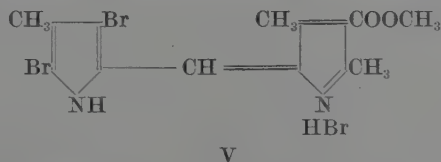


Dal bromidrato ottenni poi la base libera, che cristallizza dall'alcool in lunghe tavole giallo-aranciate con P. F. = 180-182°.

Ora, avendo preparato per bromurazione del 3-bromo-4,3',5'-trime-til-5-carbossi-4'-carbometossipirrometene-bromidrato



(ottenuto condensando l'estere metilico dell'acido 2,4-dimetil-3-pirrol-carbonico con la 3-bromo-4-metil-5-carbossipirrolo-2-aldeide), il 3,5-dibromo-4,3',5'-trimetil-4'-carbometossipirrometene-bromidrato:



e da questo la base libera con P.F. = 180-182°, che risultarono essere perfettamente identici per proprietà e forma di cristallizzazione rispettivamente al composto di bromurazione del pirrometene II e alla sua base libera (un miscuglio delle due basi libere non mostrò depressione nel punto di fusione); risultò evidente che a detto prodotto di bromurazione spetta la formula III che quindi al prodotto di esterificazione del metene I spetta la formula II.

Da quanto precede risulta indubbio, che anche nel caso dell'acido 2,4-dimetil-3-pirrolcarbonico la bromurazione può decorrere in maniera analoga al suo estere etilico. Certamente da H. FISCHER fu ottenuto un composto diverso dal metene I - lo dimostrano i risultati dell'analisi da lui ottenuti - e non è improbabile che ad altri, ripetendo la bromurazione in condizioni sperimentali di poco variate, possa accadere di preparare lo stesso composto. Io stesso ho potuto constatare come possa variare il prodotto di bromurazione con la velocità con la quale si aggiunge il bromo. Se infatti invece di bromurare molto rapidamente aggiungendo d'un colpo brusco tutto il bromo, si bromura lentissimamente e raffreddando si ottiene tutt'altro prodotto di bromurazione. Questo esterificato con diazometano risultò all'analisi cromatografica costituito da diversi composti, che non furono però ulteriormente studiati.

#### PARTE SPERIMENTALE.

##### *5-bromo-4,3', 5'-trimetil-3,4'-dicarbossipirrometene (I).*

2,5 gr. dell'acido 2,4-dimetil-3-pirrolcarbonico <sup>(1)</sup> vengono sciolti in 10 cc. di acido acetico glaciale e bromurati con 2 mol. di bromo (gr. 5,8) sciolti in 5 cc. di acido acetico glaciale. La soluzione del bromo viene versata nella soluzione del pirrolo con movimento brusco tutta in una volta (forte svolgimento di calore e tumultuoso svolgimento di acido bromidrico).

Il prodotto di bromurazione viene lasciato stare per una notte a sè, dopo di che viene filtrato alla pompa, sospeso in alcool ed infine lavato ripetutamente con etere. Il prodotto appare allora di un rosso più vivo. Rendimento gr. 6. Il prodotto greggio viene con forte perdita cristallizzato dalla piridina: dopo di che, risultando contenere delle ceneri, viene estratto con etere, nel quale è pochissimo solubile. Infine viene ancora una volta cristallizzato dalla piridina, che viene completamente allontanata per riscaldamento a 70° durante 24 ore, dopo che per un'ora era stato fatto il vuoto spinto con una pompa a mercurio. Il prodotto pronto per

<sup>(1)</sup> L. KNOOR, «A.», 236, 326 (1886).

L'analisi si presenta all'esame microscopico ben omogeneamente cristallizzato in lunghi prismi giallo-rossi. Scaldato fino a  $240^{\circ}$  non fonde ma a poco a poco si decompone. La sostanza risulta insolubile in tutti i solventi organici salvo che nella piridina. La presenza di almeno un carbossile viene dimostrata dal fatto, che la sostanza sciolta con soluzione di carbonato di sodio è riprecipitabile con acido cloridrico e confermata dal fatto che è facilmente esterificabile con soluzione eterea di diazometano. Alla analisi dà i seguenti risultati <sup>(1)</sup>:

Calc. C % = 47,58      H % = 3,71

Trov. C % = 47,51      H % = 3,72

*5-bromo-4,3', 5'-trimetil-3-carbossi-4'-carbometossipirrometene* (II).

Il prodotto greggio risultante dalla bromurazione dell'acido 2,4-dimetil-3-pirrolcarbonico, lavato con alcool ed etere, viene esterificato con un grande eccesso di diazometano. Ad esterificazione avvenuta la soluzione viene concentrata su bagnomaria. Il prodotto giallo-aranciato, che precipita, viene filtrato, estratto con un poco di etere ed infine cristallizzato da alcool metilico. P.F. =  $176-178^{\circ}$ .

Alla microanalisi dà i seguenti risultati <sup>(1)</sup>:

Calc. C % = 49,03      H % = 4,12      N % = 7,63      Br % = 21,77

— OCH<sup>3</sup> % = 7,90.

Trov. C % = 48,54      H % = 4,45      N % = 7,53      Br % = 22,59

— OCH<sub>3</sub> % = 8,26.

*3-bromo-4,3', 5'-trimetil-5-carbossi-4'-carbometossipirrometene-bromidrato* (IV).

A un miscuglio finemente polverizzato di g. 0,5 dell'estere metilico dell'acido 2,4-dimetil-3-pirrolcarbonico (preparato esterificando con diazometano l'acido corrispondente e ricristallizzato con acetato di etile) e di 0,8 gr. della 3-bromo-4-metil-5-carbossipirrolo-2-aldeide <sup>(2)</sup> vengono aggiunti 5 cc. di acido acetico glaciale. Il miscuglio, contenuto in una provetta, viene agitato, fregando contro le pareti, con una bacchetta di vetro. Una buona parte della sostanza dapprima si discioglie; ma, conti-

<sup>(1)</sup> Le analisi dei composti I e II furono eseguite nel Laboratorio di microanalisi della Technische Hochschule di Monaco.

<sup>(2)</sup> H. FISCHER, H. BERG e A. SCHORMÜLLER, « A. », 480, 155 (1930).

nuando ad agitare e contemporaneamente raffreddando con ghiaccio, si ha poi una densa poltiglia (carbinolo?). A questo punto vengono aggiunte cc. 1.5 di acido bromidrico conc. ( $d = 1,48$ ) ed agitando continuamente si ha la separazione del metene di colore giallo-aranciato. La sostanza viene filtrata alla pompa, lavata dapprima con un poco di acido acetico glaciale, poi ripetutamente con etere ed infine seccata in essiccatore contenente alcali. Rendimento gr. 1,1.

Non essendoci stato possibile in alcun modo ricristallizzare il metene, (in acido acetico si scioglie a caldo ma con decarbossilazione) non fu analizzato.

*3,5-dibromo-4,3',5'-trimetil-4'-carbometossipirrometene-bromidrato (III e V).*

*Composto III.* - I gr. del 5-bromo-4,3',5'-trimetil-3-carbossi-4'-carbometossipirrometene (II) viene sciolto in 5 cc. di acido formico a 96 % e viene bromurato con g. 0,5 di bromo (1 mol.). Il bromo viene aggiunto in una sola volta senza che si abbia riscaldamento. La bromurazione avviene con vivace svolgimento di anidride carbonica. Quasi immediatamente comincia a formarsi una poltiglia cristallina rosso-scarlatta con cristalli macroscopici, che viene filtrata dopo 12 ore. La sostanza è insolubile sia a freddo che a caldo in soluzioni di carbonato e idrato di sodio. Facilmente solubile anche a freddo in cloroformio, lo è invece solo a caldo in acido acetico glaciale e acido formico al 96 %, dal quale viene ricristallizzato. La sostanza, che si presenta cristallizzata in lunghi aghi prismatici rossi senza punto di fusione, alla microanalisi diede i seguenti risultati (1):

|       |             |            |            |
|-------|-------------|------------|------------|
| Calc. | C % = 34,79 | H % = 3,13 | N % = 5,80 |
| Trov. | C % = 35,00 | H % = 3,30 | N % = 5,91 |

mgr. 5,498 di sostanza diedero mgr. 7,056 di  $\text{CO}_2$  e mgr. 1,622 di  $\text{H}_2\text{O}$   
mgr. 4,135 di sostanza diedero a  $18^\circ$  e 751 mm. 0,211 cc. di N.

*Composto V.* - 0,4 g. del 3-bromo-4,3',5'-trimetil-5-carbossi-4'-carbometossipirrometene-bromidrato (IV) vengono messi in sospensione in 3 cc. di acido formico al 96 % e bromurati con 1 gr. di bromo sciolto in 1 cc. di acido formico. La bromurazione inizia a freddo (scarso svolgimento di gas) viene terminata a caldo su bagnomaria d'acqua calda. Col raffreddamento comincia a separarsi una poltiglia cristallina rosso-

---

(1) Le analisi furono da me eseguite al mio ritorno dalla Germania nel Laboratorio di microanalisi dell'Istituto di Fisiologia generale di Roma.

scarlatta, che viene filtrata alla pompa dopo che per 12 ore fu abbandonata a sè. La sostanza facilmente solubile anche a freddo in cloroformio, lo è invece solo a caldo in acido acetico glaciale e acido formico al 96 %, dal quale viene ricristallizzato. La sostanza si presenta cristallizzata in lunghi aghi prismatici rossi senza punto di fusione, che all'esame microscopico risultano essere perfettamente identici a quelli del composto III. La microanalisi dà i seguenti risultati <sup>(1)</sup>:

|       |             |            |             |
|-------|-------------|------------|-------------|
| Calc. | C % = 34,79 | H % = 3,13 | N % = 5,80. |
| Trov. | C % = 34,51 | H % = 3,35 | N % = 6,00  |

mgr. 5,215 di sostanza diedero mgr. 6,599 di CO<sub>2</sub> e mgr. 1,562 di H<sub>2</sub>O  
mgr. 3,976 di sostanza diedero a 17° e 755 mm. cc. 0,204 di N.

*3,5-di bromo-4,3', 5'-trimetil-4'-carbometossipirrometene* (Basi libere del comp. III e V).

g. 0,2 del bromidrato vengono sciolti a caldo in 50 cc. di alcool metilico contenente 2,5 cc. di una soluzione acquosa di ammoniaca al 26 %. A freddo si separa la base libera cristallizzata in lunghe tavole giallo aranciate. Per l'analisi la base libera fu ricristallizzata da alcool metilico. P.F. = = 180-182°.

Risultati dell'analisi per la base libera dal composto III <sup>(2)</sup>.

|       |             |            |            |
|-------|-------------|------------|------------|
| Calc. | C % = 41,79 | H % = 3,51 | N % = 6,97 |
| Trov. | C % = 41,48 | H % = 3,31 | N % = 7,10 |

mgr. 5,598 di sostanza diedero mgr. 8,514 di CO<sub>2</sub> e mgr. 1,656 di H<sub>2</sub>O  
mgr. 3,619 di sostanza diedero a 17° e 754 mm. cc. 0,220 di N.

Risultati dell'analisi per la base libera dal composto V <sup>(1)</sup>.

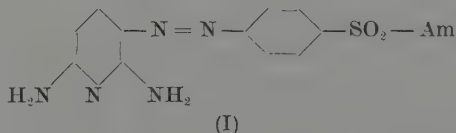
|       |             |            |            |
|-------|-------------|------------|------------|
| Calc. | C % = 41,79 | H % = 3,51 | N % = 6,97 |
| Trov. | C % = 42,10 | H % = 3,38 | N % = 6,88 |

mgr. 4,911 di sostanza diedero mgr. 7,581 di CO<sub>2</sub> e mgr. 1,484 di H<sub>2</sub>O  
mgr. 4,320 di sostanza diedero a 19° 749 mm. cc. 0,258 di N.

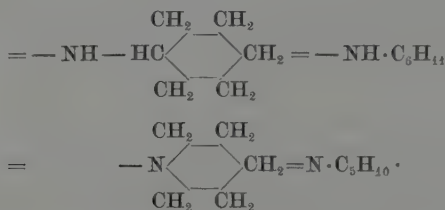
<sup>(1)</sup> Loc. cit. in <sup>(1)</sup> a pag. 552.

**Chimica.** — *Ricerche sulle solfonamidi*<sup>(1)</sup>. Nota II di ANGELO MANGINI, presentata<sup>(2)</sup> da GUIDO BARGELLINI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

In continuazione delle mie ricerche, per la impostazione delle quali rimando a quanto già detto nella Nota I<sup>(3)</sup>, descrivo qui la preparazione di altri nuovi derivati azo-piridin-solfonamidici, rispondenti alla formula generale (I).



in cui  $\text{Am} = -\text{NH} \cdot \text{CH}_2 \cdot \text{CH} : \text{CH}_2 = -\text{NH} \cdot \text{C}_3\text{H}_5$



Questi composti (form. I) pertanto, possono considerarsi gli analoghi solfonamidici degli azoici piridinici [Piridium-II<sup>(4)</sup>, 4'-etossi-fenil-3-azo-2-6-diamino-piridina-III<sup>(5)</sup>, Neotropina-IV<sup>(6)</sup>, ecc.] che per la loro

(<sup>1</sup>) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Industriale della R. Università di Bologna.

(<sup>2</sup>) Nell'Adunanza del 21 marzo 1940-XVIII.

(<sup>3</sup>) Questi « Rendiconti ».

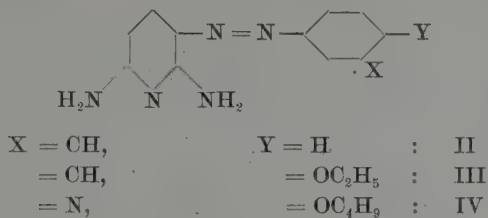
(<sup>4</sup>) D. R. P. 515781; « J. Am. Chem. Soc. », 56, 1713 (1934).

(<sup>5</sup>) « J. Am. Chem. Soc. », loc. cit.

(<sup>6</sup>) D. R. P. 543288.



spiccata azione bactericida trovano — come è noto — largo impiego nella terapia anticoccica:

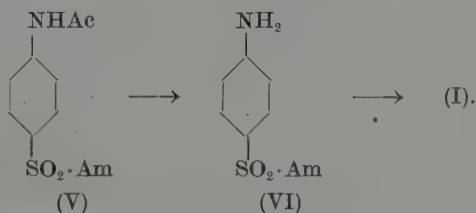


I composti —I, sono stati preparati secondo quanto è stato riferito nella Nota precedente <sup>(3)</sup>, cioè:

1) il *p*-acetil-amino-fenil-solfocloruro è stato fatto reagire con allilamina, cicloesilamina, e piperidina;

2) le acetil-fenil-solfonamidi —V sono state idrolizzate con acido cloridrico, e hanno fornito le *p*-amino-fenil-solfonamidi —VI;

3) le solfonamidi —VI, infine, diazotate in soluzione cloridrica e copulate con la 2-6-diamino-piridina, hanno fornito le azo-piridin-solfonamidi —I:



#### PARTE SPERIMENTALE.

*p*-Acetil-amino-fenil-solfonamidi (form. V). — Sono state preparate per reazione di 1 mol. di acetil-amino-fenil-solfocloruro (da cloridrina solforica e acetanilide), sospese in acqua (metodo I) o in miscuglio a parti uguali acqua-acetone (metodo II), con 1 mol. di amina in presenza di carbonato potassico (a), o con 2 mol. di base (b): operando come è stato descritto nella precedente Nota. I prodotti si ottengono sempre con buoni rendimenti, e si possono usare senza ulteriori purificazioni per la saponificazione ad amino-fenil-solfonamidi; dopo purificazione sono incolore. I risultati sono raccolti nella tabella I.

*p*-Amino-fenil-solfonamidi (form. VI). — Si ottengono per ebollizione con acido cloridrico (1 : 1). Dopo l'idrolisi le soluzioni, trattate con carbone animale e filtrate, sono state evaporate a 1/3 del proprio volume, e neutralizzate con carbonato di sodio (rosso-congo).

TABELLA I.

| form. V<br>Am =                               | metodo<br>prepar. | solvente<br>cristallizzazione | forma<br>cristallina | p. f.                                 | formula                                                  | N %     |       |
|-----------------------------------------------|-------------------|-------------------------------|----------------------|---------------------------------------|----------------------------------------------------------|---------|-------|
|                                               |                   |                               |                      |                                       |                                                          | calcol. | trov. |
| $-\text{NH}-\text{C}_3\text{H}_5$             | I — a             | acido acetico<br>40 %         | prismi               | 154 $\frac{1}{2}$ — 155 $\frac{1}{2}$ | $\text{C}_{11}\text{H}_{14}\text{O}_3\text{N}_2\text{S}$ | 11,02   | 11,15 |
| $-\text{NH}\cdot\text{C}_6\text{H}_{11}$      | II — a            | alcool                        | aghi setacei         | 217 $\frac{1}{2}$ — 218 $\frac{1}{2}$ | $\text{C}_{14}\text{H}_{20}\text{O}_3\text{N}_2\text{S}$ | 9,45    | 9,75  |
| $-\text{N}\cdot\text{C}_5\text{H}_{10}^{(?)}$ | II — b            | acido acetico<br>40 %         | prismi quad.         | 156 — 157                             | $\text{C}_{13}\text{H}_{18}\text{O}_3\text{N}_2\text{S}$ | 9,92    | 9,80  |

Le basi libere, si purificano per cristallizzazione e sono incolori (cfr. tabella II).

*Azo-piridin-solfonamidi (form. I).* — Ho operato come è stato riferito nella Nota precedente: il cloridrato dell'azocolore, decomposto come al solito con carbonato di sodio, ha fornito la base azoica, che è stata purificata per cristallizzazione (cfr. tabella III).

TABELLA II.

| form. VI<br>Am =                              | solvente<br>cristallizzato | forma<br>cristallina | p. f.     | formula                                                  | N. %    |       |
|-----------------------------------------------|----------------------------|----------------------|-----------|----------------------------------------------------------|---------|-------|
|                                               |                            |                      |           |                                                          | calcol. | trov. |
| $-\text{NH}\cdot\text{C}_3\text{H}_5$         | alcool diluito             | tavole prism.        | 85 — 86   | $\text{C}_9\text{H}_{12}\text{O}_2\text{N}_2\text{S}$    | 13,20   | 13,38 |
| $-\text{NH}\cdot\text{C}_6\text{H}_{11}$      | benzolo                    | aghi                 | 109 — 110 | $\text{C}_{12}\text{H}_{18}\text{O}_2\text{N}_2\text{S}$ | 11,02   | 10,92 |
| $-\text{N}\cdot\text{C}_5\text{H}_{10}^{(?)}$ | alcool diluito             | tavolette            | 165 — 166 | $\text{C}_{11}\text{H}_{16}\text{O}_2\text{N}_2\text{S}$ | 11,66   | 11,80 |

(?) « Chem. Zentr. », 1939, I, 4935.

TABELLA III.

| form. I<br>Am =                    | solvente<br>cristalliz. | forma<br>cristallina<br>e colore       | p. f.   | formula                                                         | N. %    |       |
|------------------------------------|-------------------------|----------------------------------------|---------|-----------------------------------------------------------------|---------|-------|
|                                    |                         |                                        |         |                                                                 | calcol. | trov. |
| —NH—C <sub>3</sub> H <sub>5</sub>  | (*)                     | tavolette<br>rosso-vivo                | 149—150 | C <sub>14</sub> H <sub>16</sub> O <sub>2</sub> N <sub>6</sub> S | 25,30   | 25,50 |
| —NH—C <sub>6</sub> H <sub>11</sub> | alcool                  | tavolette<br>rombiche<br>rosso-granato | 160—161 | C <sub>17</sub> H <sub>22</sub> O <sub>2</sub> N <sub>6</sub> S | 22,45   | 22,60 |
| —N·C <sub>5</sub> H <sub>10</sub>  | alcool                  | aghi gialli<br>a ciuffo                | 195—196 | C <sub>16</sub> H <sub>20</sub> O <sub>2</sub> N <sub>6</sub> S | 23,33   | 23,25 |

(\*) Il composto non è di facile purificazione; lo si può ottenere allo stato puro, sciogliendo la base azoica greggia in alcool assoluto in presenza di nero animale, diluendo la soluzione filtrata con ugual volume di benzolo, e aggiungendo quindi molto etere di petrolio: è necessario ripetere il trattamento almeno 3 volte.

Anche per i composti ora descritti sono in corso le ricerche sulla attività chemioterapica.

**Chimica.** — *Spettro Raman di alcune aldeidi terpeniche* <sup>(1)</sup>.  
Nota di REGINALDO MANZONI ANSIDEI, presentata <sup>(2)</sup> dall'Accademico GIAN BATTISTA BONINO.

Già in un precedente lavoro <sup>(3)</sup> avevo studiato lo spettro RAMAN dell'aldeide della canfora (ossimetilencanfora) composto al quale CLAISEN e collaboratori <sup>(4)</sup> hanno assegnato una formula ossimetilenica. È noto però che lo stesso CLAISEN osserva come in molte reazioni il comportamento dell'aldeide della canfora si avvicini a quello di un composto aldeidico.

Lo spettro RAMAN mostra nell'aldeide della canfora due righe riferibili a C=O carbonilici: una di queste può corrispondere alla riga del C=O chetonico, presentata pure dalla canfora, e l'altra è stata attribuita ad un sistema in risonanza quantica tra la forma aldeidica e la forma ossimetilenica a cui può dar luogo il gruppo formilico legato alla molecola stessa della canfora.

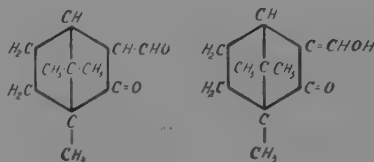


Fig. 1.

Riferisco in questa Nota le ricerche che ho eseguite sullo spettro Raman di 4 aldeidi che hanno con l'aldeide della canfora dei caratteri di analogia: e cioè l'aldeide del mentone (I), del carvone (II), del  $\beta$ -tuione (III), del pulegone (IV).

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica fisica ed elettrochimica della R. Università di Bologna.

<sup>(2)</sup> Nell'Adunanza del 21 marzo 1940-XVIII.

<sup>(3)</sup> BONINO, MANZONI ANSIDEI, « Ric. Scient. », VI, 2, n. 5-6 (1935).

<sup>(4)</sup> L. CLAISEN, A. W. BISHOP, W. SINCLAIR, « Ann. », 281, 314 (1894).

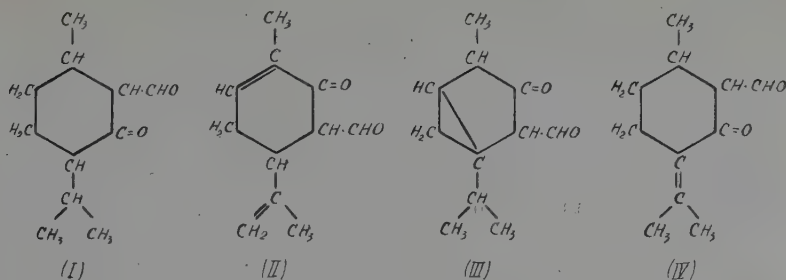


Fig. 2.

## PARTE SPERIMENTALE.

Ho preparato le 4 aldeidi studiate utilizzando il metodo consigliato da CLAISEN e collaboratori <sup>(5)</sup> e da WALLACH <sup>(6)</sup> facendo cioè reagire formato di amile con il chetone terpenico corrispondente in presenza di sodio metallico in etere anidro. I prodotti di reazione, per togliere qualsiasi impurezza di chetone, sono stati purificati attraverso il loro sale sodico, dal quale in soluzione acquosa è stata rigenerata l'aldeide trattando in modo assai cauto con acido acetico. Le aldeidi così ottenute furono poi accuratamente purificate per distillazione frazionata nel vuoto.

I) 1-metil-4-metoetil-2-metilal-cicloesano-3) oppure 1-metil-4-metoetil-2-metenol-cicloesano-3), (aldeide del mentone, oppure ossimetilenmentone) - preparato secondo CLAISEN e collaboratori, p. eb. 98° a 3 mm/Hg, 106° a 5 mm Hg, 121° a 12 mm/Hg, 250° a 760 mm Hg. Liquido incolore.

II) 1-metil-4-metoetenil-5-metilal-cicloesene-(1)-one-(6), oppure 1-metil-4-metoetenil-5-metenol-cicloesene-(1)-one-(6), (aldeide del carvone oppure ossimetilencarvone), preparato secondo WALLACH, p. e. 113-114° a 4 mm/Hg. Liquido leggermente colorato in giallo.

III) 4-metil-1-metoetil-2-metilal-biciclo-(0.1.3) esano-3), oppure 4-metil-1-metoetil-2-metenol-biciclo-(0.1.3)-esano-3) (aldeide del β-tuione oppure ossimetilen-β-tuione) preparato secondo WALLACH, p. f. 39-40°; p. e. 116-118° a 16 mm/Hg, 95° a 3 mm/Hg, cristalli incolori; lo spettro RAMAN è stato eseguito sulla sostanza allo stato fuso.

IV) 1-metil-4-isopropiliden-2-metilal-cicloesano-3), oppure 1-metil-4-isopropiliden-2-metenol-cicloesano-3), (aldeide del pulegone oppure ossimetilenpulegone) - questa aldeide non è descritta nella biblio-

<sup>(5)</sup> CLAISEN, BISHOP, SINCLAIR, v. 1. c.

<sup>(6)</sup> WALLACH, « Ber. », 28, 33 (1895).

grafia. È stata preparata secondo il metodo generale indicato, p. e. 119° a 2 mm/Hg. Liquido leggermente colorato in giallo.

Tutte queste sostanze sono facilmente alterabili all'aria perciò le esperienze furono eseguite distillando a pressione ridotta le sostanze direttamente in tubi RAMAN che venivano poi chiusi alla lampada secondo le norme già seguite altre volte (7). La leggera colorazione gialla dei composti II e IV non ha permesso di avere degli spettri assai completi. Però per tutte le sostanze esaminate la zona dello spettro RAMAN a 1500–1700  $\text{cm}^{-1}$ , dove si trovano le manifestazioni dei gruppi C=O, risulta completa e nettissima.

#### SPETTRI RAMAN.

*Aldeide del mentone.* –  $\Delta\nu$ : 163 (1 dif), 321 ( $1\frac{1}{2}$ ), 389 (1), 415 (1), 576 (0), 651 (5), 678 (0), 768 (1), 811 (1), 942 (3 dif), 956 (2 dif), 993 ( $1\frac{1}{2}$ ), 1033 ( $1\frac{1}{2}$ ), 1093 ( $1\frac{1}{2}$ ), 1128 (5), 1162 (1), 1201 (2), 1252 ( $3\frac{1}{2}$ ), 1304 (3), 1339 (3), 1455 (4 dif), 1583 (5 dif), 2852 ( $1\frac{1}{2}$  dif), 2874 (3 dif), 2931 (2 dif), 2967 (2 dif).

*Aldeide del carbone.* –  $\Delta\nu$ : 972 ( $1\frac{1}{2}$ ), 1047 (1), 1304 (1), 1355 (2 dif), 1424 (1 dif), 1571 (3 dif), 1640 (4), 2922 (1), 2988 (1).

*Aldeide del  $\beta$ -tuione.* –  $\Delta\nu$ : 88 ( $1\frac{1}{2}$  dif), 145 (1), 194 (1), 296 ( $1\frac{1}{2}$ ), 306 ( $1\frac{1}{2}$ ), 336 (1), 395 ( $1\frac{1}{2}$ ), 442 ( $1\frac{1}{2}$ ), 487 ( $1\frac{1}{2}$ ), 514 ( $1\frac{1}{2}$ ), 571 ( $1\frac{1}{2}$ ), 659 (1), 685 (5), 754 (0), 814 (1), 863 (1), 898 (1), 933 ( $1\frac{1}{2}$ ), 983 ( $1\frac{1}{2}$ ), 1044 ( $1\frac{1}{2}$ ), 1082 ( $1\frac{1}{2}$ ), 1117 (1), 1154 (0), 1213 ( $1\frac{1}{2}$ ), 1248 (1), 1268 ( $1\frac{1}{2}$ ), 1330 (1), 1395 (3 dif), 1455 (2 dif), 1600 (6 dif), 1674 (1), 2876 (3 dif), 2903 (2 dif), 2937 (2 dif), 2969 (2 dif), 2995 (2 dif), 3034 ( $1\frac{1}{2}$  dif), 3071 ( $1\frac{1}{2}$  dif).

*Aldeide del pulegone.* –  $\Delta\nu$ : 867 (1), 896 ( $1\frac{1}{2}$ ), 937 ( $1\frac{1}{2}$ ), 975 (1), 1014 ( $1\frac{1}{2}$ ), 1129 (2), 1154 (2), 1200 (2), 1306 ( $1\frac{1}{2}$ ), 1334 (2), 1362 ( $1\frac{1}{2}$ ), 1603 (4 dif), 1625 (2 dif), 2825 (1), 2872 (2), 2915 (1).

#### DISCUSSIONE DEI RISULTATI.

La discussione degli spettri RAMAN delle sostanze sopradescritte viene limitata alla zona tra 1550–1800  $\text{cm}^{-1}$ , zona nella quale cadono le righe che competono ai gruppi C=O sia chetonici che presumibilmente aldeidici.

Nella seguente tabella sono riferiti (per questa zona) gli spettri delle aldeidi studiate in confronto con quelli dei chetoni terpenici di partenza: cioè si paragona lo spettro del mentone con quello della sua aldeide, quello

(7) BONINO, MANZONI, ANSIDEI, PRATESI, « Z. phys. Chem. », B. 22, 21 (1933). 25, 348 (1934) ecc.

del carvone con quello della sua aldeide ecc. Nello spettro RAMAN del mentone e del  $\beta$ -tuione, come già avevano osservato BONINO e CELLA <sup>(8)</sup>, la riga del C=O chetonico è (come del resto la riga del C=O della canfora) in una posizione al di sopra di  $1700\text{ cm}^{-1}$ , ciò che dimostrerebbe che il gruppo funzionale corrisponde ad un C=O chetonico tipico ed isolato. Nello spettro RAMAN del carvone e del pulegone la coniugazione del C=O chetonico ad un doppio legame C=C porta un abbassamento della frequenza del C=O, come è stato trovato anche in molti altri casi.

*Tabella delle righe RAMAN attribuibili ai gruppi C=C e C=O*

| SOSTANZA                                  | Frequenza Raman tra $1550\text{-}1800\text{ cm}^{-1}$ |          |               |
|-------------------------------------------|-------------------------------------------------------|----------|---------------|
|                                           | C=O aldeidico (perturbato)                            | C=C      | C=O chetonico |
| Canfora <sup>(9)</sup> . . . . .          | —                                                     | —        | 1734 (2)      |
| Aldeide della canfora . . . .             | 1640 (2 dif)                                          | —        | 1716 (1)      |
| Mentone <sup>(10)</sup> . . . . .         | —                                                     | —        | 1714 (3)      |
| Aldeide del Mentone . . . .               | 1583 (5 dif)                                          | —        | —             |
| Carvone <sup>(10)</sup> . . . . .         | —                                                     | 1646 (5) | 1673 (5)      |
| Aldeide del Carvone . . . .               | 1571 (4 dif)                                          | 1640 (4) | —             |
| $\beta$ -Tuione <sup>(10)</sup> . . . . . | —                                                     | 1688 (2) | 1750 (3)      |
| Aldeide del $\beta$ -Tuione . . . .       | 1600 (6 dif)                                          | 1674 (1) | —             |
| Pulegone <sup>(10)</sup> . . . . .        | —                                                     | 1617 (5) | 1673 (5)      |
| Aldeide del Pulegone . . . .              | 1603 (4 dif)                                          | 1625 (2) | —             |

Nell'aldeide della canfora l'interazione del gruppo formilico con quello chetonico porta sia alla comparsa di una riga a questo corrispondente, sia ad un leggero abbassamento della frequenza del CO chetonico preesistente.

Nelle 4 aldeidi studiate invece si ha un comportamento del tutto caratteristico. E cioè l'introduzione del gruppo formilico porta alla scom-

<sup>(8)</sup> BONINO, CELLA, vedi nota <sup>(10)</sup>.

<sup>(9)</sup> BONINO, MANZONI ANSIDEI, vedi nota <sup>(8)</sup>.

<sup>(10)</sup> BONINO, CELLA, « Mem. R. Acc. Italia », 3 (1932); vedi anche W. R. ANGUS, « Proc. Indian. Acc. », A. 8, 529 (1938).



parsa della riga del  $C=O$  chetonico preesistente nella molecola terpenica e la comparsa di una riga « assai bassa » (relativamente alla posizione ordinaria delle righe RAMAN riferibili a gruppi  $C=O$ ) che verosimilmente corrisponde ad un gruppo  $C=O$  fortemente perturbato e probabilmente mesomerizzato con il doppio legame di una eventuale forma ossimetilenica. Un fatto nuovo osservato sta dunque nella scomparsa di ogni traccia della riga del  $C=O$  chetonico.

Diverse ipotesi potrebbero essere fatte per spiegare questo comportamento singolare delle aldeidi terpeniche. Preferisco però, prima di procedere alla formulazione ed alla discussione di queste ipotesi allargare il numero di dati sperimentali sia studiando lo spettro RAMAN di altre sostanze strutturalmente analoghe sia sottoponendo le stesse ad indagini chimico-fisiche di altra natura. Invero ben poco conosciute, sono ancora le proprietà chimico-fisiche di composti di questo tipo.

Ringrazio il prof. G. B. BONINO per l'interesse addimostrato a questa ricerca; ringrazio pure il dott. GIACOMO LEMETRE per la collaborazione prestatami nella preparazione delle sostanze quivi studiate.

---

**Chimica** (Chimica inorganica) — *Contributi sperimentali alla conoscenza della struttura degli ioni  $\text{XO}_3$* . — b) *Spettri Raman di nitrati di ioni tri- e tetravalenti* <sup>(1)</sup>. Nota di MARIO ROLLA, presentata <sup>(2)</sup> dall'Accademico GIAN BATTISTA BONINO.

Si attribuisce generalmente al ione nitrico  $\text{NO}_3^-$  una struttura piana, con l'atomo di azoto al centro di un triangolo equilatero, i cui vertici sono occupati dai tre atomi di ossigeno <sup>(3)</sup>; tale struttura corrisponde al tipo di simmetria  $D_{3h}$ .

Questa ipotesi poggia principalmente sui seguenti fatti sperimentali:

1° lo spettro Raman eseguito su soluzioni acquose di nitrati di cationi monovalenti, mostra l'esistenza di tre oscillazioni che cadono intorno a 720, 1050 a  $1350\text{ cm}^{-1}$ , deboli la prima e la terza, molto intensa invece la seconda.

2° Lo spettro ultrarosso presenta massimi di assorbimento a 692, 830 e  $1390\text{ cm}^{-1}$  <sup>(4)</sup>. Pertanto lo spettro ultrarosso mostra una oscillazione ( $830\text{ cm}^{-1}$ ), che non compare nello spettro Raman, mentre questo ne fornisce una a 1050 che non compare nell'ultrarosso.

3° La riga Raman  $1350\text{ cm}^{-1}$  è quasi completamente polarizzata, mentre la riga  $720\text{ cm}^{-1}$  è quasi completamente depolarizzata ( $\rho \div 6.7$ ) <sup>(5)</sup>.

Ora, lo studio delle oscillazioni molecolari eseguito con l'aiuto della teoria dei gruppi, come ho già mostrato in un precedente lavoro <sup>(6)</sup>, permette appunto di prevedere per una molecola a simmetria  $D_{3h}$ , 3 oscilla-

---

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica fisica ed Elettrochimica della R. Università di Bologna.

<sup>(2)</sup> Nell'Adunanza del 21 marzo 1940—XVIII.

<sup>(3)</sup> Ved., per es., ANANTHAKRISHNAN, « Proc. Ind. Acad. Sc. », V, 447 (1937); KUCUMZELIS, « Z. f. Phys. », 109, 586 (1938); MECKE, « Handb. u. Jahrb. d. Chem. Phys. », 9, II, 384 (1934); WEILER, « Naturwissensch. », 23, 128 (1935); ZACHARIASEN, « Phys. Rev. », 37, 775 (1931); SLATER, « Phys. Rev. », 38, 325 (1931).

<sup>(4)</sup> SCHAEFER e SCHUBERT, « Ann. d. Phys. », 55, 577 (1918); SCHAEFER e BORMUTH, « Z. f. Phys. », 62, 508 (1930).

<sup>(5)</sup> GRASSMANN, « Z. f. Phys. », 77, 616 (1932).

<sup>(6)</sup> M. ROLLA, « Gazz. Chim. Ital. », 60, 779 (1939).

zioni attive in effetto Raman e 3 in ultrarosso. Due di queste oscillazioni, indicate nei lavori spettroscopici con  $\omega_3$  e  $\omega_4$ , sono doppiamente degeneri e compaiono in ambedue gli spettri. Queste due oscillazioni, la 720 e la 1360  $\text{cm}^{-1}$ , sono del tipo  $E'$ , come è mostrato nella tabella I. Una oscillazione totalsimmetrica del tipo  $A_1$ , indicata con  $\omega_1$ , deve essere attiva e polarizzata in Raman, inattiva in ultrarosso: si individua subito questa oscillazione nella 1050  $\text{cm}^{-1}$ . Infine la vibrazione perpendicolare del tipo  $A_2''$ , indicata con  $\omega_2$  che deve essere inattiva in effetto Raman ed attiva in ultrarosso, è la 830  $\text{cm}^{-1}$ .

TABELLA I.

Gruppo  $\text{XO}_3^-$  a simmetria  $D_{3h}$ .

| Tipo delle oscillazioni                                          | $A_1'$           | $A_2'$ | $A_1''$ | $A_2''$          | $E'$                                    | $E''$ | Nr.<br>totale |
|------------------------------------------------------------------|------------------|--------|---------|------------------|-----------------------------------------|-------|---------------|
| Numero di oscillazioni normali                                   | 1                | 0      | 0       | 1                | $2 \times 2$                            | 0     | 6             |
| Attività in ultrarosso. . . .                                    | $i$              | —      | —       | $a$              | $a$                                     | —     | 5             |
| Attività e caratteristiche di polarizzazione in E. R. . . .      | pol.             | —      | —       | $i$              | dep.                                    | —     | 5             |
| Indicazione delle oscillazioni nei lavori spettroscopici . . . . | $\omega_1 (\pi)$ | —      | —       | $\omega_2 (\pi)$ | $\omega_3 (\sigma) - \omega_4 (\sigma)$ | —     | —             |
| Frequenze sperimentali $\text{cm}^{-1}$ .                        | 1050             | —      | —       | 830              | 1350-720                                | —     | —             |

Da questo accordo tra teoria da una parte e spettri Raman ed ultrarossi dall'altra, risulta che la simmetria più plausibile da attribuirsi all'ione  $\text{NO}_3^-$  è appunto la  $D_{3h}$ . Una possibile simmetria  $C_{3v}$ , con l'azoto al vertice di una piramide triangolare, la cui base è costituita dai tre atomi di ossigeno, è con buona probabilità da escludersi (sempre restando nel campo di nitrati monovalenti) giacchè tale simmetria richiederebbe per l'ione  $\text{NO}_3^-$  4 oscillazioni attive in ultrarosso ed in Raman, di cui due polarizzate come si osserva dalla Tabella II.

A questo proposito devo ricordare che invece nello spettro Raman dei nitrati si riscontra solo una riga polarizzata e che gli sforzi di diversi AA. rivolti a ricercare nello spettro Raman la riga 830  $\text{cm}^{-1}$  che compare in ultrarosso sono sempre falliti (7): l'ipotesi che attribuiva la classificazione di  $\omega_2$  ad una riga a circa 990  $\text{cm}^{-1}$ , che compare in alcuni casi, si è dimostrata in seguito meno attendibile, essendo da ritenersi che questa riga non sussista come tale, ma non sia altro che la 1047  $\text{cm}^{-1}$  eccitata dalla

(7) Ved., per. es.: GRASSMANN, loc. cit., ANANTHAKRISHNAN, loc. cit.

riga 22995  $\text{cm}^{-1}$  del Hg (denominata « f », nella classificazione di KOHL-RAUSCH), cosa probabile per la grande intensità che corrisponde alla detta riga a 1047  $\text{cm}^{-1}$ . A questa spiegazione si deve opporre però una riserva che sarà oggetto di una breve discussione più oltre.

TABELLA II.

*Gruppo  $\text{XO}_3^-$  a simmetria  $C_{3v}$ .*

| Tipo della oscillazione                                            | $A_1$            | $A_2$ | $E$                 | Numero totale |
|--------------------------------------------------------------------|------------------|-------|---------------------|---------------|
| Numero di oscillazioni normali. . . . .                            | 2                | 0     | $2 \times 2$        | 6             |
| Attività in U. R. . . . .                                          | $a$              | —     | $a$                 | 6             |
| Attività e caratteristiche di polarizzazione in E. R. . . . .      | pol.             | —     | dep.                | 6             |
| Indicazione delle oscillazioni nei lavori spettroscopici . . . . . | $\omega_1 (\pi)$ | —     | $\omega_3 (\sigma)$ | —             |
|                                                                    | $\omega_2 (\pi)$ |       | $\omega_4 (\sigma)$ |               |

Ricordo infine che BONINO ultimamente <sup>(8)</sup> ha potuto confermare col metodo degli orbitali molecolari che all'ione nitrico nel suo livello fondamentale spetta la simmetria  $D_{3h}$ .

Lo studio della costituzione dell'ione nitrico in sali di cationi polivalenti si presenta invece con notevoli difficoltà. Era già stato osservato da GRASSMANN <sup>(9)</sup> che la riga a 720  $\text{cm}^{-1}$  semplice e netta nei nitrati di metalli monovalenti, si sdoppia in due componenti a circa 715 e 740  $\text{cm}^{-1}$  in alcuni nitrati bivalenti (calcio e cadmio) da lui studiati.

Lo stesso succede probabilmente anche per la riga a 1350  $\text{cm}^{-1}$ . Questo, che si verifica sporadicamente nei sali di cationi bivalenti, è invece un fenomeno più generale nei trivalenti e tetravalenti: in questi sali la riga a 720  $\text{cm}^{-1}$  è sicuramente doppia e la 1400 talvolta anche tripla.

GRASSMANN <sup>(5)</sup> aveva supposto che lo sdoppiamento della riga degenera  $\omega_4$  potesse attribuirsi ad una perturbazione della simmetria dell'ione nitrico, con conseguente riduzione della degenerescenza, o anche in relazione ad una supposta parziale dissociazione di quei sali, in modo che una delle componenti fosse propria dell'ione nitrico libero, l'altra dell'ione nitrico influenzato dal catione nell'ione  $[\text{Me} \cdot \text{NO}_3]^+$ , o addirittura alla molecola indissociata  $\text{Me} \cdot (\text{NO}_3)_2$ .

I ipotesi analoghe vengono pure sostenute da OLLANO e FRONGIA <sup>(9)</sup> e da KUJUMZELIS <sup>(3)</sup>.

<sup>(8)</sup> BONINO, « Boll. Sc. Fac. Chim. Ind. Bologna », in corso di stampa.

<sup>(9)</sup> OLLANO e FRONGIA, « Nuovo Cimento », X, 306 (1933).

Da quanto precede risulta che, se ci sono forti ragioni per attribuire all'ione  $\text{NO}_3$  una simmetria  $D_{3h}$ , possono venire a stabilirsi delle condizioni nelle quali, per effetto di particolari perturbazioni, resti una qualche incertezza, anche perchè troppo scarse sono le conoscenze che si hanno sugli spettri Raman di nitrati di metalli trivalenti, per i quali sembra che queste complicazioni particolarmente si presentino.

Sono conosciuti soltanto gli spettri del nitrato di alluminio allo stato cristallino, fuso e di soluzione acquosa <sup>(10)</sup>; del nitrato di bismuto allo stato cristallino ed in soluzione acquosa <sup>(11)</sup>; di lantanio <sup>(12)</sup> e di cerio (III) <sup>(13)</sup> in soluzione acquosa. Tra i sali tetravalenti è conosciuto solo lo spettro Raman del nitrato di torio, tanto allo stato cristallino che in soluzione acquosa <sup>(14)</sup>. Ho perciò pensato di eseguire un lavoro di ricerca sugli spettri Raman dei nitrati di neodimio, samario, praseodimio, zirconio, cerio (IV), ed inoltre per l'omogeneità dello studio ho ripetuto lo spettro dei nitrati di lantanio e torio, tutti in soluzione acquosa.

Lo spettro Raman del nitrato di samario, è stato recentemente eseguito da SIBAIYA e VENKATARAMIAH <sup>(15)</sup>. Lo spettro da questi Autori riportato è però incompleto per quanto riguarda le oscillazioni del gruppo  $\text{NO}_3$ .

I nitrati di neodimio, samario, praseodimio, lantanio, sono stati preparati sciogliendo i relativi ossidi in acido nitrico puro per analisi, il nitrato di cerio (IV) partendo dal carbonato. I nitrati di zirconio e torio (per questo ultimo il sale corrispondente alla formula  $\text{Th}(\text{NO}_3)_4 \cdot 12 \text{H}_2\text{O}$ ) erano di provenienza Kahlbaum.

Il dispositivo sperimentale era quello descritto nella mia precedente Nota <sup>(6)</sup> con l'impiego cioè di filtri complementari secondo il metodo di Ananthakrishnan <sup>(16)</sup>. Per alcune delle soluzioni esaminate si è trovato conveniente eccitare gli spettri Raman anche con la  $\lambda = 404,66 \mu$  dello spettro del mercurio. Per ciascuna soluzione vennero eseguite diverse esperienze, con pose di  $72^\circ$ . Il filtro Zeiss usato è un filtro monocromatico di tipo C, particolarmente adatto quando si desidera eccitare lo spettro Raman con la riga  $\lambda = 435,834 \mu$  e satelliti dell'arco del Hg.

---

<sup>(10)</sup> TRUMPY, « Kgl. Norske Vidensk. Selsk. Forh. », 3, 159 (1931). OLLANO e FRONGIA, loc. cit.; KRISHNAMURTI, « Ind. Journ. of Phys. », 5, 1 (1930); THATTE e GANESAN, « Current Science », I, 345 (1933); SILVEIRA, « C. R. », 197, 1035 (1933).

<sup>(11)</sup> KRISHNAMURTI, loc. cit.; OLLANO, « Nuovo Cimento », 9, 264 (1932); OLLANO e FRONGIA, loc. cit.

<sup>(12)</sup> OLLANO e FRONGIA, loc. cit.

<sup>(13)</sup> BRUNETTI e OLLANO, « Nuovo Cimento », 8, 281 (1931); OLLANO e FRONGIA, loc. cit.; KUJUMZELIS, ved. nota <sup>(1)</sup>.

<sup>(14)</sup> KRISHNAMURTI, ved. nota <sup>(10)</sup>; MAGAT, Comunicazione privata; cfr. MAGAT, *Effet Raman*. Ed. Hermann (1937), pag. 9.

<sup>(15)</sup> SIBAIYA e VENKATARAMIAH, « Phys. Rev. », 56, 381 (1939).

<sup>(16)</sup> ANANTHAKRISHNAN, « Proc. Ind. Ad. Sc. », 5, 76 (1937).

TABELLA III.

| Sostanza                          | $\omega_4$              |              | $\omega_1$     |           | $\omega_3$ |                   | H <sub>2</sub> O |
|-----------------------------------|-------------------------|--------------|----------------|-----------|------------|-------------------|------------------|
| Nitrato di lantanio . .           | 715 (0)                 | ÷ 742 (1, 2) | (990) (1, 2) ? | 1048 (7)  | —          | 1416 (00 diff.)   | 1641 (2 diff.)   |
| » neodimio . .                    | —                       | —            | —              | 1047 (2)  | —          | —                 | —                |
| » praseodimio . .                 | 713 (0)                 | —            | —              | 1048 (5)  | —          | 1370 (1/2 diff.)  | 1529 (1/2 diff.) |
| » samario . .                     | 703 (0)                 | 737 (0)      | —              | 1047 (6)  | 1243 (0)   | 1407 (0 diff.)    | 1627 (0 diff.)   |
| » cerio (IV) . .                  | 717 (0)                 | 786 (00)     | —              | 1044 (5)  | —          | 1434 (00 diff.)   | —                |
| » zirconio . .                    | 453 (1, 2) - 568 (1, 2) | —            | (994) (00) ?   | 1047 (5)  | —          | 1407 (1/2 diff.)  | 1634 (0 diff.)   |
| » torio · 4 H <sub>2</sub> O . .  | 720 (1)                 | 750 (1)      | (991) (0) ?    | 1045 (10) | —          | 1410 (1, 2 diff.) | 1630 (00 diff.)  |
| » torio · 12 H <sub>2</sub> O . . | 710 (0)                 | 745 (0)      | (941) (0) ?    | 1046 (6)  | —          | 1370 (00 diff.)   | 1643 (0 diff.)   |

Nella precedente Nota (6) tale filtro veniva indicato con la sigla N. GG 3.

Riporto nella tabella III i risultati sperimentali (le frequenze delle righe Raman sono date in  $\text{cm}^{-1}$  e fra parentesi sono segnati le intensità relative apprezzate).

#### DISCUSSIONE DEI RISULTATI.

Per una più rapida discussione di questi dati, ho confrontato nella tabella IV ed in figura 1 i miei spettri con quelli già esistenti nella bibliografia, secondo quanto ho già ricordato. Nelle prime tre colonne sono riportate le medie degli spettri Raman dei metalli mono, bi e trivalenti: queste medie sono state calcolate in base ai dati offerti dalle tabelle LAN-DOLT, volume III, b, pagg. 938-940.

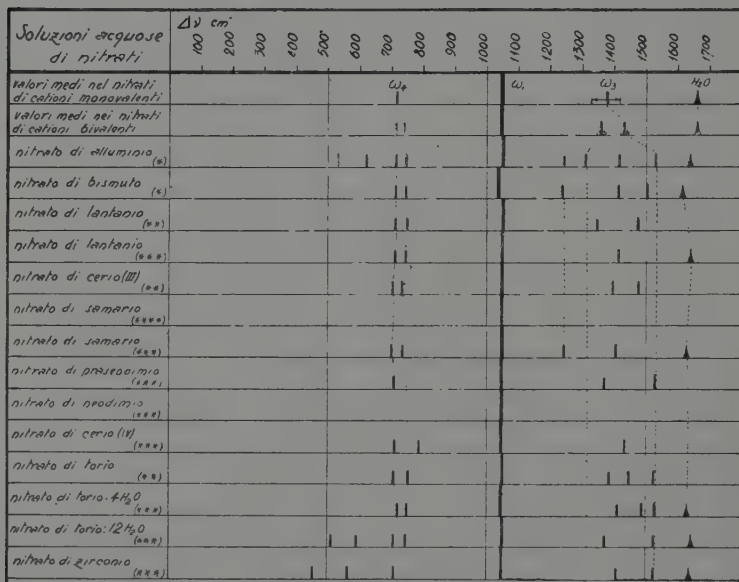


Fig. 1.

Si nota subito che le frequenze fondamentali dell'ione nitrico si riscontrano in tutti gli spettri da me eseguiti eccetto per il sale di neodimio, la cui intensa colorazione violetta non permette di ottenere uno spettro completo.

Viene confermato per questi sali lo sdoppiamento della oscillazione  $\omega_1$  a  $720 \text{ cm}^{-1}$ , meno che per il nitrato di praseodimio per il quale non mi è stato possibile accertare la presenza della componente a  $740 \text{ cm}^{-1}$ . Compare in alcuni casi la riga a  $990 \text{ cm}^{-1}$ , che è stata riscontrata da altri Autori, e che, come ho già detto, è probabilmente da ritenersi essere la  $1048 \text{ cm}^{-1}$ , eccitata dalla « f » dell'Hg.



| Nitrato di Al | Nitrato di Bi | Nitrato di La | Nitrato di La          | Nitrato di Ce (III) | Nitrato di Sm         | Nitrato di Sm | Nitrato di Sm | Nitrato di Pr         | Nitrato di Nd | Nitrato di Ce (IV) | Nitrato di Th | Nitrato di Th—4 H <sub>2</sub> O | Nitrato di Th—12 H <sub>2</sub> O | Nitrato di Zr | Osservazioni                           |
|---------------|---------------|---------------|------------------------|---------------------|-----------------------|---------------|---------------|-----------------------|---------------|--------------------|---------------|----------------------------------|-----------------------------------|---------------|----------------------------------------|
| (*)           | (*)           | (**)          | (***)                  | (**)                | (****)                | (****)        | (****)        | (***)                 | (***)         | (***)              | (**)          | (***)                            | (***)                             | (***)         |                                        |
| 537           |               |               |                        |                     |                       |               |               |                       |               |                    |               |                                  | 511                               | 453           |                                        |
| 627           |               |               |                        |                     |                       |               |               |                       |               |                    |               |                                  | 593                               | 568           |                                        |
| 716           | 712           | 715           | 715                    | 706                 | 703                   | —             | —             | 713                   | —             | 717                | 716           | 720                              | 710                               | 713           | $\omega_1 - \text{NO}_3^-$             |
| 744           | 746           | 750           | 742                    | 733                 | 737                   | —             | —             | —                     | —             | 786                | 753           | 750                              | 745                               | —             |                                        |
| (990)         | (981)         | (990)?        | (990)?                 | (989)?              | —                     | —             | —             | —                     | —             | —                  | —             | (991)?                           | (941)?                            | (994)?        | 1047 eccitata dalla « f » del Hg       |
| 1050          | 1034          | 1050          | 1048                   | 1046                | 1047                  | 1047          | 1047          | 1048                  | 1047          | 1044               | 1050          | 1045                             | 1046                              | 1047          | $\omega_1 - \text{NO}_3$               |
| 1241          | 1236          | —             | —                      | —                   | 1243                  | —             | —             | —                     | —             | —                  | —             | —                                | —                                 | —             |                                        |
| 1312          | 1416          | 1343          | 1416                   | 1396                | 1407                  | —             | —             | 1370                  | —             | 1434               | 1382          | 1410                             | 1370                              | 1407          |                                        |
| 1414          | 1503          | 1471          | —                      | 1475                | —                     | —             | —             | 1529                  | —             | —                  | 1445          | 1438                             | 1523                              | 1523          | $\omega_3 - \text{NO}_3^-$             |
| 1530          | —             | —             | —                      | —                   | —                     | —             | —             | —                     | —             | —                  | 1536          | 1526                             | —                                 | —             |                                        |
| 1639          | 1616          | —             | 1448 } 1641<br>1834 }  | —                   | 1557 } 1627<br>1698 } | —             | —             | —                     | —             | —                  | —             | 1630                             | 1643                              | 1634          | H <sub>2</sub> O                       |
| —             | —             | —             | 447 } 630<br>783 }     | —                   | 541 } 635<br>730 }    | 680           | —             | —                     | —             | —                  | —             | —                                | —                                 | —             |                                        |
| —             | —             | —             | 842 } 1032<br>1223 }   | —                   | 889 } 1025<br>1161 }  | 950           | —             | —                     | —             | —                  | —             | —                                | —                                 | —             | Bande di probabile origine elettronica |
| —             | —             | —             | 2323 } 2584?<br>2845 } | —                   | 2644 } 2778<br>2913 } | 2770          | —             | 2658 } 2830<br>3003 } | —             | —                  | —             | —                                | —                                 | —             |                                        |

(\*) Cfr. LANDOLT-BÖRNSTEIN, « Phys. Chem. Tabellen », B. III, T. II, pag. 940. (\*\*) Cfr. MAGAT, *Effet Raman*, pag. 9; Hermann Ed., 1937 (Parigi). (\*\*\*\*) SIBALISA E VENKATARAMIAH, « Phys. Rev. », 50, 381 (1939).

La riga più intensa dello spettro è la oscillazione total-simmetrica  $\omega_1$  a  $1048 \text{ cm}^{-1}$ , che compare sempre semplice in tutti i composti studiati. La frequenza dell'oscillazione  $\omega_3$  a  $1400 \text{ cm}^{-1}$  circa va da un minimo di  $1370$  nel praseodimio ad un massimo  $1416$  nel lantanio. Osservo però che questa riga è diffusa e poco intensa.

La oscillazione  $\omega_3$  ( $1400 \text{ cm}^{-1}$  circa) è sicuramente doppia nel nitrato di praseodimio e di zirconio e tripla in quella di torio. Per il nitrato di lantanio questa oscillazione appare diffusa e molto poco intensa; non mi è stato possibile pertanto accertare se si tratta di una sola riga o se essa è scissa in due componenti, come accerta MAGAT in una comunicazione privata <sup>(14)</sup>. In questa stessa comunicazione MAGAT afferma che la oscillazione a  $1400 \text{ cm}^{-1}$  circa è tripla nelle soluzioni di nitrato di torio; i miei spettri confermano questo fatto anche se non c'è perfetta coincidenza in almeno 2 delle tre righe suddette.

Credo utile a questo punto fare alcune considerazioni sulle possibili interpretazioni della scissione di alcune righe dello spettro Raman dei nitrati in due o tre componenti.

Questo si verifica, come si è visto, nel caso di spettri di soluzioni acquose di nitrati di cationi bi, tri e tetravalenti.

Una prima spiegazione potrebbe ricercarsi nel fatto che in una possibile dissociazione elettrolitica parziale di questo nitrato, la simmetria  $D_{3h}$  dell'ione nitrico può subire negli ioni parzialmente dissociati del tipo, per esempio,  $(\text{Me} \cdots \text{NO}_3)^+$  delle perturbazioni capaci di far cessare la degenerescenza delle frequenze  $\omega_3$  e  $\omega_4$  riferibili nella simmetria  $D_{3h}$  appunto alla rappresentazione doppiamente degenerare  $E'$ . Sta in vero di fatto che la riga corrispondente alla rappresentazione semplice (non degenerare)  $A'_1$  e cioè la riga  $1050 \text{ cm}^{-1}$ , non si sdoppia assolutamente mai anche nelle soluzioni dei nitrati di cationi bi, tri e tetravalenti.

Si potrebbe allora pensare che la perturbazione supposta in un ione del tipo  $(\text{Me} \cdots \text{NO}_3)^+$  possa risolvere le rappresentazioni poliatomiche  $D_{3h}$  in altre di più bassa simmetria. Le tabelle di MULLIKEN <sup>(17)</sup> ci danno le seguenti indicazioni per la risoluzione delle rappresentazioni  $D_{3h}$  in  $C_{3v}$ :

TABELLA V.

| $D_{3h}$ | $A'_1$ | $A'_2$ | $A''_1$ | $A''_2$ | $E'$ | $E''$ |
|----------|--------|--------|---------|---------|------|-------|
| $C_{3v}$ | $A_1$  | $A_2$  | $A_2$   | $A_1$   | $E$  | $E$   |

<sup>(17)</sup> MULLIKEN, « Phys. Rev. », 43, 294 (1933).

Cioè, se si verificasse una tale perturbazione, la riga  $\omega_2$  riferibile appunto ad  $A_2''$  nella simmetria  $D_{3h}$  e perciò proibita in effetto Raman, diventerebbe nello spettro perturbato attiva e polarizzata in effetto Raman, assumendo, come si vede dalla tabella, una simmetria di tipo  $A_1$  in  $C_{3v}$ .

Come si è detto la  $830\text{ cm}^{-1}$  attiva in infrarosso nei nitrati non appare mai in effetto Raman. Però potrebbe discutersi a fondo ancora se la  $990\text{ cm}^{-1}$ , che appare con particolare frequenza negli spettri Raman dei nitrati di cationi tri e tetraivalenti, non sia da riferire appunto a questa oscillazione  $\omega_2$  che è inattiva in effetto Raman per lo ione imperturbato  $D_{3h}$ , e diventa attiva per lo ione perturbato  $C_{3v}$ .

Nello ione perturbato tale oscillazione essendo conforme ad  $A_1$  dovrebbe essere polarizzata. Ma anche una tale constatazione non avrebbe valore discriminante in quanto la ipotesi di considerare la riga Raman  $990\text{ cm}^{-1}$  come inesistente e riferibile ad una eccitazione «f» della  $1050\text{ cm}^{-1}$ , porterebbe a stabilire per questa riga un alto grado di polarizzazione.

Passando alle oscillazioni  $\omega_3$  ed  $\omega_4$  conformi alla rappresentazione degenerare  $E'$  in  $D_{3h}$  si vede dalla tabella V che esse, nell'ione perturbato piramidale  $C_{3v}$  dovrebbero essere conformi alla rappresentazione pure doppiamente degenerare  $E$ .

Perciò la loro degenerescenza non dovrebbe cessare con la perturbazione e non si può perciò imputare ad un tale processo di perturbazione la molteplicità osservata sperimentalmente.

Perchè la degenerescenza possa cessare, occorre perturbare ulteriormente l'ione piramidale  $C_{3v}$  fino a ridurne la simmetria per esempio a  $C_s$  (un solo piano di simmetria). Si avrebbe in tal caso:

TABELLA VI.

| $C_{3v}$ | $A_1$ | $A_2$ | $E$          |
|----------|-------|-------|--------------|
| $C_s$    | $A'$  | $A''$ | $(A' + A'')$ |

Cioè l'ulteriore perturbazione a  $C_s$  riesce invero a sdoppiare le oscillazioni doppiamente degeneri  $E$ .

Un'altra ipotesi potrebbe essere fatta, e che cioè nella perturbazione da  $D_{3h}$  a  $C_{3v}$  le oscillazioni  $\omega_3$  ed  $\omega_4$ , pur restando doppiamente degeneri, varino leggermente la loro frequenza in relazione alle mutate condizioni meccaniche nelle quali la oscillazione si svolge. In tal caso accanto alle

oscillazioni doppiamente degeneri degli ioni non perturbati (e cioè dal punto di vista elettrolitico completamente dissociati), si dovrebbero osservare oscillazioni della stessa simmetria a frequenza variata degli ioni perturbati (cioè solo parzialmente dissociati).

Una difficoltà che si potrebbe opporre a questa ipotesi sarebbe che anche la oscillazione totalsimmetrica  $\omega_1$  dovrebbe in tal caso sdoppiarsi, quando lo sdoppiamento non fosse legato alla cessazione della degenerescenza, ma ad una variazione delle condizioni meccaniche dell'oscillazione.

Viceversa si nota che la oscillazione totalsimmetrica  $A_1$  resta sempre semplice ed in posizione inalterata, mentre i fenomeni di sdoppiamento si osservano soltanto per le oscillazioni doppiamente degeneri  $\omega_3$  e  $\omega_4$  (vedi tabella I).

La discussione potrebbe essere completata da una trattazione quantitativa meccanica di queste oscillazioni, cosa che rimando ad un prossimo lavoro.

Gli spettri del nitrato di lantanio, torio e zirconio mostrano a  $1600\text{ cm}^{-1}$  circa una riga diffusa, debole nel primo caso e sufficientemente intensa nel secondo, che MAGAT nel caso del lantanio non riporta. Un accenno di tale riga si riscontra anche nel caso del sale di samario.

La origine di questa riga è per lo meno dubbia. OLLANO nella Nota citata attribuisce tale riga nel caso del nitrato di bismuto ad uno stato intermedio di dissociazione. Altri AA. attribuiscono tale riga diffusa all'acqua solvente. È stato anche proposto di considerare questa riga a  $1600\text{ cm}^{-1}$  come una armonica della  $\omega_2$ , che come ho già detto, è proibita in spettro Raman. Secondo HIBBEN<sup>(18)</sup> la comparsa di una riga di combinazione dello spettro Raman, quando invece è o sono del tutto proibite le componenti, non deve per nulla meravigliare giacchè questo fatto pare, secondo HIBBEN, che si ripeta in casi analoghi.

Nel nostro caso però bisognerebbe osservare che una armonica della  $\omega_2$  (conforme ad  $A'_2$ ) sarebbe ancora conforme ad  $A'_2$ , e perciò proibita a sua volta in effetto Raman. È difficile perciò spiegarci perchè le regole di selezione valgano per la fondamentale e non possano valere nello stesso caso per l'armonica.

Diverso sarebbe il caso di una riga di combinazione che apparisse per lo stabilirsi di una degenerescenza accidentale nel senso rilevato da FERMI<sup>(19)</sup> per la prima volta.

---

<sup>(18)</sup> Cfr. HIBBEN, *The Raman Effect and its Chemical Applications*, pag. 448. Reinhold Publishing Corp. (1939).

<sup>(19)</sup> FERMI, « Mem. R. Acc. d'Italia », III (1932).

Per il nitrato di torio sono state eseguite due serie di misure, giacchè si avevano a disposizione due tipi diversi di questo sale. Un primo tipo era costituito da un sale che corrispondeva alla formula  $\text{Th}(\text{NO}_3)_4 \cdot 4 \text{H}_2\text{O}$ , mentre il secondo corrispondeva all'idrato  $\text{Th}(\text{NO}_3)_4 \cdot 12 \text{H}_2\text{O}$ , fortemente igroscopico.

Ambedue sono stati studiati in soluzione satura. I due spettri, mentre sono confrontabili nelle oscillazioni attribuibili al gruppo  $\text{NO}_3^-$ , mostrano delle differenze in alcune particolarità e precisamente mentre lo spettro della soluzione satura di  $\text{Th}(\text{NO}_3)_4 \cdot 4 \text{H}_2\text{O}$  fornisce tre righe nella zona compresa tra  $1400$  e  $1500 \text{ cm}^{-1}$ , lo spettro del sale  $\text{Th}(\text{NO}_3)_4 \cdot 12 \text{H}_2\text{O}$  ne mostra solo due.

Inoltre per quest'ultimo sale si osserva la comparsa di due nette righe nella zona dello spettro tra  $500$  e  $600 \text{ cm}^{-1}$  e di un'altra riga, invero molto debole, a circa  $940 \text{ cm}^{-1}$ , in posizione cioè da non poter più essere considerata come una  $1050$  eccitata dalla « f » dell'Hg.

Anche per il nitrato di zirconio deve registrarsi la comparsa di due righe a più bassa frequenza, una a  $453$  e l'altra a  $568 \text{ cm}^{-1}$  che probabilmente sono da attribuirsi al gruppo  $\text{Zr}-\text{O}$  (zirconile).

Il nitrato di samario, unico tra i composti studiati, presenta una riga a  $1243 \text{ cm}^{-1}$ , molto poco intensa: anche i nitrati di alluminio e bismuto presentano una debole riga in questa zona dello spettro, sulla cui natura però è difficile pronunciarsi <sup>(20)</sup>.

A proposito di questo nitrato ho già ricordato che esso è stato oggetto di studio da parte di SIBAIYA e VENKATARAMIAH <sup>(15)</sup>. Questi Autori, eseguito lo spettro Raman di quel sale a bassa ed alta concentrazione, trovano che a basse concentrazioni lo spettro Raman risulta costituito da una riga a  $1047 \text{ cm}^{-1}$ , caratteristica del gruppo  $\text{NO}_3^-$ , e da una larga banda intorno a  $1600 \text{ cm}^{-1}$  attribuibile all'acqua. Ad alta concentrazione, invece, scompare la banda dell'acqua, e si mostrano, oltre alla già citata riga a  $1047 \text{ cm}^{-1}$ , 3 nuove larghe bande, con frequenze che cadono all'incirca intorno a  $680$ ,  $950$  e  $2770 \text{ cm}^{-1}$ .

Quegli Autori attribuiscono la scomparsa della riga diffusa dell'acqua in questo secondo caso al forte assorbimento da parte della soluzione per la riga  $\lambda 4047 \text{ Å}$ , e fanno la ipotesi che due delle tre nuove bande siano da ascrivere ad una banda Raman elettronica, del tipo di quella già riscontrata da RASETTI nel 1930 <sup>(21)</sup> nel caso della molecola biatomica  $\text{N}-\text{O}$ . Anche gli spettri Raman da me studiati per soluzioni di nitrati di lantanio, di Cerio (IV) e praseodimio mostrano (nettissime per il lantanio) bande Raman verosimilmente di origine elettronica che sarebbero perciò da me

<sup>(20)</sup> OLLANO, loc. cit.

<sup>(21)</sup> RASETTI, « Nuovo Cimento », 7, 261 (1930).

osservate in questi ioni per la prima volta. Su questo interessante aspetto degli spettri Raman delle soluzioni di sali di terre rare, ho altre ricerche in corso sulle quali riferirò in prossimi lavori.

Ringrazio il prof. G. B. BONINO, che mi ha consigliato questa ricerca, per l'interesse addimostrato alla stessa e per i notevoli mezzi sperimentali messi a mia disposizione.

Debbo pure ringraziare il prof. LUIGI ROLLA dell'Università di Genova che mi ha gentilmente fornito campioni di sufficiente purezza degli ossidi di lantanio, samario, praseodimio e neodimio che mi sono serviti in questa ricerca.

---

**Chimica.** — *Sul potenziale elettrochimico di riduzione delle aldeidi pirroliche.* — III.  $\alpha$ - e  $\beta$ -aldeidi pirroliche carboetossi sostituite <sup>(1)</sup>. Nota di GIUSEPPE SCARAMELLI, presentata <sup>(2)</sup> dall'Accademico GIAN BATTISTA BONINO.

In alcuni lavori precedenti <sup>(3)</sup> ho esaminato il comportamento di una serie di chetoni pirrolici al catodo a goccia di mercurio, trovando che il gruppo chetonico sostituito in posizione  $\alpha$  al nucleo pirrolico è facilmente riducibile polarograficamente, mentre viceversa lo stesso gruppo chetonico sostituito in posizione  $\beta$  al nucleo stesso non si riduce fino al potenziale di deposizione dello ione  $\text{NH}_4^+$ . In altri lavori eseguiti in collaborazione con G. B. BONINO <sup>(4)</sup> è stato preso anche in considerazione il potenziale polarografico di riduzione di alcune aldeidi pirroliche giungendo alla conclusione che la  $\alpha$ -pirrolaldeide ordinaria presenta un'onda polarografica di riduzione nettamente carbonilica, per quanto spostata verso valori più negativi rispetto all'onda di riduzione della benzaldeide.

Sulla base dei risultati che ho sopra brevemente riassunti mi sono proposto di studiare il comportamento polarografico del gruppo aldeidico nelle aldeidi pirroliche relativamente alla posizione dallo stesso occupata nel nucleo pirrolico.

Ricordo qui che già FISCHER e ZERWECK <sup>(5)</sup> avevano mostrato come per introdurre un gruppo formilico in posizione  $\beta$  al nucleo pirrolico fosse necessario bloccare prima le posizioni  $\alpha$ — $\alpha'$  dato che in caso diverso il gruppo formilico avrebbe seguito la sua naturale tendenza a sostituirsi

---

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico nella R. Università di Bologna.

<sup>(2)</sup> Nell'Adunanza del 21 marzo 1940—XVIII.

<sup>(3)</sup> G. SCARAMELLI, « Boll. Sci. Fac. Chim. Ind. Bologna », vol. I, n. 1-2, 49 (1930).

Id., « Boll. Sci. Fac. Chim. Ind. Bologna », vol. I, n. 1-2, 59 (1940).

Id., « Atti R. Acc. d'Italia ». In corso di stampa.

<sup>(4)</sup> G. B. BONINO e G. SCARAMELLI, « Ricerca Scientifica », A. VI, vol. II, n. 3, 4.

Id., Id., « Ricerca Scientifica », A. VI, vol. II, n. 5, 6.

<sup>(5)</sup> H. FISCHER e ZERWECK, « B. », 55, 1942 (1922).



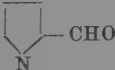
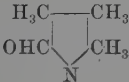
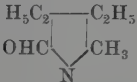
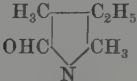
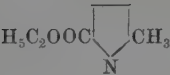
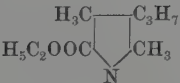
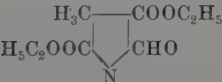
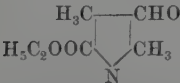
in  $\alpha$  nel nucleo pirrolico. I detti autori dànno alcuni esempi nei quali introducono il gruppo formilico in  $\beta$  nel nucleo pirrolico dopo aver occupato le posizioni  $\alpha$  con dei gruppi carboetossilici. Poichè quindi non si poteva avere una  $\beta$  pirrolaldeide con le posizioni  $\alpha$  non sostituite onde studiare il comportamento polarografico del gruppo aldeidico in  $\alpha$  e in  $\beta$  al nucleo pirrolico è stato necessario rivolgersi ad una  $\alpha$  e ad una  $\beta$  pirrolaldeide sostituite con gruppi analoghi in modo da aversi ugualmente dei risultati paragonabili. A questo fine e anche per ragioni di indole preparativa son ricorso alla 4-metil-3-5-dicarboetossi-2-pirrolaldeide ed alla 2-4-dimetil-5-carboetossi-3-pirrolaldeide.

Poteva sorgere a questo punto il dubbio se il gruppo carboetossilico fosse di per sè polarograficamente riducibile, chè, in caso affermativo, si sarebbe dovuto tener conto anche di questo fatto. Viceversa lo studio polarografico del 2-metil-5-carboetossi-pirrolo e del 2-4-dimetil-3-propil-5-carboetossi-pirrolo ha dimostrato la non riducibilità di questo gruppo fino al potenziale di deposizione dello ione  $\text{NH}_4^+$ . L' $\alpha$  e la  $\beta$  carboetossi aldeide sperimentate si sono invece mostrate entrambe riducibili. Alla 4-metil-3-5-carboetossi-2-pirrolaldeide compete anzi un potenziale di riduzione eccezionalmente basso ( $-0,739$  volt) rispetto a quello dell' $\alpha$  pirrolaldeide non sostituita ( $-1,256$  volt) o a quelli delle  $\alpha$  pirrolaldeidi alchilate (vedi Tabella 1), ciò che porterebbe alla deduzione che il gruppo carboetossi ha un'azione nettissima sulla riducibilità polarografica del gruppo aldeidico di una  $\alpha$ -formil aldeide.

D'altra parte i risultati forniti dalle esperienze eseguite sulla 2-4-dimetil-5-carboetossi-3-pirrolaldeide ci fanno vedere come essa si riduca ad un potenziale notevolmente più elevato ( $-1,238$  volt). Cosicchè ricordando come il gruppo chetonico in  $\beta$  al nucleo pirrolico sia polarograficamente assai meno facilmente riducibile, verrebbe fatto di pensare che anche il gruppo aldeidico in  $\beta$  sia meno facilmente riducibile di quello sostituito in  $\alpha$ . In questo caso però la presenza del gruppo carboetossi sostituito all'anello pirrolico avrebbe tale influenza da abbassare il potenziale di riduzione del gruppo carbonilico portandolo ad un valore sperimentalmente accessibile sia pur sempre restando esso assai più elevato di quello mostrato dalla  $\alpha$  pirrolaldeide analogamente sostituita.

Altre esperienze sono in corso onde approfondire lo studio di queste influenze del gruppo carboetossilico sulla configurazione elettronica del nucleo pirrolico onde poter meglio spiegare le particolarità osservate a carico della riducibilità polarografica del gruppo formilico legato al nucleo pirrolico stesso.

TABELLA. I.

| COMPOSTO                                                                            | Purificazione<br>e punto di fusione                         | Potenziale di ridu-<br>zione alla conc.<br>molare                                   | Differenze dal<br>pot. di rid. della<br>2-pirrolaldeide |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
|    | Cristallizzata dal-<br>l'etere di petrolio.<br>P. F. 50-51° | — 1,256 volt                                                                        | —                                                       |
|    | Cristallizzato dal-<br>l'acqua. P. F. 147°                  | — 1,338 volt                                                                        | — 0,082 volt                                            |
|    | Cristallizzata dal-<br>l'acqua. P. F. 74°                   | — 1,340 volt                                                                        | — 0,084 volt                                            |
|    | Cristallizzata dal-<br>l'acqua. P. F. 105-<br>106°          | — 1,342 volt                                                                        | — 0,086 volt                                            |
|    | Cristallizzato dal-<br>l'alcool. P. F. 100°                 | Non si riduce<br>fino al potenziale<br>di deposizione<br>dello ione $\text{NH}_4^+$ | —                                                       |
|  | Cristallizzata dal-<br>l'alcool. P. F. 102°                 | Non si riduce<br>fino al potenziale<br>di deposizione<br>dello ione $\text{NH}_4^+$ | —                                                       |
|   | Cristallizzata dal-<br>l'acqua. P. F. 124°                  | — 0,739 volt                                                                        | + 0,599 volt                                            |
|  | Cristallizzata dal-<br>l'acqua. P. F. 145°                  | — 1,328 volt                                                                        | — 0,072 volt                                            |

## PARTE SPERIMENTALE.

Nel presente lavoro sono stati studiati i composti seguenti:

2-metil-5-carboetossi-pirrolo

2-4-dimetil-3-propil-5-carboetossi-pirrolo

4-metil-3-5-dicarboetossi-2-pirrolaldeide

2-4-dimetil-5-carboetossi-3-pirrolaldeide.

I prodotti esaminati provengono dall'Istituto di Chimica Organica del Politecnico di Monaco e si ringrazia qui il GEH. H. FISCHER che gentilmente ha concesso questi prodotti.

Le esperienze vennero eseguite con il complesso polarografico già descritto nei citati precedenti lavori sulle aldeidi e sui chetoni pirrolici. Anche le condizioni di esperienza furono quelle già colà menzionate e cioè: elettrolita base  $\text{NH}_4\text{Cl}$  N/10 in alcool etilico al 50 % in peso; eliminazione dell'ossigeno ottenuta per gorgogliamento di idrogeno; sensibilità del galvanometro 1/100 dalla massima; tempo di gocciolamento 4"; temperatura 16°.

I potenziali di riduzione si riferiscono tutti alla concentrazione molare e sono stati determinati secondo il metodo dato da SEMERANO <sup>(1)</sup>. Essi sono il risultato della media di 6 determinazioni eseguite fra le concentrazioni  $9 \cdot 10^{-4}$  e  $4 \cdot 10^{-3}$  molare. Dai potenziali determinati a queste concentrazioni si è calcolato il potenziale molare dopo aver stabilito che il processo di riduzione al catodo a goccia di mercurio era da assumersi come monovalente. Nella Tabella I sono riportati i risultati avutisi coi composti esaminati in questo lavoro accanto a quelli forniti dalla 2-pirrolaldeide, dalla 2-3-4-trimetil-5-pirrolaldeide, dalle 2-4-dimetil-3-etil-5-pirrolaldeide, e dalla 2-metil-3-4-dietil-5-pirrolaldeide già riportati in precedenti lavori.

Ringrazio S. E. il prof. G. B. Bonino per l'interessamento addimostratomi nell'esecuzione di questa ricerca.

---

<sup>(1)</sup> G. SEMERANO, «Gaz. Chim. It.», 62, 518 (1932).

**Chimica** (Chimica biologica). — *Studi su una proteina cristallizzabile presente nella milza e nel fegato* <sup>(1)</sup>. Nota di EUSEBIO TRIA, presentata <sup>(2)</sup> da SABATO VISCO, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

In un precedente lavoro <sup>(3)</sup> ho potuto osservare che nella preparazione della catalasi cristallizzata dal fegato col metodo da me introdotto delle precipitazioni successive con solfato di ammonio, si ottengono delle soluzioni impure da cui l'enzima può essere precipitato con l'aggiunta ulteriore di solfato di ammonio, mentre rimane un filtrato limpido colorato in rosa giallastro nel quale l'esame spettroscopico non rivela tracce di emoglobina. Se si fa il residuo secco di questa soluzione si ottiene una sostanza amorfa che dà le reazioni delle proteine e che è caratterizzata da un notevole contenuto in ferro.

L'esistenza nel fegato di una sostanza proteica ricca di ferro è stata già da tempo riconosciuta. SCHMIEDEBERG <sup>(4)</sup> nel 1894 descriveva nel fegato una sostanza proteica a cui dava il nome di ferratina, contenente il 6 % di ferro ed una quantità variabile di fosforo. Il suo lavoro era però criticato da SALKOWSKI <sup>(5)</sup>. Più tardi MARFORI <sup>(6)</sup> descriveva nel fegato un composto di natura proteica che dava, analogamente all'ematogene scoperto da BUNGE nel tuorlo d'uovo, la reazione dei sali di ferro con solfuro di ammonio. In seguito SCAFFIDI <sup>(7)</sup> isolava una sostanza contenente il 3,59 % di ferro ed il 3,28 % di fosforo. In ogni caso non si tratta di sostanze pure, ma di miscele eterogenee di diverse sostanze.

Molto recentemente LAUFBERGER <sup>(8)</sup> ha isolato dalla milza di cavallo una proteina che ha un contenuto in ferro del 20 % e può essere otte-

---

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia generale della R. Università di Roma.

<sup>(2)</sup> Nell'Adunanza del 21 marzo 1940-XVIII.

<sup>(3)</sup> TRIA, « Rend. R. Acc. d'Italia », serie VII, vol. I, p. 273.

<sup>(4)</sup> SCHMIEDEBERG, « Archiv. f. exp. Pathol. u. Pharm. », 1894, 33, 101.

<sup>(5)</sup> SALKOWSKI, (citato da Laufberger).

<sup>(6)</sup> MARFORI, *Trattato di Farmacologia e Terapia*, 1928, pag. 50.

<sup>(7)</sup> SCAFFIDI (citato da Laufberger).

<sup>(8)</sup> LAUFBERGER, « Bull. Soc. Ch. Biol. », 1937, 19, 1575.

nuta allo stato cristallino sotto forma di ottaedri arancio scuri. A tale proteina il LAUFBERGER ha dato il nome di ferritina. Essa si trova, per quanto in quantità minore, anche nel fegato di cavallo. Altri lavori al riguardo, oltre la breve nota di LAUFBERGER, per quanto è a mia conoscenza non esistono. Sembrandomi la questione di notevole interesse ho creduto utile di eseguire uno studio di tale proteina allo scopo di individuarne i caratteri chimici e chimico fisici.

A) CRISTALLIZZAZIONE DELLA PROTEINA. — Pur essendo come si è detto la proteina presente nel fegato e nella milza, pur tuttavia soltanto da quest'ultimo organo la sua cristallizzazione è possibile, in quanto che nel fegato è contenuta in quantità molto bassa. Mi sono perciò servito di milza di cavallo ed ho proceduto nella seguente maniera.

Dieci chilogrammi di milza di cavallo sono ripetutamente triturati per mezzo di un ordinario tritacarne, sino ad aversi una poltiglia molto fine. Per ogni chilogrammo di poltiglia si aggiungono 1500 cc. di acqua distillata; si agita e dopo circa 30' si filtra. Si riscalda il filtrato a 80° C. a bagnomaria e quindi si filtra subito. Per ogni 100 cc. di filtrato si aggiungono lentamente e agitando gr. 30 di solfato di ammonio puro. Si raffredda in ghiacciaia per mezz'ora e si filtra. Il precipitato si discioglie in acqua distillata. Si aggiungono, per allontanare le impurità, gr. 10 di solfato di ammonio per ogni 100 cc. di questa soluzione. Si lascia stare ancora per mezz'ora in ghiacciaia e si centrifuga. Si elimina il precipitato e alla soluzione si aggiunge tanto solfato di ammonio quanto ne era stato aggiunto in precedenza per precipitare le impurità. Si tiene due ore in ghiacciaia, indi si centrifuga la ferritina amorfa e si discioglie nel minimo possibile di acqua. A questa soluzione si aggiungono due volumi di acqua distillata ed alla soluzione così diluita mezzo volume di soluzione al 20 % di solfato di cadmio ( $3 \text{ CdSO}_4 \cdot 8 \text{ H}_2\text{O}$ ). Si tiene il materiale in ghiacciaia. La cristallizzazione comincia subito, e i cristalli si presentano sotto forma di bellissimi ottaedri rosso scuri. Non vi sono praticamente impurità amorphe presenti.

Per la ricristallizzazione si centrifugano i cristalli e si ridiscioglie in acqua bidistillata. La soluzione avviene lentamente. Si filtra e si ricristallizza come sopra son solfato di cadmio.

Con questo metodo da kg. 10 di milza ho potuto ottenere circa g. 20 di ferritina ricristallizzata (umida), che mi sono stati sufficienti per le determinazioni che ho eseguito.

B) CRITERI DI PUREZZA. — Prima di procedere allo studio delle proprietà chimiche e chimico fisiche della proteina, ho voluto assicurarmi di avere a che fare con una sostanza pura.

La rigorosa prova sperimentale della purezza di una sostanza e perfino la definizione di sostanza pura presenta parecchie difficoltà (<sup>1</sup>). Nel caso delle proteine tali difficoltà sono accresciute dal fatto che la composizione e le proprietà di proteine affini sono molto simili. Impossibile è perciò stabilire la purezza di una sostanza proteica in base ai dati analitici che ci vengono forniti dall'analisi elementare. Ed anche il criterio della costanza del punto di fusione che viene adoperato come indice di purezza per la maggior parte delle sostanze organiche non può essere usato per le proteine, giacchè esse si decompongono senza fondere.

Lo studio della sedimentazione nell'ultracentrifuga di Svendberg non può neanche considerarsi un criterio assoluto di purezza giacchè è dimostrato che proteine affini possono avere lo stesso peso molecolare, oppure la proteina può essere impura di sostanze le quali o non assorbono i raggi ultravioletti oppure si trovano in quantità troppo piccole per essere messe in evidenza con questo metodo.

Altri criteri di purezza esistono i quali possono essere applicati soltanto in casi speciali. Ad esempio nel caso di enzimi cristallizzati la determinazione del coefficiente di diffusione, l'inattivazione per mezzo di vari agenti chimici e fisici ecc.

Allo stato attuale delle nostre conoscenze i due unici criteri di purezza di una proteina che possono essere adottati nella generalità dei casi, e che possono considerarsi soddisfacenti, per quanto non in senso assoluto, sono la determinazione della composizione di una sostanza dopo varie ricristallizzazioni successive, e la determinazione della curva di solubilità di questa sostanza in opportuni solventi.

Di entrambi questi criteri mi sono servito per la determinazione del grado di purezza della sostanza proteica da me preparata.

*I. composizione della proteina dopo cristallizzazioni successive.* — Tale criterio per quanto si è detto non può essere considerato come assoluto, pur tuttavia è quello maggiormente adoperato per le proteine cristallizzabili e può nella maggioranza dei casi considerarsi soddisfacente.

Nel caso speciale della ferritina che è l'unica proteina con un contenuto in Fe così elevato, la determinazione di tale contenuto dopo svariate cristallizzazioni consecutive può bastare. Ho trovato col metodo che sarà descritto in seguito i seguenti valori:

|                                 |           |
|---------------------------------|-----------|
| Dopo una cristallizzazione:     | 18,4 mg % |
| Dopo due cristallizzazioni:     | 18,8   »  |
| Dopo tre cristallizzazioni:     | 19   »    |
| Dopo quattro cristallizzazioni: | 18,8   »  |

---

(<sup>1</sup>) KUNITZ e NORTHROP, *Symposia of Quantitative Biology*, vol. VI, 1938. 325.

Questi valori ci dimostrano che il contenuto in ferro non varia in maniera apprezzabile con le cristallizzazioni successive.

II. *Determinazione delle curve di solubilità.* — Si tratta di un'applicazione della regola delle fasi di GIBBS. Per la prima volta questo metodo è stato applicato alle proteine da SÖRENSEN e dai suoi collaboratori, ma è merito di NORTHROP e della sua scuola di aver reso pratico e generalizzato allo studio di molte sostanze proteiche questo metodo, la cui sensibilità è stata poi dimostrata da LANDSTEINER e HEIDELBERGER, i quali hanno potuto apprezzare differenze tra emoglobine di specie affini, che

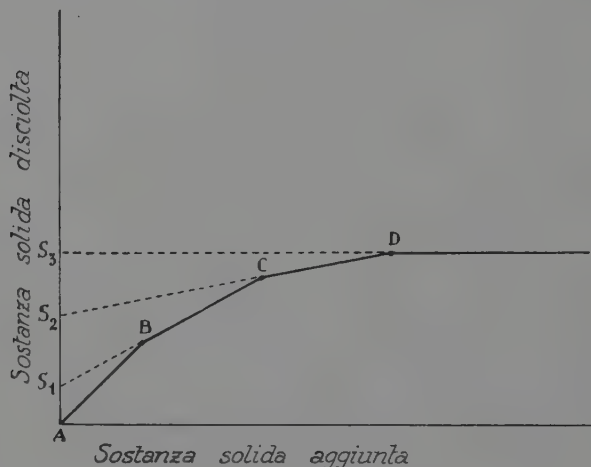


Fig. 1.

pure sembravano identiche anche con la sensibilissima tecnica immunologica.

Il metodo si basa sul seguente principio: la solubilità di una fase solida ad un componente in equilibrio con la sua soluzione satura è indipendente dalla quantità di solido presente; ma se la fase solida consiste di più di un componente, la quantità disciolta varierà con la quantità di solido presente.

L'analisi delle curve di solubilità di miscele contenenti diverse fasi solide è stata eseguita da KUNITZ e NORTHROP (loc. cit.). Con tale mezzo è possibile stabilire di quante fasi solide è costituita una miscela e quale è la quantità percentuale di ciascuna di esse. Solo nel caso che la fase solida sia una soluzione solida di uno o più componenti, l'analisi è meno certa. Nel caso di un sistema a quattro componenti di cui uno liquido e tre solidi la solubilità è espressa dalla curva seguente, (fig. 1) nella quale



sull'asse delle ascisse è indicata la quantità totale di solido aggiunto ( $V$ ) e su quella delle ordinate la quantità totale di solido disciolto ( $S$ ).

Evidentemente:

- 1° Da  $A$  a  $B$  non vi è alcuna fase solida presente,
- 2° In  $B$  appare come fase solida il componente  $S_1$  e questa è l'unica fase solida presente da  $B$  a  $C$ ,
- 3° In  $C$  compare il secondo componente  $S_2$ , e questo è presente, insieme a  $S_1$  tra  $C$  e  $D$ ,
- 4° In  $D$  compare come fase solida il terzo ed ultimo componente del sistema  $S_3$ . Dopo  $D$  tutti e tre i componenti del sistema sono presenti come fase solida e la concentrazione totale della proteina disciolta è indipendente dalla quantità di proteina nel sistema.

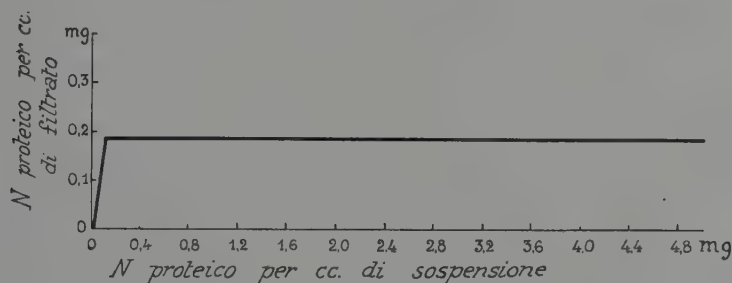


Fig. 2.

Per la determinazione della curva di solubilità della ferritina si è proceduto nella seguente maniera:

1° *Cristallizzazione*: la ferritina fu più volte cristallizzata da soluzione acquosa con solfato di cadmio al 20 %.

2° *Lavaggio dei cristalli*: g. 5-10 di cristalli così ottenuti furono sospesi in solfato di cadmio al 10 % in un tubo da saggio da 100 cc. nel quale erano presenti alcune palline di vetro. Il tubo riempito accuratamente in maniera che non rimanesse traccia di aria e chiuso con un tappo di gomma, fu fatto ruotare lentamente per mezzo di un apposito dispositivo per 24 ore, in maniera che le palline di vetro andando su e giù per il tubo determinassero una continua agitazione della sospensione.

3° *Solubilità in solfato di cadmio al 10 % a 10° C.*: I cristalli così lavati furono filtrati con aspirazione e sospesi uniformemente in 50 cc. di solfato di cadmio al 10 %. Furono prelevate quantità della sospensione variabili da 0,1 a 15 cc., e portati, in tubi da saggio da 15 cc., a 15 cc. con soluzione al 10 % di solfato di cadmio. I tubi venivano chiusi, e agitati come sopra per 24 ore, quindi filtrati attraverso piccoli filtri SCHLEI-

CHER-SCHÜLL. Nei filtrati chiari, e nella sospensione originaria dei cristalli si determinò col metodo micro-KJELDAHL l'azoto totale.

La figura 2 mostra che la solubilità a 10° C in solfato di cadmio al 10 % della ferritina è quella teorica corrispondente alla regola delle fasi.

La solubilità della ferritina nelle condizioni sopradette è indipendente dalla fase solida, non appena la fase solida compare, e perciò la proteina si può considerare come una fase solida ad un componente.

Concludendo, da quanto si è detto, risulta che la ferritina, per la sua costante composizione chimica in seguito a cristallizzazioni successive, e per la sua solubilità, può considerarsi una sostanza unica, nella quale eventuali impurità sono presenti soltanto in quantità inapprezzabile.

C) CARATTERI CHIMICI E CHIMICO-FISICI. — 1. *Solubilità.* — La proteina è solubile in acqua, però la soluzione avviene con estrema lentezza, e viene grandemente facilitata dall'aggiunta anche di tracce di acido acetico. Le soluzioni sono di un colore giallo più o meno intenso a seconda della concentrazione. È poco solubile in alcali, però a differenza della globina è solubile in ammoniaca in presenza di cloruro di ammonio. È solubile negli acidi concentrati. Anche in seguito a ebollizione prolungata con acido cloridrico concentrato non si ha annerimento della soluzione, evidentemente per la scarsissima formazione di sostanze uminiche. Con acido nitrico concentrato la soluzione di ferritina si scolora e si ha un precipitato di proteina amorfa debolmente colorato in giallo. Con alcali concentrati la proteina precipita dalle sue soluzioni.

Le soluzioni di ferritina precipitano con alcool, diossano ed altri solventi organici, ed il precipitato è di nuovo solubile in acqua, il che fa pensare che in seguito a tale trattamento la proteina precipiti senza denaturazione.

Interessante è lo studio della solubilità della ferritina in soluzioni saline di differente concentrazione. Come si sa lo studio della solubilità delle proteine in soluzioni saline, iniziato da HARDY, MELLAMBY e OSBORNE è stato ripreso recentemente da COHN <sup>(1)</sup> e da GREEN <sup>(2)</sup>, ai quali si deve un gran numero di dati sperimentali sulla solubilità di proteine in diversi sali e la formulazione matematica delle leggi che regolano tale fenomeno. Per la ferritina ho provato la solubilità in NaCl, KCl,  $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ ,  $\text{Na}_2\text{SO}_4$ . Nei due primi sali in qualunque concentrazione la ferritina è sempre solubile. Negli ultimi due invece la solubilità aumenta fino a una concentrazione corrispondente al 10 % della saturazione, poi va progressivamente diminuendo, fino a che ad una concentrazione corrispondente al 50 % della

---

<sup>(1)</sup> COHN e PRENTISS, « J. gen. Physiol. », 8, 619, 1927.

<sup>(2)</sup> GREEN, « J. Biol. Chem. », 93, 495, 1931.

saturazione la ferritina precipita dalle sue soluzioni. Questo comportamento è identico a quello dell'emoglobina.

2. *Comportamento col calore.* — La ferritina è una proteina caratteristica per il fatto che un riscaldamento a 80°C, che fa coagulare un gran numero di sostanze proteiche, non ha alcuna azione visibile su di essa, tanto che la sua preparazione allo stato cristallino, è preceduta da un riscaldamento dell'estratto di milza alla temperatura indicata. Anche all'ebollizione le soluzioni di ferritina prive di sali coagulano soltanto in piccola parte. Se però esse sono portate al punto isoelettrico con l'aggiunta ad esempio di acido acetico, si ha già alla temperatura di 90° C la formazione di un abbondante coagulo. Per questo comportamento la ferritina si discosta dalla maggior parte di proteine animali, le quali sono facilmente coagulate col calore, e si avvicina alle globuline vegetali, le quali sono per lo più molto incompletamente coagulate riscaldando le loro soluzioni, e qualche volta non sono coagulate affatto.

3. *Reazioni qualitative.* — Nelle soluzioni di ferritina, a causa del loro colore rosso molto intenso, le reazioni cromatiche delle proteine non sono evidenti. Ma nella proteina denaturata e incolore le reazioni di MILLON, di HOPKINS COLE, del biureto e di SAKAGUCHI compaiono in maniera chiara, dimostrando così in essa la presenza di tirosina, triptofano e arginina.

Caratteristica è la reazione xantoproteica. Se ad una soluzione di ferritina si aggiunge HNO<sub>3</sub> concentrato, la soluzione si decolora. Si ha un precipitato colorato in giallo che in seguito a riscaldamento si ridiscioglie.

Con i reattivi degli alcaloidi (acido picrico, fosfotungstomolibdico, e tannino) la ferritina è precipitata, a simiglianza degli istoni, non solo in soluzione neutra, ma anche in soluzione acida. Così pure soluzioni neutre di ferritina precipitano soluzioni povere di sali di altre proteine, ad esempio caseina, comportamento questo comune alle protamine e agli istoni.

4. *Contenuto in ferro.* — Particolare interesse ha l'elevato contenuto in ferro di questa proteina. Proteine contenenti ferro sono, oltre l'emoglobina e altri composti eminici, l'eritrocruorina, la clorocruorina e alcune nucleoproteine. Ma in nessuna di queste proteine si ha un contenuto in ferro così alto.

Per la determinazione del ferro ho proceduto nella seguente maniera: Si disciolgono 100 milligrammi approssimativamente di ferritina in 100 cc. di H<sub>2</sub>O bidistillata, e su 10 cc. di questa soluzione si determina il residuo secco. Si pipettano altri 25 cc. di soluzione in un pallone da micro Kjeldahl. Si aggiungono 2 cc. di HCl concentrato e 0,5 cc. di HNO<sub>3</sub> concentrato e si fa digerire per 20'. Si aggiungono 20 cc. di H<sub>2</sub>O e si fa bollire. Si raffredda, si porta quantitativamente in un palloncino da 100 cc. e si mescola. Si pipettano 25 cc. di soluzione in un tubo da saggio, si aggiungono 10 cc.

di alcool amilico e 2 cc. di KSCN saturo. Si mescola. In un altro tubo da saggio si aggiungono 20 cc. di acqua distillata, 10 gocce di acido cloridrico concentrato, 10 cc. di alcool amilico, 2 cc. di una soluzione satura di KSCN e tanti cc. di una soluzione standard di cloruro ferrico da aversi un colore scuro all'incirca come nella soluzione contenente ferritina. Si agitano le due soluzioni e si centrifuga. Si pipettano i due strati di alcool amilico in due tubi da calorimetro. La lettura al calorimetro permette di poter calcolare la quantità di ferro presente nella soluzione.

Con questo metodo in tre preparazioni differenti due volte cristallizzate, ho trovato i seguenti valori:

I° 18,8 —

II° 19,4 —

III° 19,0 —

Come si è detto il contenuto in ferro della proteina non varia con le cristallizzazioni successive.

Se si calcola il peso minimo molecolare della ferritina in base al contenuto in ferro di essa, nella ipotesi che per ogni molecola di proteina vi sia un solo atomo di ferro, si trova un valore di 293 contro 16.000 per l'emoglobina.

Circa la maniera come il ferro è legato nella molecola proteica è ancora prematuro fare delle ipotesi. In un recente lavoro SMYTHE e SCHMIDT <sup>(1)</sup> hanno calcolato la quantità di ferro che può essere combinata dalla gelatina e dalla caseina, nella ipotesi che i gruppi che reagiscono nella molecola proteica esercitino lo stesso effetto degli aminoacidi liberi. Essi hanno trovato che un cc. di soluzione all'1 % di caseina si combina con 0,24 mg. di ferro, e 2 cc. di soluzione 1,52 % di gelatina si combinano con 0,33 mg. di questo metallo. Cioè 100 mg. di caseina e di gelatina si combinano rispettivamente con 2,4 e 1 mg. di ferro. Nella ferritina tali quantità di metallo legato sono di gran lunga superate.

Il ferro della ferritina non è dializzabile anche in seguito a dialisi protratta. Ma una parte almeno di esso deve essere legato in maniera labile; di fatti soluzioni diluite ed acidificate con HCl di ferritina si colorano intensamente in presenza di solfocianato. Nelle soluzioni neutre o acidificate con acido acetico la reazione non compare.

Il colore rosso delle soluzioni di ferritina non si modifica con le sostanze riducenti ( $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_4$ , HCOH). Solo con anidride solforosa si attenua leggermente e la proteina precipita.

È possibile allontanare il ferro dalla proteina per mezzo di un riscaldamento con acido cloridrico diluito a 60°C. Con ciò si ha un precipitato bianco di proteina denaturata e una soluzione contenente  $\text{FeCl}_3$ .

---

<sup>(1)</sup> SMYTHE e SCHMIDT, « J. Biol. Chem. », 88, 241, 1930.

5. *Contenuto in aminoacidi.* — Lo studio dei prodotti di idrolisi della proteina eseguito col metodo classico di VAN SLYKE, ha messo in evidenza dei fatti caratteristici.

L'analisi è stata eseguita nella maniera solita. Soltanto per la determinazione dell'arginina, ho creduto più pratico modificare leggermente la tecnica ed eseguire la distillazione dell'ammoniaca in una beuta contenente  $H_2SO_4$ , 0,1 N per mezzo di un refrigerante da micro Kjeldahl. Si evita in tal modo ogni possibilità di risucchio, che è invece facilissima ad aversi se si adopera l'apparecchio a bolle di Folin consigliato da VAN SLYKE.

Nell'esecuzione dell'analisi ho potuto osservare alcuni fatti interessanti. Durante l'idrolisi con HCl non si ha alcun annerimento; il che sta a indicare una scarsissima formazione di sostanze uminiche. Nel filtrato delle basi si forma, a freddo un abbondante precipitato di cristalli, che si sciolgono a caldo. Perciò la diluizione e il prelevamento di campioni per il dosaggio dell'azoto totale ed aminico nel filtrato delle basi è stato fatto a caldo. Allo scopo di individuare la natura dei cristalli, si è precipitato in un'aliquota del filtrato delle basi l'acido fosfotungstico con  $BaCl_2$  previa alcalinizzazione con NaOH. Nel filtrato acidificato con HCl e concentrato, si ha ancora un'abbondante deposito di cristalli, che fondono ad una temperatura di  $138^\circ C$ , analogamente ai cristalli dell'acido D-glutammico.

La ripartizione dell'azoto (valori medi di due determinazioni concordanti) è riportata nella seguente tabella, nella quale viene riferita, a scopo comparativo, la ripartizione dell'azoto dell'emoglobina di cavallo.

|                                                                          | Emoglobina | Ferritina |
|--------------------------------------------------------------------------|------------|-----------|
| N ammoniacale . . . . .                                                  | 5,24       | 2,861     |
| N melaninico . . . . .                                                   | 3,6        | 0,429     |
| N cistina . . . . .                                                      | 0          | 0         |
| N arginina . . . . .                                                     | 7,7        | 11,4      |
| N istidina . . . . .                                                     | 12,7       | 10,2      |
| N lisina . . . . .                                                       | 10,9       | 8,69      |
| N basico totale . . . . .                                                | 31,3       | 30,29     |
| N aminico del filtrato . . . . .                                         | 57         | 61,71     |
| N non aminico del filtrato (prolina,<br>ossiprolina, 1/2 triptofano) . . | 2,9        | 3,77      |

I fatti più importanti che risultano dall'analisi sono i seguenti:

1° Scarso contenuto della ferritina in asparagina e glutamina e scarsissima formazione di azoto melaninico. Delle varie proteine studiate soltanto la gelatina ha un contenuto più basso di queste due frazioni di azoto. Precisamente 2,25 % di azoto amidico, e 0,07 % di azoto melaninico.

2° Relativamente scarso contenuto in basi, ed elevato contenuto in aminoacidi monoaminici e in particolare in aminoacidi dicarbossilici.

6. *Punto isoelettrico.* — La determinazione del punto isoelettrico è stata fatta per mezzo del metodo del minimum di solubilità. Si è proceduto nella seguente maniera: 6 mgr. di ferritina due volte cristallizzata sono posti in un palloncino tarato da 20 cc. Si aggiunge esattamente 2 cc. di acido acetico N e si porta a volume con H<sub>2</sub>O bidistillata. Si prepara la seguente serie di tubi da saggio:

|                                         | 1   | 2 | 3 | 4 | 5 | 6   | 7   | 8   |
|-----------------------------------------|-----|---|---|---|---|-----|-----|-----|
| cc. di ferritina in acido acetico 0,1 N | 1   | 1 | 1 | 1 | 1 | 1   | 1   | 1   |
| cc. acetato sodico 0,1 N . . . . .      | 0,5 | 1 | 2 | 4 | 8 |     |     |     |
| cc. acetato sodico 1 N . . . . .        |     |   |   |   |   | 1,6 | 3,2 | 6,4 |
| cc. H <sub>2</sub> O . . . . .          | 8,5 | 8 | 7 | 5 | 1 | 7,4 | 5,8 | 2,6 |

I tubi vengono tenuti a b. m. a 50° C.

Dopo venti minuti si osserva che nei tubi 5, 6 e 7 si ha il massimo di intorbidamento e nel tubo 6 la formazione di un precipitato. Si calcola il pH della soluzione contenuta nel tubo 6 in base alla nota formula:

$$H = K \frac{\text{concentrazione acido}}{\alpha \times \text{concentrazione sale}}$$

in cui:

$K$  (costante di dissociazione dell'acido acetico) =  $1,85 \times 10^{-5}$

$\alpha$  (grado di dissociazione dell'acetato sodico = 0,87 (ac. sod. 0,01 N),  
= 0,79 (ac. sod. 0,1 N),

concentrazione dell'acetato sodico in mole per litro =  $1,6 \times 10^{-1}$ ,

concentrazione dell'acido acetico in mole per litro =  $1 \times 10^{-2}$ .

Si trova pH = 5,83.

Se si paragona questo valore con quello di altre proteine colorate, si osserva che esso è dello stesso ordine di grandezza per la catalasi (p. i. = 5,5), per l'emocianina (5,5) per il fermento giallo (5,22); mentre il punto isoelettrico dell'emoglobina (6,7) e dell'emoglobina ridotta (6,79) è notevolmente più alcalino.

Questo dato è in perfetto accordo col relativamente scarso contenuto della ferritina in aminoacidi basici e col suo elevato contenuto in aminoacidi dicarbossilici.

7. *Spettro di assorbimento.* — Una soluzione acquosa di ferritina di concentrazione 0,1 % presenta un assorbimento che da 5.000 Å degrada prima lentamente fino a 4.000, poi rapidamente; come estensione tale banda

di assorbimento è analoga a quella del cloruro di ferro, mentre come andamento è leggermente diversa.

Sono in corso esperimenti sulla curva di assorbimento nella regione dell'ultravioletto, in quantochè quasi tutte le proteine ed alcuni aminoacidi hanno un forte e caratteristico assorbimento specifico tra 3.000 e 2.500 Å.

L'assorbimento della luce non è dovuto al componente proteico. Infatti, se per mezzo del trattamento con HCl a caldo si separa la proteina amorfa, lo spettrogramma della soluzione cloridrica non contenente più proteina è identico a quello della proteina in toto.

#### CONCLUSIONI.

Si sono studiate la costituzione chimica ed alcune proprietà chimico fisiche di una proteina cristallizzabile presente nella milza e nel fegato, e si è dimostrato che tale proteina è una fase solida ad un componente.

---



**Petrografia.** — *Le differenziazioni lenticolari scure nei graniti dell'Ogliastro di Lanusei (Sardegna)* <sup>(1)</sup>. Nota di CARLO LAURO, presentata <sup>(2)</sup> da S. E. FEDERICO MILLOSEVICH.

Da oltre un anno ho pronta la parte sperimentale di una vasta monografia petrografica di dettaglio sopra il massiccio eruttivo dell'Ogliastro in Sardegna <sup>(3)</sup>, con particolare riguardo alle rocce granitoidi e filoniane della conca di Lanusei.

---

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia e Petrografia della R. Università di Roma.

<sup>(2)</sup> Nell'Adunanza del 21 marzo 1940-XVIII.

<sup>(3)</sup> Questo studio, prevalentemente microscopico-chimico, non disgiunto per altro dalla necessaria inquadratura geologica, frutto anche delle personali osservazioni fatte durante le ricognizioni sul terreno, interessa il massiccio granitico che costituisce l'impalcatura della regione e le sue diverse « facies », le formazioni filoniane ad esso massiccio direttamente legate ed inoltre appunto le differenziazioni lenticolari scure dei graniti stessi.

Il complesso delle ricerche sino ad ora espletate comprende quella stessa regione che appare improvvisa a chi si muova verso Lanusei, sia per la ferrovia, sia per la rotabile che scende dal passo di Correboi, circa 800 metri dopo la stazione di Arzana. Un enorme anfiteatro aperto sul mare ad oriente, dalle formazioni mesozoiche del capo Monte Santo a nord, sino alla Punta Nera, estremità del basaltico Teccu di Bari Sardo a sud, e più in giù ancora sino al Capo Sferracavallo e recinto di fianco ed alle spalle da una serie di alture fra i 700 ed i 1200 metri che si susseguono ad arco ellittico, parallelamente alla costa, ed ove il paleozoico eruttivo scompare spesso sotto gli scisti.

Dalla somma delle osservazioni fatte sul terreno e di quelle di natura sperimentale in laboratorio, quali possono essere desunte dai risultati dell'analisi chimica di circa una ventina di campioni diversi e dall'esame microscopico di varie decine di sezioni sottili, ho potuto già trarre delle deduzioni di un certo interesse.

Non mi sono per altro ancora deciso a darle alle stampe, anche e soprattutto perchè desidero prima espletare una nuova ricognizione sul terreno; ricognizione che per diverse ragioni ho sempre dovuto rimandare e che intendo estendere e alla parte più settentrionale e a quella più meridionale del massiccio stesso che si prolunga per una quarantina di chilometri, incastrato a mo' di stretto cuneo fra il mare e gli scisti, sino all'ammasso porfirico di Monte Perdosu.

Do notizia in questa Nota di parte dei risultati sperimentali ottenuti e precisamente di quelli riguardanti alcuni dei noduli di concentrazione basica che delle dimensioni più svariate, è facile rinvenire nelle formazioni granitiche della zona stessa.

A ciò fare mi induce, oltre la possibilità che in tal modo mi si offre di anticipare qualche risultato fra quelli ottenuti sulle formazioni eruttive della regione in genere, la constatazione che, come è noto, nella non troppo folta letteratura petrografica riguardante la Sardegna, non sono molte le notizie a questo proposito. E se è pur vero che la conoscenza di questi « schlieren » può avere significato solamente se inquadrata entro problemi di carattere generale, abbraccianti un intero massiccio eruttivo, ciò non toglie che le sole notizie esaurienti a questo proposito si debbono quasi esclusivamente al CAVINATO <sup>(1)</sup> che ha studiato le formazioni della Sardegna sud-orientale raccolte attorno al gruppo dei Sette Fratelli.

C. RIVA nella sua bella opera postuma <sup>(2)</sup>, nella quale una parte della zona da me presa in esame occupa un posto particolare, dà qualche notizia sopra questi inclusi autigeni nel granito. Ma queste notizie inquadrate come sono in una visione più ampia e più generale, quale è quella che vuol abbracciare tutto l'eruttivo paleozoico della Sardegna ed i contatti a questo legati, sono per altro necessariamente sintetiche. Forse più sintetiche di quanto non avesse in animo l'autore; ma comunque si limitano a qualche cenno sparso qua e là nel complesso dell'opera sui risultati dell'osservazione microscopica e solo un esame un poco particolareggiato è riportato per gli inclusi nella granitite di Tempio Pausania.

Fu questi il solo, per quanto mi consta, che si occupò dello eruttivo dell'Ogliastro di Lanusei da un punto di vista petrografico, mentre tutti gli altri che della stessa zona si occuparono, prima o dopo di lui, il FOURNET <sup>(3)</sup> il LAMARMORA <sup>(4)</sup> il VON RATH <sup>(5)</sup> il VARDABASSO <sup>(5)</sup> ecc. lo fecero incidentalmente e comunque sempre considerandone la caratteristiche geologiche ed inquadrando le loro osservazioni entro più vasti orizzonti interessanti l'intera Sardegna.

---

<sup>(1)</sup> A. CAVINATO, *Studi petrografici sulla Sardegna sud-orientale*. Padova, 1935.

<sup>(2)</sup> C. RIVA, *Le rocce granitoidi e filoniane della Sardegna*. «Atti della R. Accademia di Scienze fisiche e naturali», Napoli, 1905 serie, II, vol. XII, n. 9, pagg. 1-108.

<sup>(3)</sup> J. FOURNET, *Observations géologiques sur la Sardaigne*. «Ann. de la Soc. de Agr. de Lyon», vol. VIII, 1856.

<sup>(4)</sup> A. LAMARMORA, *Voyage en Sardaigne*. Torino, 1857.

<sup>(5)</sup> S. VARDABASSO, *Sulla giacitura e forma del nucleo granitico del massiccio Sardo-Corso*. «Rendiconti del Seminario della Facoltà di scienze della R. Università», Cagliari, 1933, IV, pag. 149; *Visioni geomorfologiche della Sardegna*. Cagliari, 1934.

L'impalcatura del massiccio è, come si è detto, costituita dal granito. La « facies » di questo prevalente nella regione è certo quella di una granitite anfibolica: non che manchino anche tipi spiccatamente granititici a sola biotite; ma questi sono di gran lunga meno frequenti nei confronti della facies ad anfibolo, se non prevalente, per lo meno in quantità equivalente a quella della biotite stessa. Questa per altro non manca mai del tutto. Si hanno del resto tutti i termini di passaggio dalla granitite anfibolica alla granitite a sola biotite, così come verso termini prevalentemente anfibolici e verso forme marcatamente più basiche sino a quelle spiccatamente granodioritiche di tipo tonalitico (1).

(1) Il tipo medio della « facies » delle rocce granitoidi più diffusa nella zona, sostanzialmente una granitite anfibolica, avente struttura granitoide normale e costituita essenzialmente da quarzo, feldspato alcalino, per lo più microclino, più abbondante feldspato sodico-calcico, prevalentemente oligoclasio più o meno basico, biotite ed orneblenda verde, ha la composizione chimica riportata qui sotto alla lettera (A).

Sotto a (B) riportò i risultati ottenuti per quella che ritengo sia anche una delle « facies » più basiche avente pure struttura granitoide normale e costituita essenzialmente da quarzo, pochissimo ortose, un plagioclasio abbondante, abitualmente di natura oligoclasica andesinica, talvolta anche più basica, biotite ed orneblenda verde.

|                                          | (A)   | (B)   |
|------------------------------------------|-------|-------|
| SiO <sub>2</sub> . . . . .               | 67,35 | 64,61 |
| TiO <sub>2</sub> . . . . .               | 0,40  | 0,85  |
| ZrO <sub>2</sub> . . . . .               | —     | 0,01  |
| Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> . . . . . | 16,14 | 14,32 |
| Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub> . . . . . | 1,15  | 1,64  |
| FeO . . . . .                            | 2,33  | 3,39  |
| MnO . . . . .                            | 0,03  | 0,10  |
| MgO . . . . .                            | 1,52  | 1,92  |
| CaO . . . . .                            | 3,82  | 5,13  |
| K <sub>2</sub> O . . . . .               | 3,33  | 3,21  |
| Na <sub>2</sub> O . . . . .              | 2,65  | 2,80  |
| H <sub>2</sub> O— . . . . .              | 0,18  | 0,14  |
| H <sub>2</sub> O+ . . . . .              | 0,86  | 1,56  |
| P <sub>2</sub> O <sub>5</sub> . . . . .  | 0,02  | 0,03  |
|                                          | 99,78 | 99,81 |

Da questi valori si ricava, per le costanti magmatiche secondo Niggli:

|           | sf  | tl   | al   | fm   | c    | alc  | k    | mg   | c/tm |
|-----------|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|
| (A) 287,8 | 1,3 | 40,6 | 21,9 | 17,5 | 20,0 | 0,45 | 0,44 | 0,80 |      |
| (B) 251,5 | 2,5 | 32,8 | 27,3 | 21,4 | 18,5 | 0,43 | 0,41 | 0,78 |      |

Ridotte molto spesso a sabbione per le intense azioni di degradazione e decomposizione subite, le formazioni granitiche imprimono una fisionomia particolare alla morfologia della regione. Si ha così una serie di alture ben distinte le une dalle altre, di mole ed elevazione gradatamente decrescenti verso il mare, a contorni sfumati e pendii lievi. Frammezzo a queste alture o sopra e attraverso ad esse spiccano, per la loro angolosità e per il colore rossiccio, rispettivamente gli ammassi ed i numerosi filoni di porfido; questi ultimi vere muraglie di alcuni metri di altezza e spessore sono così frequenti ed abbondanti in questa zona come forse in nessun'altra.

Nel granito, al contatto granito porfido e nel porfido stesso, numerose sono poi le iniezioni filoniane lamprofiriche (raggiungono anche i due metri di spessore) e quelle acide prevalentemente di tipo aplitico <sup>(1)</sup> che raramente hanno potenza maggiore a qualche decimetro.

Nel granito infine frequentissime sono le differenziazioni lenticolari oscure: di solito della grossezza media di un pugno, sino a qualche decimetro di diametro, non rare per altro anche di dimensioni notevolmente maggiori in grosse lenti, ampie parecchi metri, spesse da parecchi decimetri a qualche metro ed allora con caratteristiche tutte particolari. Le une e le altre per le loro stesse caratteristiche strutturali e mineralogiche si distinguono abbastanza bene dalle inclusioni allotigene, pure relativamente frequenti in alcune parti e costituite per lo più da frammenti di scisto.

(1) Per un'aplite a grana minuta del tipo più diffuso nella regione avente struttura autoallotriomorfa e costituita da quarzo, prevalente microclino fra i feldspati potassici, albite ed oligoclasio acido ho ottenuto all'analisi chimica i valori sotto-riportati da cui ho ricavato le costanti secondo Niggli riportate a fianco.

| (C)                            |       |      |      |
|--------------------------------|-------|------|------|
| SiO <sub>2</sub>               | 76,17 | si   | 472. |
| TiO <sub>2</sub>               | 0,05  | ti   | 0,22 |
| Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> | 13,17 | al   | 48.  |
| Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub> | 0,58  | fm   | 3,9  |
| FeO                            | 0,13  | c    | 5,6  |
| MnO                            | 0,01  | alc  | 42,5 |
| MgO                            | 0,06  | k    | 0,51 |
| CaO                            | 0,84  | mg   | 0,14 |
| K <sub>2</sub> O               | 5,47  | c/fm | 1,41 |
| Na <sub>2</sub> O              | 3,47  |      |      |
| H <sub>2</sub> O <sup>-</sup>  | 0,11  |      |      |
| H <sub>2</sub> O <sup>+</sup>  | 0,19  |      |      |
| S                              | tr.   |      |      |
| F                              | tr.   |      |      |

Gli inclusi autigeni presentano sempre contorno rotondeggiante od ellissoidico abbastanza netto, talora anche perchè segnato da un esile cordone di lamine biotitiche, oppure per una leggera concentrazione marginale costituita da una minutissima associazione quarzoso-feldspatica, come almeno sembra potersi rilevare qualche volta al microscopio.

Il loro colore in massa è grigio più o meno chiaro; solo sensibilmente più scure si presentano quelle lenti di maggiori dimensioni prima ricordate. La grana è la più varia, dalla minuta, alla media con grossi individui di biotite, alla compatta quasi porfirica nelle differenziazioni più scure di cui si è già detto.

La struttura di queste ultime anche al microscopio ha apparenza porfirica per grossi fenocristalli di feldspato immersi in una pasta a grana minutissima, prevalentemente feldspatica anfibolica e risolvibile solo a forte ingrandimento.

La struttura più diffusa e per altro corrispondente agli « schlieren » di piccole dimensioni, è essenzialmente quella granulare ipidiomorfa, ma non mancano anche tipi in cui i singoli individui componenti rivelano una certa tendenza ad assumere presso a poco le stesse dimensioni e lo stesso grado di idiomorfismo.

Le caratteristiche dei minerali componenti queste differenziazioni lenticolari scure sono:

Il *quarzo*, sempre relativamente scarso, si presenta in plaghe di impregnazione del tutto irregolari a colmare gli spazi fra gli altri minerali che include quindi frequentemente. Non presenta particolarità degne di rilievo, salvo che nei rari individui di dimensioni maggiori, ma sempre del tutto allotriomorfi, mostra abitualmente l'estinzione ondulata.

Il *feldspato* prevalente e più diffuso in queste concentrazioni lenticolari è quello di tipo andesinico. Al tavolino universale ho infatti ottenuto come valori medi per la massima estinzione nella zona simmetrica  $\varphi = 19^\circ - 20^\circ$  e per il valore dell'angolo degli assi ottici  $2V = + 89^\circ$ . La percentuale di anortite in essi contenuta è quindi del 39-40 %.

Frequentemente zonato, ho determinato per il nucleo interno più basico un contenuto in anortite che talvolta arriva anche al 63-64 % e che non discende mai al di sotto del 25-26 % per la sottile fascia marginale esterna più acida.

Un plagioclasio a tenore in anortite forse un poco minore, compare nella pasta di fondo di quelle lenti di maggiori dimensioni e a struttura porfirica di cui si è già detto. Ma la loro determinazione riesce assai incerta, causa le loro esigue dimensioni che li rende visibili solo a forte ingrandimento. Anche i grossi e numerosi fenocristalli feldespatici di queste stesse lenti mal si prestano ad una sicura identificazione, e per altro, dalle poche ed incerte misure che ho potuto eseguire, risulterebbero di natura sensibilmente basica sino ad un contenuto in anortite di circa il 50 %. Ma essi

sono talmente alterati e trasformati in prodotti secondari, che salvo qualche rara e piccola plaga, abitualmente del minerale originario non rimane che la forma geometrica.

Ciò capita in parte anche nei noduli di concentrazione di natura più basica: in questi ultimi però ho potuto ottenere delle misure e dei valori abbastanza attendibili. Il massimo valore per l'estinzione nella zona simmetrica ( $\varphi = 25^{\circ}-27^{\circ}$ ) ed il valore per l'angolo degli assi ottici ( $2V = +77^{\circ}$ ) porta in questo caso ad identificare dei termini feldspatici di tipo labradoritico, a contenuto medio in anortite del 50 % e che per il nucleo interno di taluni cristalli zonati arriva anche al 67-68 %.

La geminazione più frequente, oltre a quella secondo la legge della albite è quella secondo la legge di Karlsbad; rara quella secondo la legge del periclino.

I prodotti di alterazione di questi plagioclasti sono alle volte di natura superficiale ed allora consistono precipuamente in abbondante sostanza di natura argillosa ed in granuli di calcite; più frequentemente però l'alterazione appare di natura profonda con formazione di piccoli granuli di epidoto, esili squamette di muscovite e talvolta granuli rotondeggianti od irregolari di zoisite.

Molto raro un feldspato potassico di tipo ortoclasico.

La *biotite* presenta le caratteristiche abituali: più frequente in sezioni rettangolari allungate a contorno frastagliato per fratture o parziale riassorbimento e con le tracce della sfaldatura basale assai marcate cui è sempre parallela l'estinzione. In certi inclusi in cui si presenta in abbondanza ma in piccolissimi individui è perfettamente idiomorfa.

Il pleocroismo molto forte segue il solito schema:

$\alpha$  = giallo legno chiaro

$\beta = \gamma$  = bruno scuro nerastro.

Dalle sezioni rotondeggianti senza tracce di sfaldatura e con valore per l'assorbimento massimo costante, emerge la bisettrice acuta di un piccolissimo angolo degli assi ottici con segno della birifrazione negativo.

Abbastanza frequenti le inclusioni di apatite in sottili cristallini prismatici; scarse invece quelle di zircone sempre con il loro caratteristico contorno policroico. Negli individui di maggiori dimensioni non rare le protrusioni di quarzo.

Anche la *biotite* non si mostra del tutto esente da effetti di deformazioni meccaniche, messe in evidenza specialmente dalle tracce di sfaldatura che appaiono talora leggermente curve e sinuose. Di solito è perfettamente fresca ed inalterata; non mancano per altro, e ciò si verifica ancora negli individui di grossa mole, esempi di trasformazione in clorite manifesti



per l'intensa colorazione verdognola. Questa trasformazione in clorite non è in genere molto avanzata ed è per lo più limitata alla zona periferica ed a strette bande lungo le tracce di sfaldatura, cosicchè ne risulta lo speciale aspetto di « zonatura a fiamme ».

Le rare volte in cui questa trasformazione è estesa all'intero individuo parrebbe potersi riscontrare che la clorite originatasi sia la varietà *pennina*. I suoi caratteri sono infatti: birifrazione molto bassa, colori d'interferenza anomali per lo più violacei, angolo degli assi ottici molto piccolo, forse nullo e segno della birifrazione negativo. L'estinzione si mantiene parallela alle tracce di sfaldatura, cui coincide la direzione di massimo assorbimento, con schema del pleocroismo

giallino molto chiaro  $\perp$  alle tracce di sfaldatura  
verde oliva  $\parallel$  alle tracce di sfaldatura.

Scarsa la formazione di epidoto e di minerali ferruginosi.

L'*orneblenda verde* appare il solo anfibolo contenuto in queste rocce. Di solito perfettamente fresca si presenta in sezioni relativamente idiomorfe, a rombo più o meno regolare ed allora con le tracce di sfaldatura prismatica assai marcata ed intersecantesi a 124°; oppure in tavolette allungate piuttosto irregolari, con una sola traccia di sfaldatura, ma sempre ben evidente. In queste ultime ho ottenuto per l'angolo di estinzione  $\gamma$ : e valori massimi compresi fra i 18° ed i 20°. Il pleocroismo sempre molto intenso segue lo schema

$\alpha$  = giallo verdolino chiaro

$\beta$  = verde marcio

$\gamma$  = verde azzurro intenso.

L'angolo degli assi ottici appare molto grande ed il segno della birifrazione è costantemente negativo. Rari i geminati secondo {100}.

Una caratteristica particolare degli anfiboli è quella di presentarsi abitualmente in piccole plaghe di concentrazione in cui i singoli individui stessi stanno fittamente intrecciati ed intercompenetrati fra di loro.

L'alterazione abituale dell'anfibolo è di tipo cloritico ed è manifesto solamente in quelle grosse lenti di cui si è già detto più volte.

Molto rara e solamente ristretta alle concentrazioni più basiche, la presenza di un pirosseno di tipo diopsidico.

Fra i minerali accessori, oltre a quelli già ricordati sino ad ora, apatite, zircone, epidoto ecc. ho riscontrato talvolta la presenza della titanite, della ortite, della magnetite, tutti in misura assai scarsa, ed anche di qualche raro granulo di pirite.



Ho fatto un esame un poco più particolare dei seguenti quattro campioni, scelti fra i numerosi raccolti nella zona e molti dei quali ho esaminato in sezione sottile.

1°. Concentrazione feldspatica-anfibolica-micacea. Corrisponde a quelle lenti di maggiori dimensioni di cui si è già detto. La struttura è porfirica con la pasta di fondo a quarzo feldspato ed anfibolo, abbastanza fresca almeno nei due primi componenti, mentre completamente alterati e trasformati in prodotti secondari sono i numerosi fenocristalli di feldspato e di biotite.

2°. Concentrazione feldspatica-micaceo-anfibolica a struttura granulare. Il quarzo pare più scarso che non nel campione precedente mentre anfibolo e biotite sono in quantità presso a poco equivalenti.

3°. Concentrazione feldspatica-micaceo-anfibolica analoga a quella del campione precedente, salvo che è a grana più grossa.

4°. Concentrazione feldspatica-anfibolica. Identica per aspetto e struttura alle due precedenti salvo l'assoluta prevalenza dell'orneblenda nei confronti della biotite e la maggiore scarsità di quarzo.

Per questi campioni all'analisi chimica ho ottenuto:

|                                          | 1      | 2     | 3      | 4      |
|------------------------------------------|--------|-------|--------|--------|
| SiO <sub>2</sub> . . . . .               | 59,17  | 58,34 | 57,79  | 54,82  |
| TiO <sub>2</sub> . . . . .               | 0,91   | 0,62  | 0,79   | 0,84   |
| ZrO <sub>2</sub> . . . . .               | 0,01   | 0,02  | 0,02   | —      |
| Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> . . . . . | 17,55  | 17,32 | 18,54  | 17,55  |
| Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub> . . . . . | 2,32   | 1,85  | 1,53   | 1,75   |
| FeO . . . . .                            | 3,84   | 5,32  | 5,57   | 6,27   |
| MnO . . . . .                            | 0,07   | 0,10  | 0,15   | 0,25   |
| MgO . . . . .                            | 2,88   | 2,75  | 3,38   | 4,28   |
| CaO . . . . .                            | 5,88   | 6,18  | 5,66   | 7,13   |
| K <sub>2</sub> O . . . . .               | 2,50   | 2,43  | 2,16   | 2,00   |
| Na <sub>2</sub> O . . . . .              | 2,42   | 2,56  | 2,55   | 3,08   |
| H <sub>2</sub> O <sup>-</sup> . . . . .  | 0,17   | 0,08  | 0,20   | 0,12   |
| H <sub>2</sub> O <sup>+</sup> . . . . .  | 2,49   | 2,29  | 1,68   | 2,10   |
| P <sub>2</sub> O <sub>5</sub> . . . . .  | 0,06   | 0,09  | 0,08   | 0,03   |
| S. . . . .                               | tr.    | —     | 0,01   | —      |
| Cl . . . . .                             | tr.    | 0,01  | 0,02   | tr.    |
| F . . . . .                              | —      | 0,01  | 0,02   | tr.    |
|                                          | <hr/>  | <hr/> | <hr/>  | <hr/>  |
| — O = S + Cl + F . .                     | 100,27 | 99,97 | 100,15 | 100,22 |
|                                          | <hr/>  | <hr/> | <hr/>  | <hr/>  |
| Somma . . . .                            | 100,27 | 99,96 | 100,13 | 100,22 |

Da questi valori ho ricavato per le costanti secondo Niggli:

|                | 1    | 2    | 3     | 4    |
|----------------|------|------|-------|------|
| si . . . . .   | 198. | 189. | 181,7 | 154. |
| ti . . . . .   | 2,29 | 1,50 | 1,87  | 1,78 |
| al . . . . .   | 34,5 | 33.  | 34,3  | 29,2 |
| fm . . . . .   | 31,2 | 32,5 | 34,5  | 37,2 |
| c . . . . .    | 21,1 | 21,4 | 19,1  | 21,6 |
| alc . . . . .  | 13,2 | 13,1 | 12,1  | 12,0 |
| k . . . . .    | 0,40 | 0,38 | 0,36  | 0,28 |
| mg . . . . .   | 0,46 | 0,41 | 0,46  | 0,49 |
| c/fm . . . . . | 0,67 | 0,66 | 0,55  | 0,58 |

Il tipo magmatico cui queste costanti corrispondono è quello *tonalitico* per le concentrazioni segnate con i numeri 1, 2 e 3; la seconda in particolare, e può essere considerata come il tipo medio di questo primo gruppo, corrisponde abbastanza bene a questo termine della più recente classifica dei tipi magmatici del Niggli <sup>(1)</sup>. La 1 leggermente più acida e quindi più ricca in *al* a tutto scapito di *fm* si avvicina sensibilmente al tipo tonalitico così come è inteso dal Bianchi e cioè corrispondente alle dioriti quarzifere anfiboliche-biotitiche dell'Adamello che, come anche recentemente ha rilevato quell'autore <sup>(2)</sup>, rispetto a quello *isofalo* del Niggli rimane, se pure di poco, nettamente spostato per difetto di *fm*.

La 4 invece si differenzia nettamente dalle precedenti e corrisponde al tipo *dioritico normale*.

Per la loro composizione chimica e per quella mineralogica questi noduli di concentrazione basica possono essere quindi definiti come *dioriti quarzifere* di tipo *tonalitico* le prime tre e di tipo *normale* invece la 4.

Le costanti corrispondenti alla « facies » granitica normale e più diffusa nella regione (A), i di cui valori ho riportato nella nota 1 a pag. 3 e quelle della « facies » granitica più basica (B), pure riportate nella stessa nota, corrispondono invece rispettivamente al tipo magmatico *granodioritico* ed a quello *dioritico quarzifero*.

Il confronto fra le costanti di queste « facies » granitiche e di quelle ottenute per le concentrazioni dà un'idea abbastanza precisa della differenziazione magmatica cui corrispondono queste ultime. Si ha in queste una diminuzione notevole nei valori di *si* e proporzionalmente di *al* e

<sup>(1)</sup> NIGGLI P., *Die Magmentypen*. « Schweizerische Mineralogische und Petrographische Mitteilungen », 1936, XVI, pag. 335.

<sup>(2)</sup> BIANCHI A., DAL PIAZ G., *La monografia geologica-petrografica sull'Alto Adige Orientale e regioni limitrofe*. « Periodico di Mineralogia », 1939, pag. 119.

di *alc* mentre pressochè invariato rimane il valore per *c*. Così anche diminuisce il valore per il rapporto fra il potassio e la somma degli alcali.

A tale proposito riesce per altro interessante il raffronto fra le rispettive composizioni mineralogiche quantitative quali si possono ottenere al tavolino integratore e ricalcolate in percentuali in peso.

Rilevo per altro che pure restringendo questa analisi ai soli campioni A, 2 e 4 i risultati ottenuti <sup>(1)</sup> hanno solo una approssimazione relativa, causa la struttura e la grana di queste rocce, sempre irregolari oltrechè un poco grosse e per la presenza di più grossi individui o per l'abituale concentrazione in plaghe degli anfiboli.

|                               | A    | 2    | 4    |
|-------------------------------|------|------|------|
| quarzo . . . . .              | 20,5 | 11,3 | 7.   |
| feldspato potassico . . . . . | 20.  | 3,5  | 2,7  |
| plagioclasio . . . . .        | 40,4 | 48,1 | 50,1 |
| biotite. . . . .              | 9.   | 16.  | 8,1  |
| anfibolo . . . . .            | 9,7  | 19,1 | 30,3 |
| accessori. . . . .            | 0,4  | 2.   | 1,8  |

Questi risultati comunque confermano che, a parte le diverse proporzioni dei singoli feldspati partecipanti, si deve ricercare in buona parte nella maggiore concentrazione dei minerali femici oltrechè nella loro grana più minuta, la ragione di queste differenziazioni lenticolari scure e pertanto resta perfettamente giustificata questa loro definizione.

Nei confronti poi delle formazioni filoniane lamprofiriche pure così frequenti nella zona e di cui riporto le caratteristiche di un esemplare tipico nella nota a pie' pagina <sup>(2)</sup> queste concentrazioni o per lo meno le più basiliche non si discostano di molto tanto che possono essere riferite allo stesso tipo magmatico.

Ritengo ovvia ogni discussione in merito al modo di formazione di questi noduli che comunque è da ritenere, per le loro caratteristiche stesse, già formati all'atto della consolidazione della roccia che li include.

Nella figura 1 riporto il diagramma di differenziazione secondo Niggli con particolare riguardo alle caratteristiche di queste concentrazioni nei confronti di quelle delle « facies » granitiche normali e basiliche oltre che

<sup>(1)</sup> Nei singoli componenti sono compresi anche gli eventuali prodotti di alterazione e di trasformazione.

<sup>(2)</sup> Riporto qui i risultati ottenuti all'analisi microscopica e chimica di un campione del tipo che mi pare il più diffuso e che può identificarsi sostanzialmente in una spessartite.

Ha struttura fortemente tendente alla porfirica ed è costituito essenzialmente da un plagioclasio di tipo labradoritico, orneblenda verde e bruna, oltre a pochissimo quarzo e ad ancora più scarsa biotite:

delle forme differenziate leuco e melanocrate. Il diagramma ha l'andamento normale per i tipi alcali-calcei, con *isofalia* che giace in un punto intermedio fra il vecchio tipo tonalitico *isofalo* del Niggli<sup>(1)</sup> e quello nuovo dello stesso autore e già ricordato precedentemente. Vi è però da rilevare l'intersezione delle spezzate *fm* e *c*, fatto che si verifica abbastanza raramente ma che non è nuovo e, nel caso particolare, è dovuto incidentalmente al tipo aplitico riportato che è straordinariamente povero in

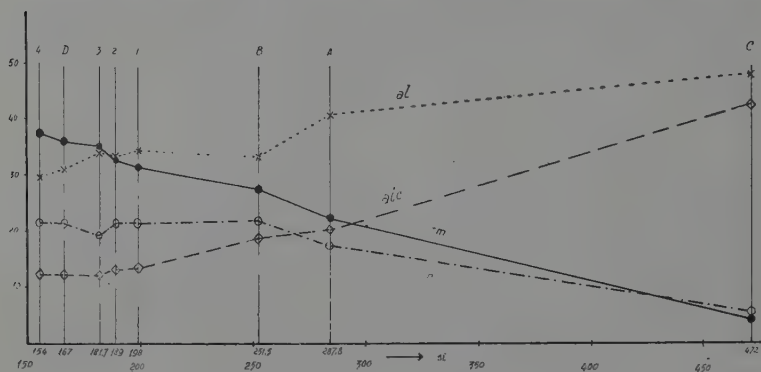


Fig. 1.

minerali colorati e contemporaneamente non è troppo acido. È giustificato quindi il prevalere del valore di *c* nei confronti di quello di *fm*.

Manca nel diagramma, come anche nella Nota, ogni riferimento o dati analitici per i porfidi della regione, che ho tralasciato perchè illustrati

| (D)                            |       |      |      |
|--------------------------------|-------|------|------|
| SiO <sub>2</sub>               | 55,81 | si   | 167. |
| TiO <sub>2</sub>               | 1,90  | ti   | 4,25 |
| Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> | 17,64 | al   | 31.  |
| Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub> | 2,44  | fm   | 35,7 |
| FeO                            | 7,07  | c    | 21,1 |
| MnO                            | 0,13  | alc  | 12,2 |
| MgO                            | 2,74  | k    | 0,32 |
| CaO                            | 6,57  | mg   | 0,34 |
| K <sub>2</sub> O               | 2,05  | c/fm | 0,59 |
| Na <sub>2</sub> O              | 2,85  |      |      |
| H <sub>2</sub> O-              | 0,14  |      |      |
| H <sub>2</sub> O+              | 0,75  |      |      |

100,09

<sup>(1)</sup> NIGGLI P., *Gesteins-und Mineralprovinzen*. Berlin, 1923.

ampiamente dal Riva <sup>(1)</sup>, come anche a tutti gli altri risultati per le rocce granitoidi e filoniane da me ottenuti ed ancora inediti. Questi per altro non modificherebbero sostanzialmente il diagramma stesso salvo a riportare nel loro normale rapporto i valori per *c* ed *fm* corrispondentemente ai più alti valori per *si*. Per questo, per quanto ogni conclusione di carattere generale sia ancora prematura, ritengo tuttavia che lo stesso diagramma rappresenti, già ora nelle sue linee generali, abbastanza fedelmente il chimismo dell'eruttivo paleozoico di questo settore della Sardegna o per lo meno per il nucleo centrale del massiccio dell'Ogliastra.

Mi limito in questa Nota solo a rilevare che, almeno per i risultati ottenuti sino ad ora, nei confronti delle formazioni dello stesso tipo della Sardegna ed in particolare di quelle studiate dal Cavinato <sup>(2)</sup>, questa della Ogliastra di Lanusei, appare, per così dire, relativamente più omogenea, nel senso che molto più ristretto risulta l'intervallo entro cui oscillano i vari termini. Infatti così come meno acide risultano le forme aplitiche, in corrispondenza forse alla « facies » normale granitica che è pure leggermente più basica, di gran lunga meno marcate risultano poi le forme melanocrate che hanno valori per *si* che non discendono mai al di sotto di 150 unità, mentre ad esempio, per la Sardegna Sud-orientale, Cavinato ha trovato anche valori eguali a 106 per una odinite e che del resto scendevano già a 112-113 per delle « facies » gabbroidi del granito stesso.

I processi di differenziazione tanto spinti altrove appaiono qui dunque relativamente più limitati, ciò che forse sta in relazione al fatto che il nucleo stesso del massiccio appare, per così dire, già sensibilmente differenziato con i suoi graniti anfibolici, nei confronti della più gran parte delle formazioni granitiche della Sardegna cui è certamente più o meno direttamente legato.

---

<sup>(1)</sup> Loc. cit.

<sup>(2)</sup> Loc. cit.

**Antropologia.** — *Industrie musteriane e paleolitiche superiori nelle dune fossili e nelle grotte litoranee del Capo Palinuro* <sup>(1)</sup>. Nota di ALBERTO CARLO BLANC, presentata <sup>(2)</sup> da SERGIO SERGI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

I risultati conseguiti con lo studio delle formazioni litorali quaternarie della Toscana e del Lazio mi hanno indotto ad estendere analoghe indagini in altre zone costiere tirrene, con lo scopo di ricercarvi le tracce delle oscillazioni subite dalla linea di riva marina nel corso del Pleistocene, e la possibilità di stabilirne la correlazione cronologica con le variazioni climatiche e la successione delle culture preistoriche <sup>(3)</sup>.

Per suggerimento del prof. S. Visco, e per invito della Sezione di Salerno dell'Istituto Italiano di Paleontologia Umana, è stata iniziata nell'estate 1939 XVIII, una serie di campagne di esplorazione geologica e preistorica della costiera del Capo Palinuro <sup>(4)</sup>.

Su questo promontorio, costituito di calcare mesozoico, la Carta Geologica d'Italia segna la presenza di estese formazioni quaternarie. Sulla costiera si aprono numerose grotte, una delle quali ha già fornito, fin dal secolo scorso, testimonianze sulla presenza di un riempimento contenente industria preistorica, di tipo ed età fino ad ora non ben definite <sup>(5)</sup>.

Questa prima campagna di ricerche ha consentito di precisare la natura e l'estensione delle suddette formazioni quaternarie e di accertare

---

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito presso l'Istituto Italiano di Paleontologia umana.

<sup>(2)</sup> Nell'Adunanza del 21 marzo 1940-XVIII.

<sup>(3)</sup> A. C. BLANC, *Sulla stratigrafia quaternaria dell'Agro Pontino e della Bassa Versilia*. « Boll. Soc. Geol. It. », LV, fasc. 2. Roma, 1936; *Ueber die Quartärstratigraphie des Agro Pontino u. der Bassa Versilia*. « Verhandl. III Intern. Quartär Konferenz. », Vienna, 1936; *Low levels of the Mediterranean sea during the Pleistocene glaciation*. « Quart. Journ. Geol. Soc. of London », XCIII. Londra, 1937.

<sup>(4)</sup> A. C. BLANC, *Le dune fossili e le grotte paleolitiche del Capo Palinuro*. « Atti XXVIII Congresso S. I. P. S. », Pisa, 1939.

<sup>(5)</sup> Vedi bibliografia in G. DE LORENZO e G. D'ERASMO, *L'Elephas antiquus » nell'Italia meridionale*. « Atti R. Acc. Sc. Fis. e Mat. », 2ª serie, XVII, n. 11. Napoli, 1927; M. TROTTA, *Grotte della Campania*. « Le Grotte d'Italia », 1931.

la presenza di industria musteriana e paleolitica superiore in numerosi giacimenti.

LE DUNE FOSSILI DEL CAPO PALINURO. — Il villaggio ed il porto di Palinuro sono costruiti su sabbie dunari pleistoceniche. Questi terreni sono indicati sulla Carta Geologica d'Italia (foglio 209 della carta al 100.000 dell'I. G. M.) con la notazione *Qs*: *sabbioni sciolti o poco cementati. Antiche spiagge marine*. L'effettiva estensione della formazione non corrisponde a quella indicata: in realtà la serie di alture che giunge fino a 190 metri di altezza, tra Caprioli e Palinuro, attribuita a sabbie quaternarie dalla Carta Geologica, è costituita da conglomerati in grandi banchi con elementi calcarei, silicei, e di rocce cristalline, analoghi a quelli segnati sulla Carta Geologica nella regione compresa tra Centola e Palinuro, ed attribuiti all'Eocene (notazione *Emc.*). Essi sono ricoperti, specie nella regione pedemontana, da detriti di falda, rimaneggiati dal ruscellamento sui pendii (notazione *Qc.*: *arenarie e puddinghe sciolte rimaneggiate*); soltanto ai piedi di queste alture, nella parte confinante con la spiaggia attuale, verso occidente, si addossa una serie di lembi della formazione dunare quaternaria, la quale diventa continua, aumentando notevolmente di spessore e di estensione approssimandosi al paese di Palinuro, di cui costituisce da sola il sottosuolo, ed oltre, ove giunge poi a ricoprire una buona parte del promontorio omonimo.

Le dune fossili, costituite da sabbioni arrossati, a stratificazione incrociata, parzialmente cementati dalla permeazione di acque calcarifere in zone conformi alla stratificazione, si sono conservate parzialmente nella parte più alta, sub-pianeggiante del promontorio. Esse sono state invece dilavate ed asportate dalla acque selvagge, che hanno posto in evidenza il sottosuolo calcareo, nel terzo superiore del pendio, mentre nella zona pedemontana e particolarmente nella insenatura del porto di Palinuro, esse sono quasi integralmente conservate per uno spessore di qualche decina di metri. Le pareti molto ripide dei profondi valloncini scavati in seno alla formazione, ne mostrano la sezione.

La posizione di queste dune fossili, oggi sospese sul mare, indica chiaramente che esse costituiscono i residui di terreni molto più estesi. Esse si sono formate quando le condizioni costiere erano diverse da quelle attuali, ed, in particolare, il livello marino era più basso di quello odierno, con conseguente spostamento verso occidente della linea di spiaggia, ed emersione della piattaforma continentale, oggi nuovamente sommersa. Solo da questa il vento ha potuto prelevare e sospingere, addossandole sia alle colline eoceniche, sia al massiccio mesozoico del promontorio, le sabbie costituenti le dune. La costiera di Palinuro testimonia dunque una successione di eventi geologici e fisiografici molto analoga, per non dire identica, a quella già riscontrata in numerose località costiere della To-



seana e del Lazio. In particolare le dune quaternarie di Palinuro rammentano le dune sospese post-tirreniane di Castiglioncello <sup>(1)</sup> e quelle dell'Agro Pontino <sup>(2)</sup>.

L'industria paleolitica che ho raccolto nelle dune di Palinuro conferma del resto questo ravvicinamento: nella parte superiore dei sabbioni addossati al promontorio calcareo tra il paese di Palinuro ed il porto, a circa m. 2 dalla superficie della formazione, ho raccolto tipica industria musteriiana, di selce e di diaspro. A nord di Palinuro, ove le dune sono profondamente incise in una rete di piccoli cañons, ho raccolto in superficie alcuni oggetti litici di tipo paleolitico superiore. Sul lato orientale del promontorio, volto verso la Molpa, un lembo di dune addossate al calcare, mostra un livello con industria litica e molluschi terricoli, a circa m. 2 di profondità dalla superficie.

Sono frequenti ovunque, in seno a queste sabbie, caratteristici ciottolami corras e patinati, analoghi a quelli segnalati nel sottosuolo della Versilia e nelle dune musteriiane dell'Agro Pontino.

Si conferma così la vasta estensione delle formazioni di origine eolica, testimoniando condizioni ambientali litoro-desertiche sulla costiera tirrena durante alcuni periodi del Pleistocene.

LE GROTTIE LITORANEE. — È stato percorso in barca ed esplorato con cura il promontorio di Palinuro ed il tratto di litorale che si stende al Sud, fino alla Torre Muzza, oltre Marina di Camerota, per un tratto di circa 20 chilometri.

È apparso che anche su questa costiera del Salernitano esistono numerose testimonianze delle oscillazioni subite dalla linea di riva durante il Pleistocene.

Tra il porto di Palinuro e la Torre Muzza sono state visitate 62 caverne litoranee. Numerose di esse conservano sulle pareti interne, più protette, i solchi di battaglia e le perforazioni di litodomi, che costituiscono i segni di una linea di riva pleistocenica, riconoscibile fino a circa m. 11. di altezza sul livello marino attuale. Molte grotte conservano anche i lembi delle spiagge fossili di quel tempo. Purtroppo nessuno dei lembi di spiaggia, composti sempre di grossi ciottoli fluitati, ha fornito resti di fauna, e manca perciò la possibilità di datare paleontologicamente quella linea di riva. Tale datazione può invece ottenersi indirettamente, mediante l'esame del contenuto paleontologico e paleontologico del riempimento detritico continentale, i cui lembi sussistono in molte grotte (precisamente in 37 su 62 esaminate) sovrapponendosi spesso alle spiagge fossili.

---

<sup>(1)</sup> A. C. BLANC, *Le dune fossili di Castiglioncello e la regressione marina post-tirreniana*, « Riv. Geogr. It. », XLII, Firenze, 1935.

<sup>(2)</sup> A. C. BLANC, *Sulla stratigrafia quaternaria ecc.*, op. cit.

Un esame sommario ed alcuni saggi di scavo hanno infatti consentito di riconoscere la presenza, in seno ai riempimenti suddetti, di fauna fossile in 9 grotte (n. 17, 21, 23, 24, 36, 40, 51, 60, 61) e di industrie paleolitiche in 6 grotte (n. 17, 21, 23, 24, 56, 61).

Gli elementi raccolti suggeriscono per la storia geologica recente di questa costiera un'interpretazione analoga a quella che è stata applicata al Monte Circeo ed alla costiera tosco-laziale <sup>(1)</sup>.



Fig. 2.

<sup>(1)</sup> A. C. BLANC, *Una serie di nuovi giacimenti pleistocenici e paleolitici nelle grotte litoranee del Monte Circeo*. « Rendiconti R. Acc. Naz. dei Lincei », XXVIII, ser. 6<sup>a</sup>, sem. 2<sup>o</sup>, fasc. 78. Roma, 1938; *L'Uomo fossile del Monte Circeo: un cranio neandertaliano nella Grotta Guattari a San Felice Circeo*. Ibid., XXIX, ser. 6<sup>a</sup>, sem. 1<sup>o</sup>, fasc. 5. Roma, 1939.

Il mare pleistocenico ha invaso un tempo le grotte fino a m. 11 al di sopra del livello marino attuale, subendo una serie di oscillazioni, l'ultima delle quali ha portato la linea di riva a circa +2 metri (fig. 2, stadio 1).

È poi seguita una regressione marina, che ha abbassato la linea di riva ad un livello notevolmente inferiore a quello odierno. Sul fondo delle caverne emerse, sopra alle spiagge marine, si sono allora depositi sedimenti continentali: sabbie sollevate dal vento sulla pianura che la regressione marina aveva fatto emergere ai piedi dell'antica scogliera, frammenti di calcare provenienti dal disfacimento chimico e termoclastico delle pareti rocciose, detriti abbandonati dagli Uomini paleolitici che sono venuti ad abitare quegli antri, ad accendervi i loro focolari, a consumarvi i loro pasti. (fig. 2, stadio 2). Nel contempo il clima, talvolta intensamente continentale, ha determinato il prodursi di un'estesa formazione dunare, che si è addossata al promontorio di Palinuro, ricoprendolo anche parzialmente, e che doveva estendersi sull'antistante pianura, ora sommersa.

Come le dune, anche i riempimenti delle grotte litoranee contengono industrie paleolitiche, di tipo musteriano (nelle grotte n. 17, 21 e 61) e paleolitico superiore (nella grotta n. 24).

Nella grotta n. 21 l'industria musteriana è associata ad una fauna a Stambecco.

Nella grotta n. 24, la celebre Cala delle Ossa, visitata da numerosi ricercatori e curiosi fin dal secolo scorso, sarebbe stato raccolto, secondo O. G. COSTA <sup>(1)</sup>, un femore di Elefante. Ma di questo fossile, il quale non fu nemmeno raccolto personalmente dal COSTA, ma sembra appartenesse ad un cilentano, suo discepolo, non è mai più stata trovata traccia. Nel 1901 A. ZUCCARELLI avrebbe estratto, assieme a numerose ossa e denti di Cervidi, un frammento di tibia di Rinoceronte <sup>(2)</sup>.

Nel corso del breve saggio di scavo compiuto durante la campagna di ricerche del 1939 nella Cala delle Ossa, ho potuto raccogliere un buon numero di ossa e di denti, in massima parte riferibili a Cervidi, ed industria litica. Abbondano le ossa intenzionalmente scheggiate.

Frammenti di carbone sono stati raccolti sia nel livello musteriano a Stambecco della grotta n. 21, sia nel livello paleolitico superiore della grotta n. 24, e sono attualmente in corso di studio.

Gli elementi sino ad ora accertati, cioè la presenza nei riempimenti delle grotte di fauna a Stambecco, e di industria musteriana e paleolitica

---

<sup>(1)</sup> O. G. COSTA, *Pochi cenni sulla Grotta ossifera di Palinuro*. « Rendiconti R. Acc. Sc. Fis. Mat. e Nat. », fase. II. Napoli, 1867.

<sup>(2)</sup> A. ZUCCARELLI, *Gli Uomini primitivi delle selci e delle caverne*. Napoli, 1906.

superiore, sono sufficienti per attribuire con probabilità al Tirreniano il mare più elevato dell'attuale, dello stadio 1, fig. 2, e per identificare con la regressione marina post-tirreniana l'epoca durante la quale si sono riempite le grotte, e si sono accumulate le dune del Capo Palinuro, epoca rappresentata nello stadio 2 della stessa figura.

La successiva trasgressione Fiantria, che meglio potrebbe chiamarsi Versiliana <sup>(1)</sup>, riportando la linea di riva alla sua posizione attuale, ha determinato la demolizione del piede delle conoidi di detriti di falda e delle formazioni dunari che si erano addossate agli scoscendimenti calcarei della costiera. La medesima azione distruttiva ha eroso la parte esterna, più esposta, dei riempimenti detritici delle grotte, dopo aver demolito i lembi di breccia che si erano in alcuni casi sovrapposti alle loro aperture. In un gran numero di caverne, analogamente a quanto può osservarsi al Monte Circeo ed a quanto era già da tempo stato posto in evidenza da GIAN ALBERTO BLANC nella Grotta Romanelli in Terra d'Otranto <sup>(2)</sup>, sono stati in tal modo posti in evidenza gli strati di cui è composto il riempimento detritico, cesellati dall'azione delle onde (fig. 2, stadio 3).

Si rivela in tal modo, attraverso all'analogia di posizione e del contenuto paleontologico e paleontologico dei giacimenti, l'identità delle vicende geologiche subite dalla maggior parte delle nostre costiere dopo il Tirreniano. Si conferma che i segni delle ultime oscillazioni della linea di riva riconoscibili sulle costiere stesse sono di regola attribuibili a variazioni eustatiche del livello del Mediterraneo, e non a bradisismi di portata locale, come è stato troppe volte interpretato. I bradisismi accertati e provati rimangono circoscritti a poche zone, per varie ragioni tettonicamente instabili, alcune ormai bene localizzate.

Il Musteriano del Capo Palinuro sembra suddivisibile in due facies distinte. Una, probabilmente più antica, prevalentemente su quarzite e diaspro, rappresentata nella grotta n. 24 (fig. 3). Un'altra, nella quale sembra essere subentrata una più accurata scelta della materia prima, più minuta e con un maggior numero di tipi pontiniani, rappresentata nella

---

<sup>(1)</sup> A. C. BLANC, *Oscillazioni climatiche e variazioni della linea di riva tirrena durante l'Èra glaciale*. « Atti XXVIII Congresso S. I. P. S. », Pisa, 1939.

Il termine di *Fiantria* viene adoperato con significati vari, spesso difforni dalla primitiva definizione (RUTOT e VAN DE BROECK, 1885) la quale è del resto inadeguata alle conoscenze moderne.

Per ovviare a tale inconveniente, e ad evitare confusioni, ho proposto, per l'epoca di formazione dell'ultimo grande ciclo sedimentario, connesso con l'ultimo sollevamento eustatico del livello dei mari, il termine di *Versiliano*.

<sup>(2)</sup> G. A. BLANC, *Grotta Romanelli*, I e II. « Arch. per l'Antropologia e l'Etnologia », L, 1920, LVIII. Firenze, 1928.

grotta n. 17. Ad una facies analoga sembra attribuibile l'industria musteri-  
ana del giacimento della Torre di Talao, a Scalea <sup>(1)</sup>.

Il Paleolitico superiore della Cala delle Ossa (grotta n. 24), ricorda  
per molte forme quello della Grotta Romanelli <sup>(2)</sup> al quale lo aveva già

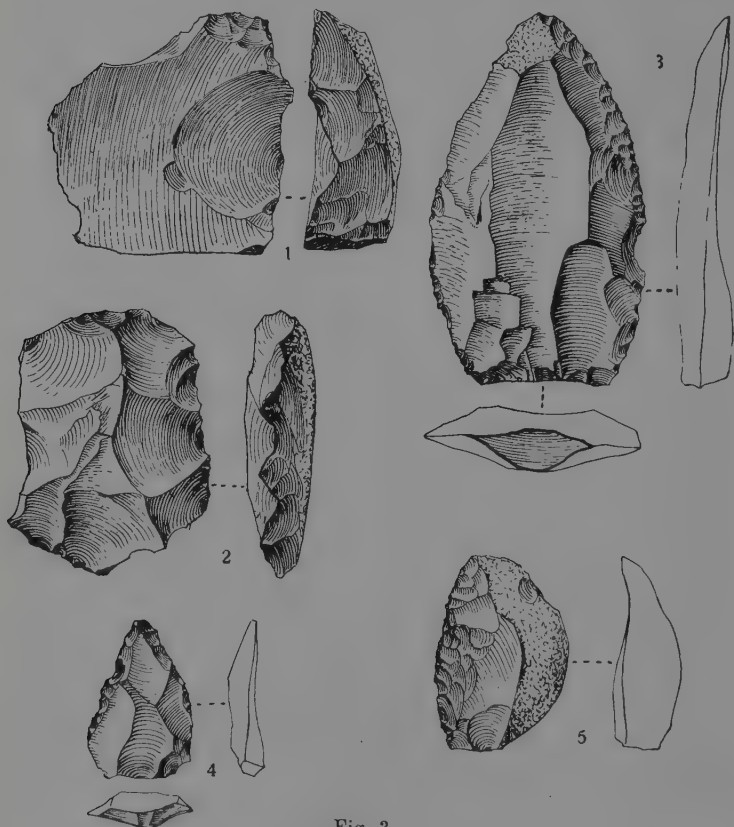


Fig. 3.

paragonato lo ZUCCARELLI <sup>(3)</sup>. Pure sembra differenziarsene per l'assenza  
di tipici microbulini e delle semilune, e per la minor frequenza dei piccoli  
raschiatoi rotondi, d'altronde di tipo alquanto diverso. Ne sono total-

<sup>(1)</sup> A. MOCHI, *La succession des industries paleolithiques et les changements  
de la faune du Pleistocene en Italie*. Firenze, 1912.

<sup>(2)</sup> G. A. BLANC, *Grotta Romanelli*, op. cit.

<sup>(3)</sup> A. ZUCCARELLI, *Gli Uomini primitivi ecc.*, op. cit., pag. 105 sgg.

mente assenti forme geometriche, e la tecnica di scheggiatura si mantiene di tipo nettamente paleolitico (fig. 4 e 5). Non vi è traccia di ceramica.

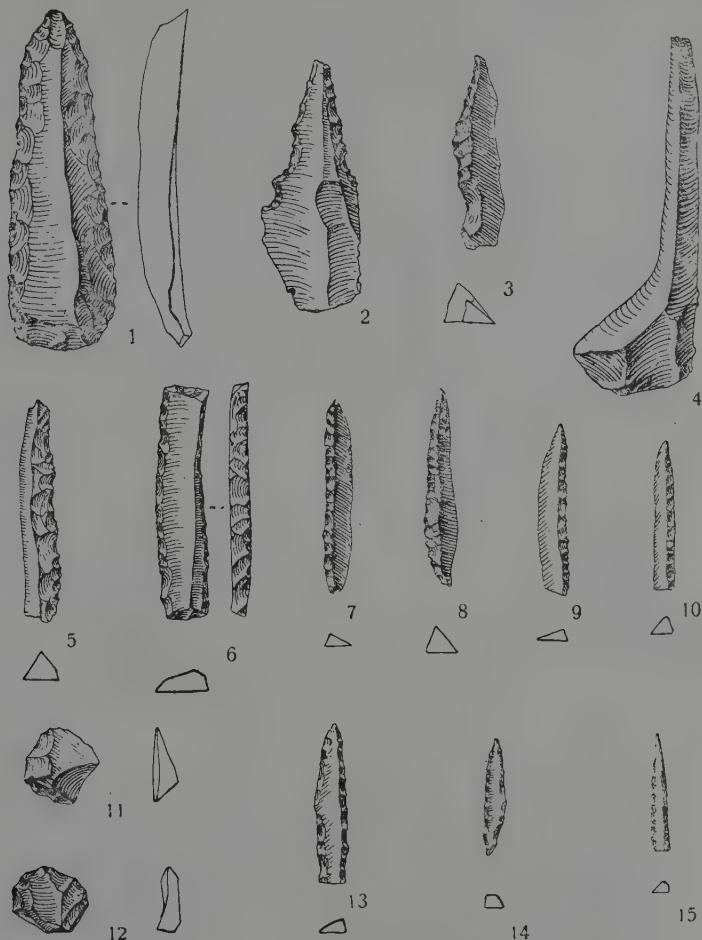


Fig. 4.

Appare dunque ingiustificata la diagnosi di probabile età neolitica, emessa dal VAUFREY <sup>(1)</sup> in base all'industria figurata dallo ZUCCARELLI, che R. BATTAGLIA ha con ragione ricollegata alle industrie romanelliane <sup>(2)</sup>.

<sup>(1)</sup> R. VAUFREY, *La Paléolithique italien*. Parigi, 1928.

<sup>(2)</sup> R. BATTAGLIA, *Studio sul Paleolitico Superiore in Italia e in Francia*. - II. *Abitati umani del Paleolitico finale in Italia*. « Rivista di Antropologia », XXV, Roma, 1922-23, pag. 194 e sg.



Se la forma romboidale di un frammento di lama (ZUCCARELLI, op. cit., tav. I, fig. 11), che deve aver influito sul giudizio del VAUFREY, non è accidentale, esso può forse esser stato raccolto dallo ZUCCARELLI sul suolo di uno degli antri della caverna, e rappresentare il ricordo di una visita di pescatori eneolitici, approdati alla Cala delle Ossa, come ancora prati-

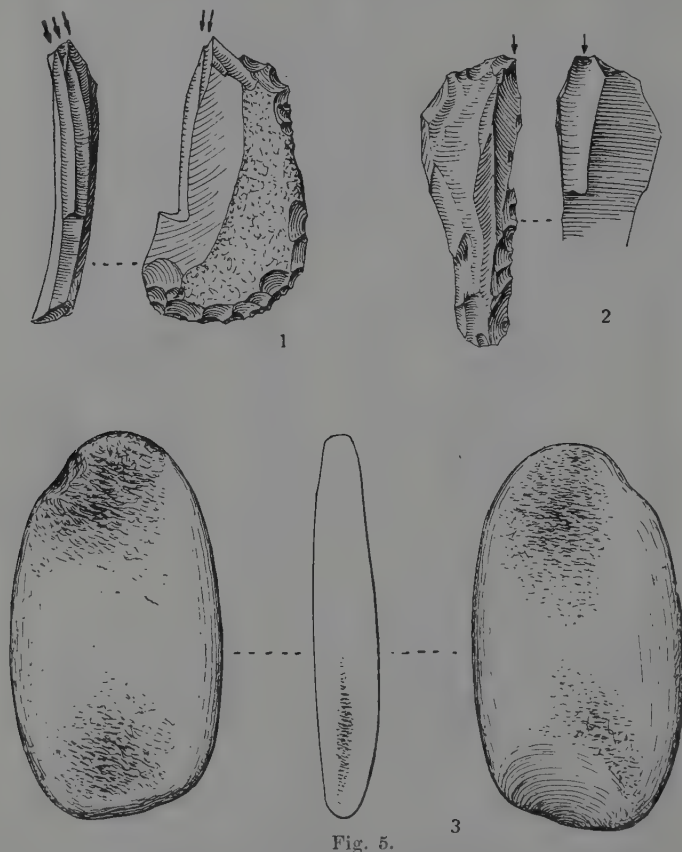


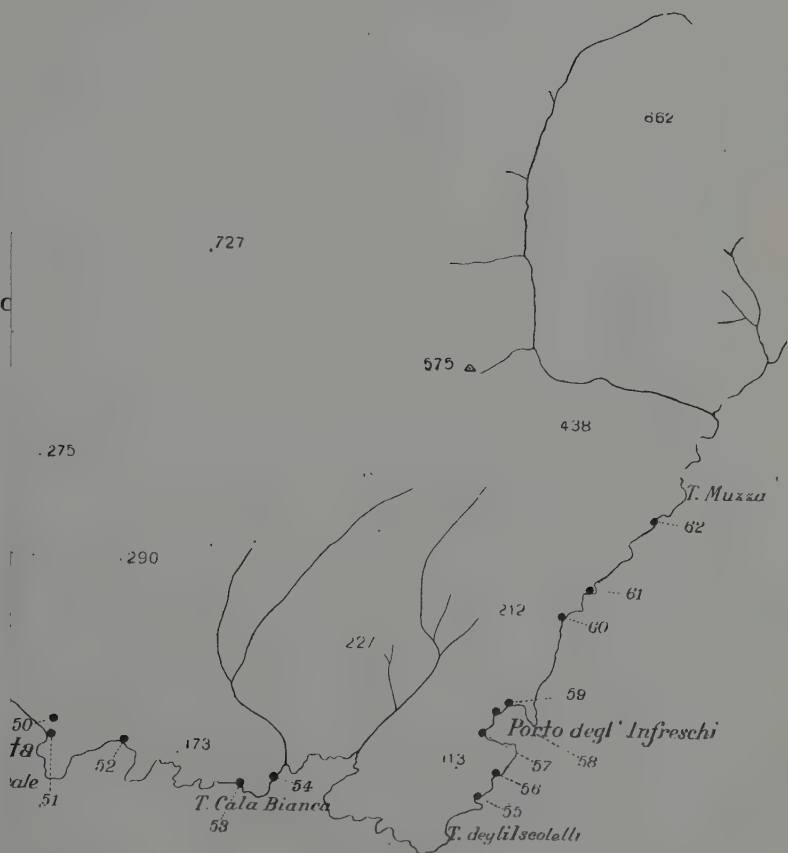
Fig. 5.

cano quasi giornalmente i marinai di Palinuro e della Molpa, che vi si recano a tirare le reti <sup>(3)</sup>.

(<sup>3</sup>) Desidero esprimere anche di qui la mia viva riconoscenza al prof. S. VISCO, all'ing. E. GUARIGLIA, Presidente della sezione di Salerno dell'Istituto Italiano di Palcontologia Umana, al prof. V. PANEBIANCO, Direttore scientifico della medesima, ed alle Autorità locali, che hanno collaborato a queste ricerche, e facilitato in ogni modo il loro compimento.



Capo





## DICITURE DELLE FIGURE

---

Fig. I. Le Grotte litoranee della costiera di Palinuro e della Marina di Camerota  
(Prov. di Salerno).

|               |                                   |
|---------------|-----------------------------------|
| N. 1          | Grotta del Porto.                 |
| » 2           | » Azzurra.                        |
| » 3           | » della Punta della Quaglia.      |
| » 4 e 5       | Grotte della Cala del Ribatto.    |
| » 6           | Grotta di Zia Anna.               |
| » 7           | » della Punta del Bianco.         |
| » 8           | » della Cala del Salvatore.       |
| » 9           | » del Malopertuso.                |
| » 10 e 11     | Grotte della Cala della Lanterna. |
| » 12          | Grotta del Mammoni.               |
| » 13, 14, 15  | Grotte della Cala Fetente.        |
| » 16          | Grotta dell'Archietello.          |
| » 17          | » delle Ciavole * *.              |
| » 18          | » del Buon dormire di Fuori.      |
| » 19          | » del Buon dormire di Terra.      |
| » 20          | » di Chionzo.                     |
| » 21          | » Visco * *.                      |
| » 22          | » di Scitti.                      |
| » 23          | » dei Porci * *.                  |
| » 24          | » della Cala delle Ossa * *.      |
| » 25          | » della Cala Longa ovest.         |
| » 26          | » della Cala Longa est.           |
| » 27          | » della Cala dell'Arco.           |
| » 28          | » dell'Arco.                      |
| » 29          | » del Mingardo.                   |
| » 30          | » della Fornace.                  |
| » 31          | » delle Capre.                    |
| » 32, 33, 34  | Grotte della Piazza Bianca.       |
| » 35, 36      | » dei Morti *.                    |
| » 37, 38, 39, |                                   |
| 40            | Grotte della Cala del Cefalo *.   |
| » 41, 42, 43, |                                   |
| 44, 45        | » della Cala dei Riccioli.        |
| » 46          | » della Cala del Porticello.      |
| » 47          | » di Marina di Camerota.          |

|          |                                  |
|----------|----------------------------------|
| N. 48    | Grotta della Cala.               |
| » 49     | » di Mezzanotte.                 |
| » 50, 51 | Grotte di Lenticelle *.          |
| » 52     | Grotta della Cala della Fortuna. |
| » 53     | » della Cala Magnosa.            |
| » 54     | » del Pezzallo.                  |
| » 55     | » di Santa Maria.                |
| » 56     | » delle Nuglie * *               |
| » 57     | » degl'Infreschi.                |
| » 58     | » del Maggiore.                  |
| » 59     | » dell'Acqua.                    |
| » 60     | » degli Occhi *.                 |
| » 61     | » Calata * *.                    |
| » 62     | » della Cala Longa.              |

Fig. 2. Schema della storia geologica recente della costiera di Palinuro testimoniata dai depositi delle grotte litoranee.

- Stadio 1. Ultima oscillazione trasgressiva del mare Tirreniano. Fine dell'ultimo interglaciale. Linea di riva a + 2 metri. Incisione di un solco di battaglia.
- » 2. Regressione marina post-tirreniana. Ultimo periodo glaciale. Riempimento delle grotte con detriti e stalagmiti, che si addossano all'antico solco marino sovrappponendosi alle spiagge marine.
- » 3. Condizioni attuali. La trasgressione Versiliana ha demolito la massima parte dei detriti pleistocenici. In alcune grotte più riparate si sono conservate, testimonianze dell'antico riempimento, alcuni lembi di conglomerati e di stalagmiti, spesso sospesi sul vuoto.

Cfr. BLANC, A. C., *Il Monte Circeo, le sue grotte paleolitiche ed il suo Uomo fossile*. «Boll. R. Soc. Geogr. It.». Roma, 1939.

Fig. 3. Industria paleolitica di tipo musteriano estratta durante gli scavi della Grotta Visco.

- N. 1. Nucleo di quarzite grigia, mostrante la preparazione del piano di percussione.
- » 2. Nucleo di quarzite grigia, mostrante la preparazione dei piani di percussione.
- » 3. Punta di quarzite grigia, accuratamente ritoccata. Piano di percussione unito.
- » 4. Punta di quarzite grigia con il piano di percussione preparato, ritoccata.
- » 5. Raschiatoio di diaspro rosso, ottenuto da un ciottolo mediante la tecnica pontiniana, accuratamente ritoccata.

Tutti i pezzi hanno gli spigoli vivi e la superficie scabra. Essi provengono tutti dal livello più fertile della grotta Visco (N. 3 della numerazione provvisoria). 2/3 della grandezza naturale.

\* Grotte il cui riempimento ha fornito resti di fauna fossile.

\*\* Grotte il cui riempimento ha fornito resti di fauna fossile ed industria paleolitica.

Fig. 4. Industria microlitica di tipo Paleolitico superiore estratta durante gli scavi della Cala delle Ossa.

- N. 1. Punta intensamente ritoccata su tutti i margini, di selce giallastra.  
» 2. Punteruolo con due intaccature, ritoccato, di diaspro rosso.  
» 3. Punta con il dorso abbattuto e con una pronunziata gibbosità, di diaspro rosso.  
» 4. Lama a « colpo di bulino », di selce verdastra.  
» 5, 7, 8, 9, 10, 13, 15. Lamette microlitiche con il dorso abbattuto, di finissima lavorazione, di selce.  
» 14. Lametta con tutti i margini abbattuti, di selce.  
» 11, 12. Dischetti di selce giallastra.  
Grandezza naturale.

Fig. 5. Industria di tipo Paleolitico superiore estratta durante gli scavi della Cala delle Ossa.

- N. 1. Raschiatoio-bulino, di selce, di ottima fattura.  
» 2. Bulino laterale, di selce.  
» 3. Ciottolo di selce brunastra, adoperato come ritoccatoio.  
Cfr. con i ritoccatoi della Grotta Romanelli in Terra d'Otranto (in G. A. BLANC, *Grotta Romanelli*. « Arch. per l'Ant. e l'Etn. », Firenze, 1920 e 1928).  
Grandezza naturale.

**Zoologia.** — *Descrizione preliminare di una specie nuova di Mengenilla* (« *M. spinulosa*, Insecta, Strepsiptera ») *della Sicilia e notizie sul suo ciclo e sul particolare modo di fecondazione.* Nota <sup>(1)</sup> dell'Accademico FILIPPO SILVESTRI.

Continuando le ricerche sugli Strepsipteri ho trovato una specie nuova di *Mengenilla* in Sicilia (nel comune di Lentini, Siracusa), della quale ho potuto ormai accertare il ciclo e osservare anche il curioso modo di fecondazione. Trattandosi di specie nuova e di reperti biologici nuovi, desidero dare la descrizione preliminare della specie e le notizie relative, riservandomi di pubblicare in una Memoria il lavoro definitivo.

*Mengenilla spinulosa* sp. n.

*Femina adulta.* — Corpus colore et forma generis speciei typicae simile. Caput margine antico medio vix sinuato, oculis corneis c. 12–15 instructis, antennis 4-articulatis, articulis 1° et 2° brevioribus inter sese subaequalibus, articulo tertio quam quartus c. 1/3 brevior, parte distali praeapicali parum latiore, superficie supera setis nonnullis minimis et sensillis subcircularibus per dimidiam partem distalem sparsis et sensillis similibus per superficiem inferam etiam instructo, articulo ultimo parte proximali quam tertii apex angustiore, parte praeapicali aliquantum latiore, apice ipso convexo, setis paucioribus brevissimis et sensillis subcircularibus superis et inferis numerosis instructo; mandibulis bene falcatis ut in speciebus ceteris; palpi maxillares articulo 1° setis c. 12, articulo 2° duplo longiore quam latiore, setis paucis brevissimis instructo.

*Thorax.* — Pronotum setis c. 70 brevissimis praesertim per dimidiam partem anticam dispositis, meso- et metanotum setis paucis brevissimis transverse 2–3 irregulariter seriatis instructa, margine laterali nudo vel seta tantum nonnulla; sterna setis brevissimis c. 40 (per meso- et metasternum) ad c. 50 (per prosternum) instructa; pedes subtus coxa setis

---

<sup>(1)</sup> Presentata nell'Adunanza del 21 marzo 1940-XVIII.

paucis brevissimis sparsis, femore sensillis partis proximalis sat numerosis instructo, tibia et tarso setis brevissimis paucioribus, pretarso (paris 3<sup>i</sup>) quam tarsi aticulus ultimus fere dimidio brevior.

*Abdomen.* — Tergita et sternita setis paucioribus brevissimis irregulariter 2–3 transverse seriatis, marginibus lateralibus subnudis; segmento ultimo supra setis brevissimis 2–4, subtus c. 20. Long. corporis ad mm. 4,80, lat. 2; long. antennarum 0,40, pedum paris tertii 1,60.

Exempla etiam vidi minora corporis longitudine mm. 3,50.

*Larva 4<sup>ae</sup> aetatis: spolia libera (Puparium) feminae.* — Corpus testaceo-latericium, circumlitione subovale, parum magis quam duplo longius quam latius, dorso valde convexo, hispidulo tuberculis setiferis conicis dorsualibus submedianis, maioribus mm. 0,14 et marginalibus 0,20, ventre planiusculo brevissime aciculato. Long. corporis ad mm. 6, lat. 2,9; exempla minora corporis longitudine 3,9, lat. 1,5.

*Mas.* — Puparium eidem feminae subsimile sed brevius et angustius et tuberculis setiferis dorsualibus minoribus, marginalibus tantum mm. 0,14 longis; longitudo maior mm. 5, lat. 2.

*Larva 3<sup>ae</sup> aetatis (parasita).* — Corpus album, elongatum (longitudo mm. 1,86, latitudo metatoracis 0,54). Caput parum latius quam longius, maculis ocularibus nigris parvis, antennis tuberculiformibus, clypeo aliquantum producto arcuato, mandibulis tuberculiformibus, clypei marginis anterioris libellam haud attingentibus, palpis maxillaribus longiusculis subconicis. Pedes a primo ad tertium gradatim longiores, crassiusculi, aliquantum attenuati, in articulis 4 obsoletis divisi (pedes tertii paris mm. 0,40 longi). Abdomen subcylindraceum, gradatim paulum attenuatum, ut ceterum corpus nudum.

*Larva neonata.* — Corpus testaceum subfusiforme postice setis duabus longis instructum, supra convexiusculum, subtus deplanatum. Caput oculis corneis 6 instructis, seta ad oculorum latus internum quam caput dimidia latitudo postica parum brevior, seta submediana antica frontali frontis marginem parum superante, area antennali parva, setis labialibus posticis. Pro- et meso-notum setis submedianis brevioribus, metanotum setis submedianis marginem posticum parum superantibus; thoracis sterna parte mediana laciniis setiformibus 5–6 instructis et parte sublaterali ad pedum basim serie transversa setis brevioribus paucis; pedes coxa serie transversa laciniis setiformibus numerosis instructa, pedum articuli 4<sup>i</sup> forma et abdominis sterna 1<sup>um</sup> ad 8<sup>um</sup> eiusdem generis *Eoxenos* similia. Abdominis segmentum 9<sup>um</sup> setis dorsualibus submedianis segmenti decimi basim parum superantibus et lateralibus subaequalibus, setis submedianis inferis brevioribus et submedianis-sublateralibus quam dorsuales parum brevioribus; segmenti 10<sup>i</sup> setae submedianae longae, quam corpus totum fere 2/3 breviores, setae sublaterales brevissimae. Long. corporis (sine setis caudalibus) mm. 0,24, lat. 0,09; long. setarum caudalium 0,10.



*Mas.* — Corpus brunneum capite (linea mediana nigrescente excepta), pronoto et mesonoto (marginibus exceptis), segmentis abdominalibus 9° et 10°, processibus antennalibus pedibusque isabellinis, alis posticis fumosis vena subcostali nigrescente, ceteris brunneis. Antennarum articuli 3<sup>us</sup>, 4<sup>us</sup> et 5<sup>us</sup> processu laterali apice articuli 6<sup>i</sup> apicis libellam attingentes vel fere. Long. corporis ad mm. 4.

*Ciclo biologico.* — Questa *Mengenilla* ha per ospitatore la *Ctenolepisma ciliata* Duf. var. *sicula* nov. (1) (Insetto dell'ordine dei Tisanuri). Le larve neonate si trovano dalla 2<sup>a</sup> metà di luglio fino a settembre; possono camminare colle setole codali distese oppure colle stesse dirette in avanti sotto il corpo e in quest'ultima posizione delle setole possono saltare contraendo i muscoli dell'ultimo segmento addominale e distendendo in tal modo le setole indietro; trovato un esemplare di *Ctenolepisma*, si aggrappano ad esso, possono restare ferme per minuti e anche per qualche ora, ma poi penetrano nel corpo della *Ctenolepisma* attraverso le membrane intersegmentali e si intromettono tra i vari organi nel lacunoma; restano durante pochi giorni nel lacunoma addossate a organi e tessuti vari, persino nelle zampe, ma compiuta, dopo circa 10 giorni, la 1<sup>a</sup> muta, si stabiliscono durante il periodo della 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> età nell'addome e particolarmente ai lati della parte anteriore dell'intestino medio.

Durante l'inverno si trovano nel corpo delle *Ctenolepisme* le larve della 3<sup>a</sup> età, più o meno sviluppate (in marzo come sono state descritte avanti) e in primavera si trasformano in larve della 4<sup>a</sup> età, acquistano le dimensioni definitive colle parti laterali del corpo rivolte in basso intorno all'intestino della *Ctenolepisma* e in maggio (seconda metà) fuoriescono dall'ospite e si pongono tra i sassi, tra la terra e i sassi, nei luoghi frequentati dalle *Ctenolepisme*. Il loro dermascheletro si indurisce e forma una sorta di pupario al corpo molle, che si distacca da esso con una cuticola molto sottile e resta dentro di esso per un tempo più o meno lungo secondo che si tratta di maschi o di femmine, che devono essere fecondate, o di femmine partenogenetiche.

Le larve maschili della 4<sup>a</sup> età si trasformano nel pupario in pupe tipiche e da queste dalla 2<sup>a</sup> metà di maggio in poi fuoriescono i maschi.

Le larve femminili della 4<sup>a</sup> età si trasformano in una sorta di pupa, mancante completamente di accenni di ali e dopo pochi giorni (verso il 10 giugno e giorni seguenti dello stesso mese) compiono una muta e si trasformano in femmine adulte. Queste nella maggior parte (circa 4/5 del numero totale), si spostano innanzi nel pupario, fanno cadere la spoglia del capo e attraverso il foro limitato dai margini anteriori del pronoto

---

(1) Questa forma si distingue dalla tipica specialmente per l'ovopositore superante alquanto gli stili del 9° segmento addominale, ma non tanto quanto negli esemplari della Spagna meridionale.

spingono fuori anche tutta o parte della spoglia pupale e fuoriescono all'aperto camminando sul terreno con movimenti vermicolari e aiutandosi anche colle delicate zampe: in un minuto primo possono percorrere un tratto di circa un centimetro. Il giorno seguente all'uscita stanno per lo più immobili, ma conservano la facoltà di potersi spostare anche fino allo sgravarsi delle larve.

Una piccola parte delle femmine non fuoriesce dal pupario, resta in esso, non è fecondata (almeno per quanto io ho finora potuto osservare), ma dà larve, come le femmine fecondate, circa dopo quaranta giorni o più: dalla 2<sup>a</sup> metà di luglio a settembre.

I maschi adulti fuoriescono dal pupario, facendo staccare la parte anteriore in corrispondenza al margine posteriore del protorace, di regola nel pomeriggio dopo le 15 e specialmente tra le 17 e le 18 (qualche esemplare, almeno in laboratorio, può fuoriuscire nelle ore antimeridiane dopo le 10). Essi sono molto attivi, irrequieti, volano rapidamente e posti in presenza di femmine contenute ancora nel pupario non mostrano di essere attratti (almeno io non riuscii mai a vedere coi maschi di questa specie nè con quelli di altre specie di *Mengenilla* e di *Eoxenos*, qualche tentativo di copula), posti invece in presenza di femmine uscite dal pupario si gettano su di esse come saette, le colpiscono e perforano coll'organo copulativo, conformato ad uncino acuto, in qualunque parte del corpo e restano fermi in tale posizione per pochi secondi (5 a 10), poi si sollevano colla parte anteriore del corpo, aprono le ali, assumendo una posizione quasi verticale e con un leggero sforzo, piegandosi un poco in dietro col dorso, estrarrono l'organo copulativo e volano via.

In questa specie d'insetti, anzi io posso dire, anche per altre osservazioni, in tutte le specie della famiglia *Mengenillidae*, la fecondazione della femmina non ha luogo attraverso la vulva, che pure esiste e serve per l'uscita delle larve neonate, ma attraverso qualunque parte della parete del corpo: fatto questo nuovo tra i metazoi.

Le uova negli Strepsipteri sono libere nel lacumona e si trovano sparse dal capo all'ultimo segmento dell'addome, quindi gli spermatozoi insinuandosi nello stesso lacumona vanno a contatto colle ova e possono fecondarle.

Le *Mengenille* partoriscono larve della 1<sup>a</sup> età, le quali arrivano a completo sviluppo nello stesso tempo e fuoriescono dal chorion libere nel lacumona. Le femmine, quando sentono le larve libere nel corpo, si contraggono e si allungano alternativamente e variamente ripiegando anche in basso i lati per un tempo di circa mezz'ora, poi si contraggono e lasciano fuoriuscire le larve dalla vulva prima a brevi intervalli l'una dall'altra, poi l'una aggrappata all'altra a catena, infine ancora con qualche intervallo fra di loro, e in 2 ore, o poco più, si sgravano di tutte (in numero di circa 2000 per le femmine maggiori) e poi muoiono.

Tanto le femmine fecondate, come quelle partenogenetiche di questa specie, come anche della *Mengenilla quaesita* Silv. e della *M. laevigata* sp. n. (per quanto finora ho osservato), partoriscono tutte durante l'estate (qualcuna anche al principio di autunno), mentre le femmine partenogenetiche (quelle almeno contenute nel pupario) di *Florenos* e di altre specie italiane di *Mengenilla* (come *M. nigrifula* sp. n., *M. parvula* sp. n., *M. subnigrescens* <sup>(1)</sup> sp. n.) possono passare l'autunno, tutto o parte dell'inverno e anche parte della primavera prima di partorire le larve.

---

(<sup>1</sup>) Le specie nuove di *Mengenilla* qui nominate saranno descritte nella Memoria definitiva; frattanto ne do qui qualche carattere:

*Mengenilla nigrifula*: antenne della femmina adulta di 3 articoli; spoglia della larva del 4° stadio (pupario) nerastro, simile per forma e per scultura a quello della *M. quaesita* Silv., ma colle spinette marginali più lunghe (Tipo: Apricena, Foggia).

*Mengenilla subnigrescens*: femmina adulta con antenne di 4 articoli, dei quali il 1° molto breve e il 2° poco più lungo; pupario di colore nerastro, simile per forma e scultura a quello di *M. quaesita* (Tipo: S. Piero Patti, Messina).

*Mengenilla laevigata*: femmina adulta con antenne di 4 articoli, dei quali il 1° e il 2° molto brevi, subuguali; pupario di colore isabellino testaceo col margine bruno, come tutta la parte dell'addome compresa fra le linee stigmatiche, superficie di esso tutta liscia (Tipo: Castrovillari, Cosenza).

*Mengenilla parvula*: femmina adulta con antenne di 4 articoli, dei quali il 1° è circa la metà più breve del 2°, lati dell'addome forniti di alcune brevi setole; pupario di colore testaceo, fornito sulla superficie di piccolissimi granuli acuti o subacuti, lunghezza massima mm. 4 (Tipo: Carlentini, Siracusa).

---

**Biologia** (Chimica-fisica biologica). — *Sulle relazioni osmotiche tra albume e tuorlo di uovo di gallina* <sup>(1)</sup>. Nota di ANTONIETTA ORRÙ e NELLA BRUTTI, presentata <sup>(2)</sup> da SABATO VISCO, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Da tempo le relazioni osmotiche tra albume e tuorlo d'uovo di gallina hanno richiamato l'attenzione dei biologi che ne hanno fatto l'oggetto di numerose indagini.

Tali ricerche hanno però condotto a delle controversie tra quanti, con metodi diversi, sono arrivati ad affermare una reale differenza di pressione osmotica tra queste due fasi dell'uovo, (BIALASCEWICZ, STRAUB, HILL, NEEDHAM e SMITH, MEYERHOF, BATEMAN, HALE-HARDY, ORRÙ ecc.) [1 a 11], e coloro che hanno creduto di dimostrare che tale differenza è soltanto apparente (ATKINS, GROLLMANN, HOWARD) [12 a 16].

Nell'intento di portare un ulteriore contributo alla soluzione di tale problema, abbiamo istituito le ricerche che esponiamo nella presente nota e con le quali la questione è stata esaminata partendo da considerazioni diverse da quelle fatte dai precedenti sperimentatori.

La pressione osmotica non è la sola proprietà che differenzi, dal punto di vista chimico-fisico l'albume dal tuorlo dell'uovo; esistono anche differenze di pH [17-18], di contenuto di acqua [17], della conduttività specifica [10] ecc. ecc.

L'albume d'uovo risulta infatti avere in media  $\Delta = 0,44 - 0,47$ ; pH = 8,4—8,9; conduttività in mhos/cm. = 0,0068—0,0084; acqua = 88 %; mentre per il tuorlo tali valori sono:  $\Delta = 0,54 - 0,58$ ; pH = 6,1—6,6; conduttività in mhos cm. = 0,0022—0,0027; acqua = 48 %.

Nelle nostre esperienze abbiamo preso in considerazione soltanto uno dei fattori che condizionano la pressione osmotica dell'albume e del tuorlo: il contenuto di acqua delle due fasi ed abbiamo voluto indagare

---

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia generale, Roma.

<sup>(2)</sup> Nell'Adunanza del 21 marzo 1940-XVIII.

se il rapporto normalmente esistente tra l'acqua dell'albume e quella del tuorlo varii; e, in caso positivo, come, quando si creano condizioni che provochino la disidratazione contemporanea dei due componenti nell'uovo in toto.

*Parte sperimentale.* - Un numeroso gruppo di uova intere deposte da non più di due giorni e previamente pesate, venivano introdotte in essiccatore con cloruro di calcio, entro cui si praticava il vuoto. In tal modo si provocava una disidratazione dell'uovo, il quale diminuiva gradatamente di peso. Ad intervalli di tempo le uova venivano ripesate, e, a mano a mano che un certo numero di esse raggiungeva una determinata perdita percentuale di peso (4 %-5 %-6 % ... ecc. ... 55 % circa), venivano aperte e si separava accuratamente il bianco dal tuorlo.

Questi due componenti dell'uovo introdotti entro apposite bacinelle tarate, e venivano essiccati fino a peso costante; per il bianco l'essiccamento si faceva entro una stufa normale a 100° C, mentre il tuorlo si essiccava entro una stufa a vuoto (mm. 30 di Hg) alla temperatura di 50° C.

Contemporaneamente si sono aperte n. 6 uova normali, per controllo, e sull'albume e tuorlo di esse è stato determinato il contenuto percentuale di acqua.

I dati che si riferiscono a tutte queste esperienze vengono riportati nella tabella I.

Viene in essa anche riportato il valore del rapporto tra la percentuale di acqua presente nel bianco (*b*) e quella del tuorlo (*a*).

TABELLA I.

| N. d'ordine | Uovo in toto             |                      | T u o r l o   |               |                              | B i a n c o   |               |                              | $\frac{b}{a}$ |
|-------------|--------------------------|----------------------|---------------|---------------|------------------------------|---------------|---------------|------------------------------|---------------|
|             | Peso<br>uovo<br>iniziale | Perdita<br>%<br>peso | Peso<br>umido | Peso<br>secco | %<br>acqua<br>perduta<br>(a) | Peso<br>umido | Peso<br>secco | %<br>acqua<br>perduta<br>(b) |               |
| 1           | 57,98                    | 4,61                 | 17,9998       | 9,4518        | 48,60                        | 30,7860       | 2,9672        | 90,36                        | 1,89          |
| 2           | 53,32                    | 4,82                 | 13,5560       | 7,1410        | 47,32                        | 28,7590       | 4,2300        | 85,29                        | 1,80          |
| 3           | 58,59                    | 4,99                 | 20,5415       | 11,2085       | 45,43                        | 27,9960       | 3,7823        | 86,49                        | 1,90          |
| 4           | 59,37                    | 5,00                 | 15,7680       | 8,5740        | 45,63                        | 31,5140       | 4,7560        | 84,91                        | 1,86          |
| 5           | 46,77                    | 5,04                 | 13,4875       | 6,9973        | 48,12                        | 25,3455       | 2,4100        | 90,49                        | 1,85          |
| 6           | 62,56                    | 5,16                 | 17,5353       | 9,0418        | 48,44                        | 32,8425       | 4,5178        | 86,24                        | 1,78          |
| 7           | 53,02                    | 5,50                 | 14,9080       | 7,8670        | 47,23                        | 27,5260       | 4,1140        | 85,05                        | 1,80          |
| 8           | 67,84                    | 5,88                 | 18,2983       | 9,3549        | 48,88                        | 22,8503       | 3,2993        | 85,56                        | 1,75          |
| 9           | 50,73                    | 5,21                 | 19,3214       | 9,3579        | 51,56                        | 24,1942       | 2,8185        | 87,52                        | 1,69          |
| 10          | 60,79                    | 5,70                 | 15,4990       | 8,0800        | 47,86                        | 32,6820       | 4,9450        | 84,87                        | 1,77          |
| 11          | 52,78                    | 6,18                 | 18,0691       | 9,2638        | 48,73                        | 17,9629       | 2,1515        | 88,02                        | 1,80          |
| 12          | 56,55                    | 6,36                 | 15,1490       | 8,0720        | 46,76                        | 29,8350       | 4,4650        | 85,03                        | 1,82          |
| 13          | 60,74                    | 7,51                 | 19,1041       | 9,9864        | 47,73                        | 13,1596       | 4,1195        | 86,34                        | 1,80          |
| 14          | 56,27                    | 8,85                 | 14,5810       | 7,5590        | 48,14                        | 29,8095       | 4,7995        | 83,89                        | 1,74          |
| 15          | 57,58                    | 8,97                 | 15,9245       | 8,2869        | 47,96                        | 29,7035       | 4,2150        | 85,80                        | 1,74          |
| 16          | 49,05                    | 9,14                 | 13,9289       | 7,2658        | 47,84                        | 24,4625       | 3,1129        | 87,27                        | 1,82          |
| 17          | 51,14                    | 9,37                 | 11,1250       | 5,7820        | 48,01                        | 25,4460       | 3,8990        | 84,68                        | 1,76          |
| 18          | 45,77                    | 9,65                 | 13,4322       | 6,9415        | 48,31                        | 21,5218       | 3,2410        | 84,09                        | 1,79          |
| 19          | 51,58                    | 9,97                 | 17,7480       | 9,0938        | 48,75                        | 21,9463       | 2,8282        | 87,11                        | 1,78          |
| 20          | 48,12                    | 10,04                | 14,2845       | 7,2082        | 49,53                        | 21,8603       | 2,4120        | 88,96                        | 1,79          |
| 21          | 45,13                    | 10,13                | 13,3671       | 6,8725        | 47,79                        | 22,5222       | 3,1424        | 86,06                        | 1,81          |
| 22          | 44,64                    | 10,85                | 14,0739       | 7,5594        | 46,28                        | 29,9803       | 2,6513        | 91,12                        | 1,96          |
| 23          | 57,80                    | 11,90                | 17,0000       | 9,0410        | 46,81                        | 26,0900       | 4,0350        | 84,53                        | 1,81          |
| 24          | 54,10                    | 12,25                | 13,6420       | 7,0060        | 48,64                        | 26,3970       | 4,1670        | 84,21                        | 1,73          |
| 25          | 58,50                    | 12,76                | 17,8600       | 9,5120        | 46,74                        | 25,9160       | 4,2490        | 83,60                        | 1,79          |
| 26          | 48,84                    | 12,82                | 10,2709       | 5,1609        | 49,75                        | 19,2253       | 2,6699        | 81,23                        | 1,63          |

## Segue TABELLA I.

| N. d'ordine | Uovo in toto        |                | T u o r l o |            |                     | B i a n c o |            |                     | $\frac{b}{a}$ |
|-------------|---------------------|----------------|-------------|------------|---------------------|-------------|------------|---------------------|---------------|
|             | Peso nuovo iniziale | Perdita % peso | Peso umido  | Peso secco | % acqua perduta (a) | Peso umido  | Peso secco | % acqua perduta (b) |               |
| 27          | 53,94               | 13,58          | 15,3315     | 8,0393     | 47,54               | 20,0058     | 3,6997     | 81,50               | 1,71          |
| 28          | 56,47               | 13,68          | 15,2870     | 8,0780     | 47,15               | 24,7460     | 4,1680     | 83,16               | 1,76          |
| 29          | 57,06               | 13,62          | 16,1304     | 8,2601     | 48,79               | 10,9205     | 1,5700     | 85,62               | 1,77          |
| 30          | 52,54               | 13,59          | 15,2320     | 8,1260     | 46,65               | 22,5340     | 2,9990     | 86,69               | 1,86          |
| 31          | 51,62               | 13,76          | 15,2963     | 7,7893     | 49,11               | 22,6890     | 3,3785     | 85,10               | 1,73          |
| 32          | 52,84               | 13,79          | 14,6495     | 7,5173     | 48,68               | 24,4190     | 3,4579     | 85,02               | 1,74          |
| 33          | 49,02               | 13,88          | 12,9249     | 6,7089     | 48,09               | 22,5089     | 3,6955     | 83,58               | 1,74          |
| 34          | 56,08               | 13,93          | 16,9842     | 8,8629     | 47,76               | 24,9180     | 3,9288     | 84,23               | 1,76          |
| 35          | 56,52               | 14,29          | 17,6608     | 9,1378     | 48,25               | 24,0952     | 2,7930     | 88,40               | 1,82          |
| 36          | 47,89               | 14,91          | 13,7756     | 7,1368     | 48,14               | 17,9126     | 2,7086     | 84,39               | 1,75          |
| 37          | 53,69               | 15,07          | 15,8990     | 8,4780     | 46,67               | 22,2380     | 4,2440     | 80,92               | 1,73          |
| 38          | 48,72               | 15,07          | 12,0263     | 6,7071     | 44,22               | 21,2099     | 3,5559     | 83,26               | 1,88          |
| 39          | 44,26               | 15,15          | 13,1076     | 6,8594     | 47,66               | 19,4286     | 3,0390     | 84,36               | 1,77          |
| 40          | 48,64               | 15,20          | 14,1167     | 7,4892     | 46,78               | 23,5005     | 5,4460     | 76,82               | 1,64          |
| 41          | 55,25               | 15,47          | 16,6800     | 9,0230     | 45,90               | 23,4760     | 4,4450     | 82,22               | 1,79          |
| 42          | 53,73               | 15,87          | 16,0920     | 8,5438     | 46,90               | 22,0318     | 3,5861     | 83,72               | 1,79          |
| 43          | 61,55               | 16,42          | 19,5948     | 10,2716    | 47,57               | 25,1346     | 3,7115     | 85,23               | 1,79          |
| 44          | 57,21               | 16,48          | 16,7782     | 8,4679     | 49,41               | 21,6957     | 3,5075     | 83,83               | 1,69          |
| 45          | 55,02               | 16,56          | 14,9890     | 8,1560     | 45,58               | 23,0620     | 4,3250     | 81,25               | 1,78          |
| 46          | 59,53               | 16,98          | 18,5500     | 9,7554     | 47,41               | 23,6231     | 3,9886     | 83,11               | 1,75          |
| 47          | 45,77               | 17,87          | 13,1407     | 6,6969     | 49,01               | 18,1668     | 3,5315     | 81,05               | 1,67          |
| 48          | 51,37               | 17,88          | 14,3995     | 7,6429     | 46,90               | 21,4976     | 3,0780     | 85,67               | 1,82          |
| 49          | 53,23               | 17,96          | 13,7050     | 7,3850     | 46,11               | 21,7150     | 4,1200     | 81,03               | 1,76          |
| 50          | 53,61               | 18,54          | 16,6626     | 8,7225     | 47,41               | 20,5485     | 3,3356     | 83,76               | 1,76          |
| 51          | 48,12               | 18,85          | 12,6053     | 6,4803     | 48,59               | 20,5983     | 3,6562     | 87,11               | 1,79          |
| 52          | 52,24               | 18,46          | 15,6916     | 9,2199     | 47,55               | 20,5771     | 3,0911     | 84,97               | 1,78          |
| 53          | 56,62               | 18,25          | 17,2538     | 8,9044     | 48,22               | 21,8590     | 3,9886     | 83,11               | 1,75          |



Segue TABELLA I.

| N. d'ordine | Uovo in toto        |                | T u o r l o |            |                     | B i a n c o |            |                     | $\frac{b}{a}$ |
|-------------|---------------------|----------------|-------------|------------|---------------------|-------------|------------|---------------------|---------------|
|             | Peso nuovo iniziale | Perdita % peso | Peso umido  | Peso secco | % acqua perduta (a) | Peso umido  | Peso secco | % acqua perduta (b) |               |
| 54          | 44,66               | 18,79          | 12,6610     | 6,5519     | 48,25               | 17,8396     | 2,3976     | 86,56               | 1,75          |
| 55          | 48,66               | 18,97          | 13,8242     | 7,0751     | 48,82               | 16,4850     | 2,2984     | 86,06               | 1,76          |
| 56          | 50,30               | 19,53          | 15,0033     | 7,8724     | 47,52               | 19,0467     | 3,1109     | 83,66               | 1,76          |
| 57          | 51,92               | 20,06          | 14,6549     | 7,6297     | 51,99               | 19,0822     | 2,9747     | 84,81               | 1,62          |
| 58          | 49,21               | 20,09          | 15,5825     | 7,8192     | 49,82               | 13,5470     | 2,4422     | 81,97               | 1,64          |
| 59          | 54,16               | 20,54          | 12,2825     | 6,3653     | 48,14               | 19,7152     | 3,9504     | 79,96               | 1,66          |
| 60          | 54,68               | 20,92          | 15,9990     | 8,5150     | 46,77               | 19,7850     | 3,5690     | 81,96               | 1,75          |
| 61          | 54,34               | 21,49          | 14,9790     | 7,9120     | 47,17               | 21,1490     | 4,2390     | 79,96               | 1,70          |
| 62          | 56,99               | 22,13          | 15,3030     | 8,0920     | 47,12               | 21,6310     | 4,3610     | 79,84               | 1,69          |
| 63          | 51,52               | 22,63          | 15,2030     | 7,5980     | 50,02               | 17,1960     | 3,1980     | 81,40               | 1,63          |
| 64          | 44,88               | 23,38          | 11,9381     | 6,1889     | 48,15               | 18,0194     | 3,1890     | 82,33               | 1,70          |
| 65          | 45,03               | 24,61          | 13,3532     | 7,1065     | 46,78               | 14,4815     | 3,6610     | 79,13               | 1,77          |
| 66          | 52,04               | 25,04          | 13,5570     | 7,3380     | 45,87               | 18,3230     | 3,2110     | 82,48               | 1,80          |
| 67          | 50,37               | 25,16          | 14,6072     | 7,6344     | 47,73               | 17,4928     | 3,2287     | 81,48               | 1,70          |
| 68          | 54,50               | 25,34          | 11,7040     | 6,1700     | 46,28               | 22,2930     | 4,5500     | 79,59               | 1,68          |
| 69          | 40,57               | 25,39          | 12,4475     | 6,5788     | 47,14               | 11,9304     | 2,9626     | 80,97               | 1,71          |
| 70          | 57,14               | 25,42          | 14,8502     | 7,9277     | 46,66               | 20,9263     | 4,1670     | 80,08               | 1,71          |
| 71          | 49,68               | 25,46          | 12,8180     | 6,8100     | 46,87               | 17,9670     | 3,8170     | 78,76               | 1,68          |
| 72          | 49,72               | 26,09          | 14,5340     | 7,6872     | 47,10               | 15,9416     | 3,4318     | 78,47               | 1,66          |
| 73          | 47,96               | 28,31          | 12,5844     | 6,6078     | 47,53               | 15,3884     | 3,2657     | 78,77               | 1,65          |
| 74          | 44,42               | 28,32          | 9,9343      | 3,7940     | 46,94               | 13,5565     | 3,3335     | 75,40               | 1,60          |
| 75          | 54,74               | 28,96          | 11,6290     | 5,7198     | 49,13               | 13,4605     | 2,8877     | 78,60               | 1,61          |
| 76          | 57,32               | 29,67          | 13,9755     | 7,3568     | 47,31               | 18,4278     | 4,7458     | 74,26               | 1,57          |
| 77          | 51,60               | 29,88          | 12,7700     | 6,9890     | 45,27               | 14,7660     | 3,6140     | 75,52               | 1,67          |
| 78          | 51,47               | 30,41          | 12,2446     | 6,3097     | 48,53               | 16,7804     | 4,0770     | 75,70               | 1,55          |
| 79          | 46,34               | 31,49          | 13,1501     | 6,9818     | 46,94               | 11,9672     | 3,1417     | 73,61               | 1,56          |
| 80          | 58,48               | 31,71          | 17,4626     | 9,7586     | 44,11               | 12,0268     | 2,9508     | 75,46               | 1,71          |

## Segue TABELLA I.

| N. d'ordine | Uovo in toto             |                      | T u o r l o   |               |                              | B i a n c o   |               |                              | $\frac{b}{a}$ |
|-------------|--------------------------|----------------------|---------------|---------------|------------------------------|---------------|---------------|------------------------------|---------------|
|             | Peso<br>uovo<br>iniziale | Perdita<br>%<br>peso | Peso<br>umido | Peso<br>secco | %<br>acqua<br>perduta<br>(a) | Peso<br>umido | Peso<br>secco | %<br>acqua<br>perduta<br>(b) |               |
| 81          | 57,16                    | 32,62                | 15,3395       | 8,8633        | 45,46                        | 12,6214       | 3,2064        | 74,56                        | 1,64          |
| 82          | 53,31                    | 34,94                | 14,2530       | 7,7990        | 45,28                        | 12,8530       | 3,3820        | 73,69                        | 1,63          |
| 83          | 51,40                    | 36,81                | 13,3797       | 6,8268        | 48,97                        | 22,2958       | 3,5820        | 83,93                        | 1,71          |
| 84          | 57,45                    | 37,80                | 16,8135       | 9,0835        | 47,39                        | 11,8255       | 1,9440        | 83,39                        | 1,77          |
| 85          | 56,74                    | 37,82                | 13,3940       | 7,6720        | 42,72                        | 13,7680       | 4,3220        | 68,71                        | 1,61          |
| 86          | 54,16                    | 39,31                | 4,3145        | 2,2775        | 47,09                        | 3,5256        | 0,9357        | 73,73                        | 1,56          |
| 87          | 46,19                    | 39,13                | 13,5740       | 7,5715        | 44,22                        | 7,9348        | 2,2606        | 71,51                        | 1,61          |
| 88          | 45,09                    | 39,57                | 14,1347       | 7,7171        | 45,40                        | 7,2261        | 2,1769        | 69,87                        | 1,53          |
| 89          | 57,10                    | 40,31                | 13,7888       | 7,8643        | 42,99                        | 10,1542       | 3,1402        | 69,27                        | 1,61          |
| 90          | 50,09                    | 40,73                | 13,6745       | 7,7680        | 43,19                        | 8,8127        | 3,0385        | 65,52                        | 1,51          |
| 91          | 48,47                    | 42,53                | 11,6423       | 6,4937        | 44,22                        | 8,5586        | 2,7624        | 67,42                        | 1,52          |
| 92          | 55,15                    | 42,55                | 19,3833       | 9,7426        | 49,74                        | 13,7770       | 2,3603        | 82,14                        | 1,63          |
| 93          | 49,22                    | 48,93                | 9,6862        | 5,6662        | 41,56                        | 5,6995        | 1,7883        | 68,74                        | 1,66          |
| 94          | 45,76                    | 50,82                | 12,4423       | 9,0009        | 27,66                        | 4,1150        | 1,6950        | 58,81                        | 2,12          |
| 95          | 52,71                    | 51,04                | 12,8128       | 9,1071        | 28,92                        | 5,8672        | 2,4728        | 57,85                        | 2,00          |
| 96          | 55,22                    | 54,71                | 8,6837        | 6,6942        | 22,91                        | 4,3235        | 2,0940        | 51,57                        | 2,25          |
| 97          | 45,76                    | 55,64                | 5,5987        | 4,0380        | 27,88                        | 4,3157        | 1,9680        | 54,40                        | 1,95          |
| 98          | 53,99                    | 59,67                | 13,4770       | 7,8270        | 41,92                        | 10,6620       | 3,6350        | 65,91                        | 1,57          |
| 99          | 48,41                    | 0                    | 13,8815       | 7,2512        | 47,76                        | 26,9737       | 2,2617        | 91,61                        | 1,91          |
| 100         | 55,62                    | 0                    | 15,5742       | 8,3095        | 46,64                        | 33,3429       | 4,2319        | 87,30                        | 1,87          |
| 101         | 49,24                    | 0                    | 13,6250       | 7,1121        | 47,20                        | 23,8534       | 2,9877        | 87,47                        | 1,85          |
| 102         | 62,58                    | 0                    | 17,8722       | 8,9935        | 49,68                        | 26,9016       | 3,3916        | 87,39                        | 1,75          |
| 103         | 55,57                    | 0                    | 17,2859       | 8,6549        | 49,93                        | 29,2752       | 3,4036        | 88,37                        | 1,74          |
| 104         | 52,06                    | 0                    | 15,7933       | 7,7557        | 50,89                        | 25,2946       | 3,2344        | 87,21                        | 1,71          |

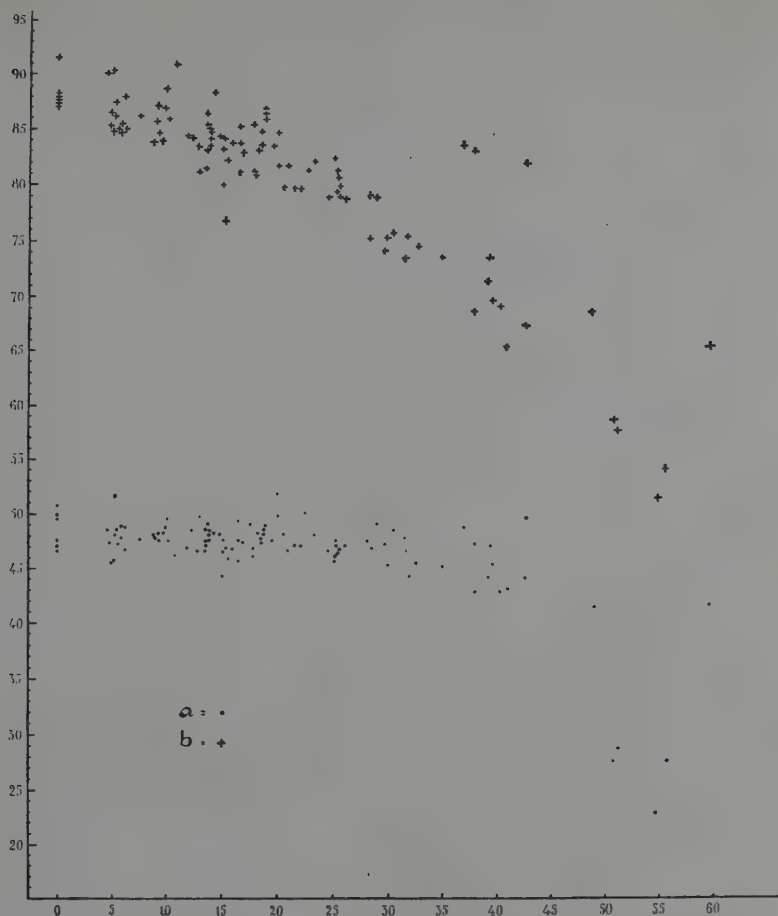


Fig. 1. - ORDINATE = percentuale di acqua contenuta nel tuorlo (•) e nell'albume (+) a vari gradi di disidratazione dell'uovo in toto.

ASCISSE = percentuale di acqua perduta dall'uovo in toto.

Nella figura 1 si riportano i valori delle percentuali di acqua nel bianco e nel tuorlo di tutte le uova adoperate nell'esperimento.

*Risultati e conclusioni.* - Dai dati riuniti nella tabella, e più ancora dal grafico, si rileva, come il tuorlo ceda la sua acqua molto più difficilmente del bianco, e come in conseguenza il normale rapporto  $\frac{b}{a}$  vada modificandosi mano mano che procede la disidratazione dell'uovo in toto.

Questo fatto appare più evidente se si raggruppano i valori riportati nella precedente tabella, e cioè se si riuniscono in un gruppo le uova che hanno perduto in essiccatore una percentuale di peso compresa tra 0 e 5 %, in un altro gruppo quelle a cui è stato fatto perdere tra il 5 e il 10 % di peso e così via di seguito. Contemporaneamente si calcola il valore medio del rapporto  $\frac{b}{a}$  per ognuno di tali gruppi.

Nella tabella II sono riportati i valori così calcolati; essi vengono poi espressi graficamente nelle figure 2 e 3.

TABELLA II.

| Acqua % perduta<br>dall'uovo in toto | Acqua %<br>del tuorlo<br>(a) | Acqua %<br>del bianco<br>(b) | $\frac{b}{a}$ |
|--------------------------------------|------------------------------|------------------------------|---------------|
| Nessuna (uova normali) . . .         | 48.68                        | 88.23                        | 1.81          |
| Dal 4.61 % al 5.00 % . . .           | 46.74                        | 86.76                        | 1.86          |
| » 5.04 % » 9.97 % . . .              | 48.29                        | 86.13                        | 1.78          |
| » 10.04 % » 14.91 % . . .            | 47.98                        | 83.38                        | 1.77          |
| » 15.07 % » 19.53 % . . .            | 47.32                        | 83.39                        | 1.76          |
| » 20.06 % » 24.61 % . . .            | 48.44                        | 81.26                        | 1.68          |
| » 25.04 % » 29.88 % . . .            | 46.99                        | 78.70                        | 1.67          |
| » 30.41 % » 34.94 % . . .            | 46.06                        | 74.60                        | 1.62          |
| » 36.81 % » 39.57 % . . .            | 45.97                        | 75.19                        | 1.63          |
| » 40.31 % » 48.93 % . . .            | 44.34                        | 70.62                        | 1.59          |
| » 50.82 % » 59.67 % . . .            | 29.86                        | 57.71                        | 1.98          |

Appare in questo modo molto evidentemente come mano mano che aumenti la percentuale di acqua perduta dall'uovo in toto l'albume vada gradatamente disidratandosi mentre il contenuto di acqua del tuorlo resti quasi fisso.

Questo comportamento del tuorlo si osserva fino a che le perdite di peso dell'uovo in toto non superano il 40 %, poichè superato questo valore anche il tuorlo incomincia a perdere la sua acqua. Per perdite di peso dell'uovo intero dal 40 al 50 % il contenuto di acqua del tuorlo passa dal 48,68 % al 44,34 %, in media, e per perdite che vanno dal 50 al 60 % il suo contenuto di acqua si trova ad essere appena del 29,86 %, con una perdita del 18 % circa di fronte al normale.

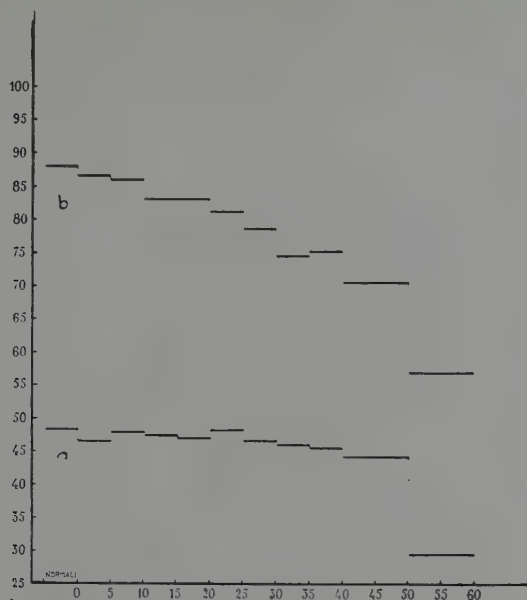


Fig. 2. - ORDINATE = percentuale media di acqua contenuta nel tuorlo (a) e nell'albumen (b) a vari gradi di disidratazione dell'uovo in toto.

ASCISSE = percentuale di acqua perduta dall'uovo in toto.

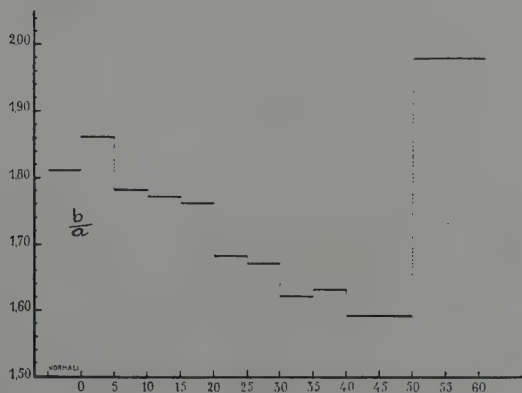


Fig. 3. - ORDINATE = rapporti medi  $\frac{b}{a}$  tra l'acqua contenuta nel bianco (b) e quella del tuorlo (a) a vari gradi di disidratazione dell'uovo in toto.

ASCISSE = percentuale di acqua perduta dall'uovo in toto.

Corrispondentemente nel bianco, allorchè l'uovo in toto ha perduto dal 50 al 60 % di peso, si ha anche una maggiore perdita di acqua ma il suo valore è solo del 13 % perchè altrettanta circa (18 %) esso ha perduto gradatamente allorchè nell'uovo in toto le percentuali di peso perduto non superavano il 50 %.

In conseguenza il valore del rapporto  $\frac{b}{a}$  (vedi fig. 3) che nel primo periodo di disidratazione dell'uovo in toto va gradatamente diminuendo, sale bruscamente allorchè tale disidratazione supera il 50 %.

Questo diverso comportamento del contenuto di acqua del tuorlo e dell'albume dell'uovo, quando si stabiliscono le condizioni su descritte, tali da provocare una disidratazione contemporanea di essi, fa pensare che queste due fasi abbiano una diversa concentrazione molecolare ed ionica e quindi esista tra di esse una reale differenza di pressione osmotica.

Infatti, partendo dal presupposto che tale differenza esista, ad essa deve corrispondere una differenza di tensione di vapore, del solvente (l'acqua) che sarà minore per la fase che ha la maggiore concentrazione molecolare-ionica (tuorlo), essendo l'abbassamento della pressione di vapore direttamente proporzionale alle quantità e qualità delle sostanze sciolte.

In queste condizioni sottoponendo a contemporanea disidratazione le due fasi, per azione di una depressione, noi abbassiamo il punto di ebollizione di ognuna di esse, ma essendo la tensione di vapore per il tuorlo più bassa e quindi il suo punto di ebollizione più elevato di quello dell'albume, il solvente presente in questo dovrebbe evaporare più facilmente e quindi l'albume stesso disidratarsi più rapidamente. Ciò fintanto che una differenza in concentrazione molecolare e ionica esisterà tra esso e il tuorlo. Se questa differenza col procedere della disidratazione venisse mano mano a diminuire e quindi ad annullarsi, allora, da questo momento in poi dovrebbe verificarsi una perdita percentuale di acqua pressochè eguale tanto da parte del tuorlo che dell'albume.

Questa ipotesi è stata pienamente confermata dalle nostre esperienze.

Infatti l'albume, a cui è stata attribuita una minore concentrazione molecolare-ionica, e per conseguenza deve presentare una maggiore tensione di vapore, si disidrata in principio molto di più del tuorlo, il quale comincia a perdere la sua acqua in proporzioni notevoli soltanto dopo che l'albume ha perduto già il 18 % della propria.

In queste condizioni calcolando, dalla concentrazione raggiunta dal bianco, il  $\Delta$  che esso può presentare, si ottiene un valore che è molto vicino a quello presentato dal tuorlo che non ha perduto che una minima quantità della sua acqua iniziale (il 4 % circa).

Da questo momento, raggiunta l'uguaglianza osmotica delle due fasi, esse perdono acqua contemporaneamente in proporzioni poco diverse (14,48 % il tuorlo; 12,91 % il bianco).

Il diverso comportamento dell'albume e del tuorlo di fronte alla disidratazione provocata contemporaneamente nelle condizioni sperimentali su indicate, rivela quindi chiaramente una diversa tensione di vapore del solvente nelle due fasi, e quindi una differenza nella loro pressione osmotica.

## BIBLIOGRAFIA

---

- (1) BIALASCEWICZ, « Arch. f. Entwicklungsmech. » (1912), 34, 489.
- (2) STRAUB e HOOGERDUYN, « Rec. Trav. Chim. Pays Bas » (1929), 48-49.
- (3) HILL, « Proc. Roy. Soc. London » (1930), 127, 9.
- (4) HILL, « Trans. Faraday Soc. » (1930), 26, 667.
- (5) NEEDHAM e SMITH, « Journ. Exp. Biol. » (1931), 8, 286.
- (6) NEEDHAM, « Comptes Rendus de la Soc. de Biol. », 1932, 109, 688.
- (7) MEYERHOF, « Biochemische Zeitschrift » (1931), 242, 244.
- (8) BATEMAN, « The Journal of Experimental Biology » (1932), 11, 322.
- (9) HALE-HARDY, « Proc. Roy. Soc. » (1933), 112, 473.
- (10) ORRÙ, « Arch. Scienze Biologiche » (1933), 18, 361.
- (11) JOHLIN, « Journ. of Gen. Physiol. » (1933), 16, 605; ID. ID. (1935), 18, 481.
- (12) ATKINS, « Proc. Roy. Dublin. Soc. », 1909, 12, 123.
- (13) GROLLMAN A., « Biochem. Zeitschr. » (1931), 238, 408.
- (14) HOWARD E., « The American Journal of Physiology » (1932), 101, 1.
- (15) HOWARD, « Journal Gen. Physiology » (1933), 16, 107.
- (16) HOWARD E., « Journal Cell. and Comp. Physiol. » (1933), 3, 293.
- (17) NEEDHAM J., « Chemical Embriology », Cambridge, 1931.
- (18) CAPRARO e FORNAROLI, « Arch. Scienze Biologiche », 1939, 25, 117.



**Zoologia (Embriologia).** — *Ricerche sull'autosterilità di Ciona intestinalis* <sup>(1)</sup>. Nota di ARTURO PELTRERA, presentata <sup>(2)</sup> da ALESSANDRO GHIGI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

MORGAN, PLOUGH e FUCHS sono i tre nomi principalmente legati allo studio del fenomeno dell'autosterilità in *Ciona*, ma più che ogni altro se ne occupò il MORGAN. Questo autore tuttavia, pur avendo sin dal 1905, localizzato nel complesso costituito dalle cellule testacee, dal corion, dalla membrana e spazio perivitellino, una delle principali cause inibenti l'auto-fecondazione, ritenne tutt'altro che chiuso questo interessante problema fisiologico e genetico a cui dedicò anche recenti ricerche.

È mia intenzione in questa Nota preliminare esporre i principali risultati di una serie di ricerche che ho iniziato e che sono tutt'ora in corso alla Stazione Zoologica di Napoli, rimandando al lavoro che mi propongo di stendere fra breve, l'esposizione dello stato attuale del problema.

Ciò che mi preme di far risaltare è che le ricerche sino ad ora condotte sono state quasi esclusivamente rivolte allo studio dell'inibizione dovuto alla membrana dell'uovo, ciò che ha portato a trascurare quasi del tutto il fattore spermio e la sua importanza nelle interazioni che avvengono all'atto della fecondazione.

Allo scopo di studiare l'importanza di questo fattore mi sono posto i seguenti quesiti:

Esiste tra spermii ed uova di uno stesso individuo un'incompatibilità analoga a quella esistente fra i gameti di specie diverse?

Se tale è il meccanismo inibente, come si comporteranno le uova di due individui rispetto ad una miscela dei loro spermii? Si verificheranno cioè per essi i noti fenomeni che il GODLEWSKI scoperse per gli spermii di specie e classi diverse?

Ho quindi stabilito un esperimento base:

Da due individui A e B si raccolgono gli elementi sessuali, naturalmente con le necessarie cautele per impedire contaminazioni. Se ne fanno

---

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito alla Stazione Zoologica di Napoli.

<sup>(2)</sup> Nell'Adunanza del 21 marzo 1940-XVIII.

immediatamente i controlli vergini, i controlli autofecondati e quelli fecondati incrociatamente. Indi si procede ad una miscela dei due spermii in 2-3 cc. d'acqua di mare. Dopo varie ore si verifica il potere fecondante di tale miscela comparandolo con il potere fecondante delle 2 singole sospensioni di spermii.

È risultato in linea di massima che, dopo le 13 ore ed oltre, la miscela non è più capace di attivare nè le uova di un individuo nè quelle dell'altro, mentre le singole sospensioni mantengono generalmente il loro potere fecondante sino ed oltre le trenta ore.

Oltre all'abbassamento od annullamento della percentuale di uova fecondate risultano: una irregolarità nei solchi di quelle uova che si sono segmentate (solchi talvolta incompleti, quindi segmentazioni irregolari e lobulazioni) ed un eterocronismo di sviluppo delle uova nei lotti fecondati dalla miscela, prima che l'inattivazione sia intervenuta completamente e specialmente di questi rispetto ai controlli fecondati con spermii delle singole sospensioni e da spermii di un terzo individuo.

Per questo eterocronismo si riscontra talvolta il ritardo di alcune uova che iniziano la segmentazione mentre le altre sono già gastrulanti, talvolta ritardo in tutto il lotto che inizia i primi solchi dopo 5-6 ore e più, tale da mostrare dopo 24 ore uova ancora a due blastomeri (<sup>1</sup>).

La diluizione, fattore normalmente favorevole, dà risultati che dipendono dalla proporzione di diluizione e dal momento in cui questa viene fatta agire, ma generalmente dopo le venti ore una diluizione di 10 volte non ha effetto o fa sorgere tutt'al più 1-2 % di uova fecondate.

La diluizione può agire tardivamente, nel senso che 18-20 ore dal suo intervento si può constatare una percentuale talvolta elevata di segmentazioni tardive e quindi altamente eterocrone rispetto ai controlli. Naturalmente una diluizione eccessiva, data la scarsa quantità di spermii, abbassa la percentuale delle uova secondariamente fecondate.

Una miscela di spermii A e B, inattivata, deve essere generalmente diluita per poter fecondare uova di un terzo individuo C. Inoltre essa agisce anche su spermii freschi di un altro individuo, poichè la fecondazione mediante di essi viene inibita o ritardata e quasi in tutti i casi è necessario diluire per ottenere percentuali superiori a quelle di 2-3 % che normalmente si ottengono in questi controlli.

Anche qui forti eterocronismi, che attestano rilevante ritardo nella fecondazione, e talvolta irregolarità di sviluppo. Uova rimaste più tempo nella miscela (2 ore o più) e non segmentatesi mostrano talvolta bassa

---

(<sup>1</sup>) Lo scotimento ed il rimescolamento della miscela, come anche nei noti esperimenti del Godlewski, sono fattori indifferenti e non ridanno ad essa la facoltà di fecondare.

percentuale di segmentazione all'aggiunta di spermii freschi di un altro individuo, più alta se la fecondazione con gli spermii freschi è stata accompagnata da diluizione.

Gli spermii sembrano rimanere inalterati. Essi rimangono generalmente attivi pur sedimentando al fondo della bacinella. Talvolta si mostrano pochissimo mobili ed in taluni casi alfine si sono avute abbondanti flocculazioni.

Questi, a grandi linee i risultati ottenuti. Non è compito di questa Nota l'interpretazione di tali risultati nei loro vari aspetti. In ogni caso però sembra lecito concludere che il punto di vista da cui si è partiti è in linea di massima molto verisimile. Resta quindi sin da ora stabilito che in *Ciona* gli spermii di un individuo fatti reagire con quelli di un altro, entrambi autosterili, mostrando un comportamento sperimentale, analogo a quello di spermii di specie diversa reagenti fra loro, attestano una diversità individuale di costituzione la cui natura non è ben precisabile, ma che messa in relazione con l'incapacità degli elementi maschili a fecondare le proprie uova pone in primo piano l'importanza del fattore spermio nel fenomeno dell'autosterilità.

---

## RELAZIONI

### *Caratteristiche fisiche del tipico Latifondo Siciliano*

Relazione <sup>(1)</sup> dell'Accademico RAMIRO FABIANI

---

RIASSUNTO. — Vengono brevemente illustrate le condizioni delle plaghe latifondistiche della Sicilia in quanto derivano dalla natura geologica, dalla morfologia e dalla meteorologia.

Il latifondo siciliano corrisponde per la massima parte a zone montuose costituite da formazioni in prevalenza argillose, dal cui comportamento, in relazione anche al regime e alla distribuzione delle piogge, derivano disordine idraulico, malaria, instabilità dei terreni, scarsità o mancanza di acqua.

Queste condizioni interessano vastissimi comprensori, specie delle parti centrali, centromeridionali e nordoccidentali dell'isola, nella quale le formazioni argillose occupano complessivamente i quattro noni della superficie.

Si comprende dunque che, accanto agli altri svariati fattori politici, sociali ecc., quello delle caratteristiche ambientali ha contribuito notevolmente allo stabilirsi e al persistere della condizione latifondistica, rappresentando un complesso di difficoltà alla trasformazione integrale, che solo un'azione totalitaria nei mezzi e nei fini, come quella ora intrapresa, poteva affrontare e superare.

*Devo anzitutto ringraziare la Presidenza dell'Accademia per avermi designato a riferire sopra un argomento che tanto interessa la nobile terra di Sicilia, alla quale mi lega vivo affetto per lunga permanenza e attività di studi e di ricerche.*

Una ancora delle grandi battaglie decise dalla volontà del DUCE — e già vittoriosamente concluse o in corso di attuazione — è stata da pochi mesi ingaggiata, quella per la colonizzazione del latifondo siciliano. Mezzo milione di ettari da appoderare e trasformare, ventimila case coloniche da far sorgere in zone ora pressoché deserte, un adeguato numero di centri rurali, di strade, di pozzi, di piccoli acquedotti da costruire. Questo il programma in atto dei lavori.

---

(<sup>1</sup>) Letta nell'Adunanza del 12 aprile 1940-XVIII.

Ad opere compiute la faccia dei luoghi sarà trasformata e trasformate saranno le condizioni di vita materiale e morale di una popolazione contadina, che abita ancora addensata in pochi grossi paesi lontana dalla terra che deve coltivare e spreca tante ore della giornata e tanta energia per recarsi all'alba sul luogo del lavoro – distante spesso parecchi chilometri – e rientrare in paese a sera inoltrata <sup>(1)</sup>.

Si tratta dunque di un'impresa grandiosa per le opere che richiede e rivoluzionaria per gli effetti da conseguire.

Lo slancio con cui dall'Ente di Colonizzazione, appositamente creato per attuarla, venne affrontata – così che il termine di un decennio inizialmente previsto resterà di molto abbreviato – giustifica appieno il nome altamente espressivo sotto il quale questa nuova battaglia del Regime passerà alla storia: **Assalto al latifondo siciliano.**

Quanto vari, numerosi e complessi problemi investa la grande impresa, stanno a dimostrare il fervore di studi e di discussioni suscitato presso istituzioni tecniche e culturali, i raduni e le mostre che ne trassero motivo, i cicli di lezioni che ad illustrarla sotto i molteplici aspetti vennero organizzati.

Di tutti questi aspetti uno tuttavia è rimasto spesso nell'ombra, quello del latifondo considerato nel quadro delle caratteristiche fisiche dei territori ove più tipicamente la condizione latifondistica è venuta a determinarsi.

Codeste caratteristiche sono la risultante di un complesso di fattori, quali essenzialmente la costituzione geologica, la morfologia generale, le condizioni idrologiche e idrografiche. Ne rileveremo i tratti più salienti richiamandoci alla mente prima di tutto quale base di riferimento lo schema oroidrografico della Trinacria (V. la cartina allegata).

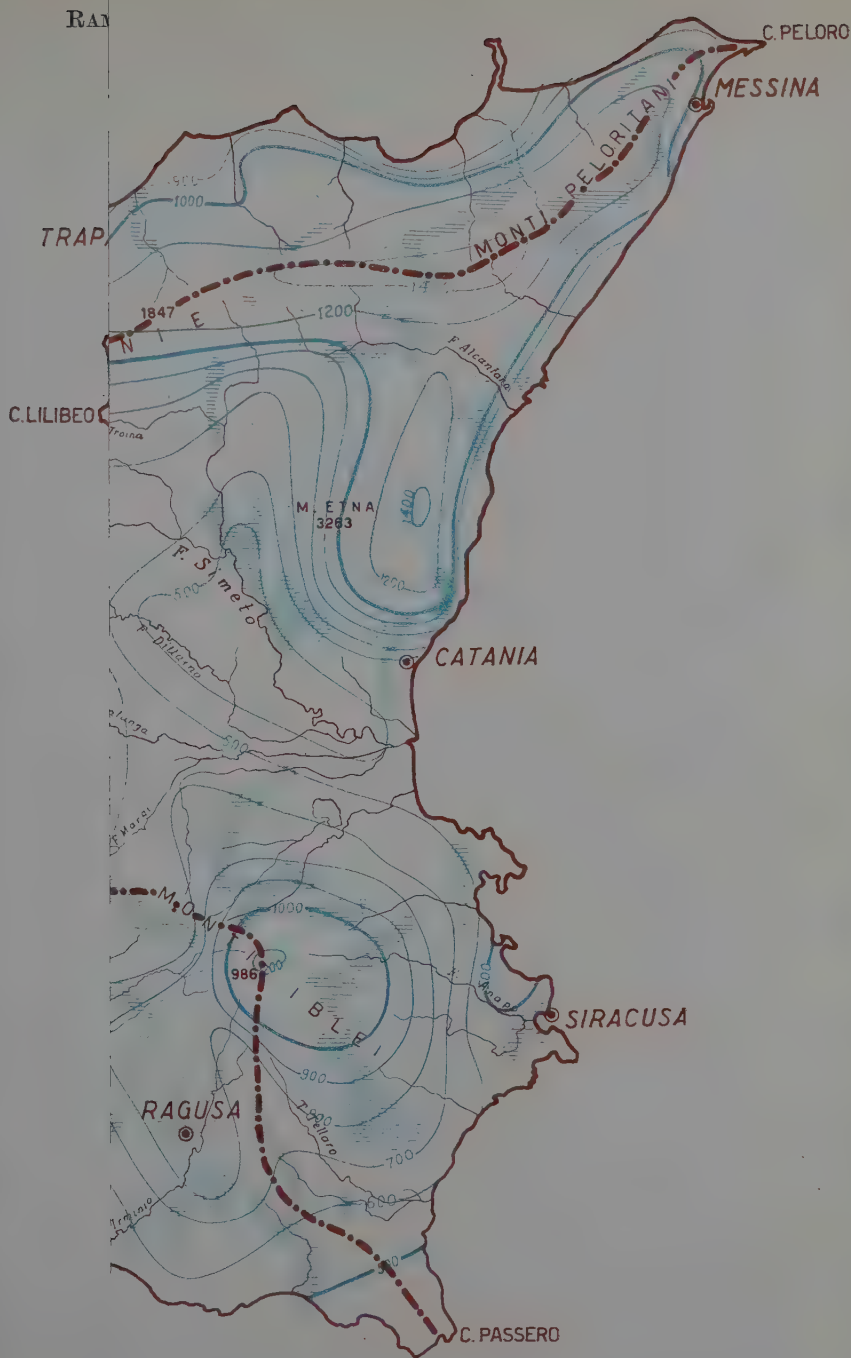
Ecco dunque a nord iniziarsi al Capo Peloro la dorsale dei Peloritani, che si continua nelle Caronie o Nébrodi e nelle Madonie con asse quasi parallelo alla costa e ad essa relativamente assai vicino: donde un sistema idrografico semplice con brevissimi corsi paralleli fortemente pendenti pel fatto che la linea spartiacque nel suo maggior percorso mantiene quota elevata, cioè sopra ai 1000 metri sul livello del mare, superando anche in vari tratti i 1500 <sup>(2)</sup>.

Quasi al confine fra i Nébrodi e le Madonie s'innesta al M. Zimmara (m. 1333 s. l. m.), pressoché ad angolo retto, un'altra direttrice oroidro-

---

<sup>(1)</sup> Questo avviene purtroppo anche nelle plaghe non latifondistiche!

<sup>(2)</sup> Culmina a m. 1374 nei Peloritani, a 1847 nelle Caronie e a 1910 nelle Madonie, la cui cima più elevata (Pizzo Carbonara del M. Antenna) tocca però i m. 1977 ed è superata solo dall'Etna.



La livalori delle isoiete medie del quindicennio 1921-1935 (dati gentilmente numerose e importanti manifestazioni sorgentizie).





grafica, il cui asse primario con andamento alquanto tortuoso si dirige a sud (Monti Erei) e quindi a sud-est (Monti Iblei) e va a finire al Capo Passero.

Fra questo Capo e il Peloro resta pertanto delimitato il versante di dominio ionico, con idrografia complessa e corsi a grande sviluppo, come il Simeto, e di primaria importanza per l'isola. Elemento orografico singolare entro l'ambito del versante è costituito dal gigantesco cono dell'Etna che svetta a 3263 metri, superando di oltre un terzo la più alta cima di tutta la restante Sicilia.

La continuazione ad occidente delle Madonie dell'asse oroidrografico è caratterizzata da andamento assai tortuoso per forti scostamenti ora a nord ora a sud, dai Monti Sicani ai Monti di Palermo a quelli del Trapanese.

La linea di displuvio va a spegnersi al Capo Lilibeo, completando così la triplice partizione della Sicilia nei suoi versanti tirrenico, ionico e mediterraneo o africano. Della superficie dell'isola - 25461 Km<sup>2</sup>. - oltre il 31 % spetta a quello ionico, il 26 % al tirrenico e oltre il 42 % a quello del mar d'Africa, nel quale si versano i corsi d'acqua di assai vasto bacino d'impluvio, come l'Imera meridionale e il Platani, superati soltanto dal Simeto unito al Dittaino, che ad esso si congiunge poco prima di sfociare nell'Ionio <sup>(1)</sup>.

Ed ora ricordiamo, sempre schematicamente, i caratteri geologici della nostra isola.

Rocce di natura ed età diversissime concorrono nella sua costituzione. Le più antiche, da considerarsi in parte prepaleozoiche, sono nei Peloritani e nelle Caronie orientali: gneiss, micascisti, filladi, accompagnati da graniti porfiroidi, dioriti ecc., come nella prospiciente Calabria, alla quale non solo geologicamente, ma pure strutturalmente, l'estremo nord-est della Sicilia si collega.

Nelle Madonie, nei Monti di Palermo e di Trapani e nei Sicani l'ossatura risulta essenzialmente di formazioni dolomitiche e calcaree dell'era secondaria, talora in condizioni di giacitura tettonica assai complicata per faglie, ricoprimenti, diapiri, con riflessi assai interessanti anche per l'ubicazione e distribuzione delle manifestazioni sorgentizie.

Sviluppo preminente hanno tuttavia le formazioni dell'era terziaria, con predominio di rocce arenacee nei Monti Nébrodi e nelle Madonie,

---

<sup>(1)</sup> Limitandoci ai bacini più estesi, notiamo che quello dell'Imera meridionale (che è il fiume più lungo della Sicilia, 111 km.) occupa Km<sup>2</sup>. 2002, il Platani 1785, il Simeto, solo, 1266, il Dittaino 982, il Gornalunga 1130. I due maggiori del versante settentrionale o tirrenico sono: il San Leonardo con Km<sup>2</sup>. 522 e il Torto con Km<sup>2</sup>. 421.

calcareae e vulcaniche (lave basaltiche e tufi) negli Iblei, argillose nel resto dell'isola, ove, specialmente nella regione solfifera (Miocene), sono accompagnate da calcari, gessi, salgemma, tripoli, sabbie e conglomerati.

Nel Quaternario infine hanno un posto principale i calcari grossolani organogeno-detritici (detti impropriamente tufi), estesi più che tutto nella Sicilia sud-occidentale e nei dintorni di Palermo, ai quali si aggiungono le alluvioni argillo-sabbiose e ciottolose, sviluppate specialmente nella Piana di Catania e in quella del Gela. Nè va dimenticata la massa di lave e di tufi vulcanici del grandioso apparato dell'Etna.

Dal giuoco complesso delle vicende geologiche e dell'opera degli agenti esterni in rapporto alla distribuzione e reciproca giacitura di formazioni rocciose di così varia costituzione e diverso comportamento, risultò la grande varietà che nei suoi lineamenti offre il paesaggio siciliano.

Le caratteristiche geo-morfologiche generali possono tuttavia raggrupparsi nei seguenti tipi principali:

a) Massicci a forte corrugamento e tettonica in genere assai movimentata, elevazione notevole, per lo più con rilevante sviluppo di formazioni permeabili nelle parti superiori; es. Madonie, Monti di Palermo, Monti Sicani;

b) Regioni a tavolato, mediamente elevate (Siracusano, Ragusano) o basse (Marsalese), costituite in prevalenza di rocce calcareae permeabili;

c) Regioni di bassa montagna e collinari a debole corrugamento, con grande spezzettamento nelle direttrici tettoniche e nei lineamenti morfologici; predominio di formazioni argillose e quindi impermeabili. Sviluppo massimo nel versante di dominio del mare africano;

d) Piane alluvionali, formazioni semipermeabili o impermeabili con vaste zone soggette ad allagamento. La Piana di Catania ne è il tipo e insieme l'esempio più cospicuo.

e) Come elemento singolare il grande cono etneo, le cui rocce hanno essenzialmente funzione assorbente.

Se ora passiamo a dare uno sguardo alla distribuzione generale annua delle piogge (V. cartina allegata), rileviamo subito che le maggiori precipitazioni – evidentemente in funzione dell'orientamento dei rilievi e dell'altitudine – corrispondono alla dorsale Peloritani-Madonie, ai Monti di Palermo, ai Sicani, all'Etna, agli Iblei e agli Iblei, sorpassandovi talora notevolmente i 1000 mm., fino a un massimo che di rado s'avvicina ai 2000 nel rilievo dell'Etna. Le maggiori precipitazioni si concentrano dunque, press'a poco, proprio sulle stesse aree nelle cui parti superiori predominano le formazioni rocciose permeabili, il che, a sua volta, ha un netto riflesso sull'ubicazione generale delle più importanti manifestazioni sor-

gentizie, che si trovano appunto nell'ambito delle regioni dei rilievi testé nominati, ove le masse assorbenti poggiano su formazioni impermeabili o da queste sono recinte. Tali regioni sono dunque privilegiate e, in genere, doppiamente privilegiate, poichè, non solo dispongono di acque sorgive, ma, là dove queste non vengono spontaneamente alla luce, presentano in genere prospettive favorevoli alla ricerca di acque sotterranee mediante pozzi comuni o trivellati.

Ben diversa è la sorte invece di altre vastissime plaghe, che nel loro complesso interessano quasi altrettanta superficie di quella rappresentata dall'insieme delle precedenti. Meno favorite dalle precipitazioni, le quali in generale restano al di sotto dei 700 mm. annui e in alcuni tratti non superano normalmente i 500 e scendono eccezionalmente fino a 200 e anche meno (es. nel 1936 e nel 1937), tali plaghe sono in prevalenza costituite di formazioni argillose, cioè impermeabili, con distribuzione sporadica e sviluppo relativamente sempre modesto, in estensione e potenza, di quelle assorbenti (gessi, sabbie, arenarie, conglomerati). Per queste medesime condizioni geologiche e pluviometriche, unite ad altri fattori — quali, ad es., il generale disboscamento e sovente la totale mancanza di colture arboree — nelle plaghe in parola restano esaltate le conseguenze dei caratteri climaterici dell'isola, anzitutto il regime marittimo delle piogge, cioè con massimo invernale e minimo estivo, e la intensità talora fortissima delle precipitazioni. Basti notare che, mentre da metà aprile a metà agosto ed oltre normalmente non piove affatto, nella stagione piovosa si registrano intensità e persistenze tali da condensare certe volte nel giro di qualche giorno perfino i tre quarti della precipitazione annua <sup>(1)</sup>.

Facile è allora immaginarne le conseguenze per le accennate regioni ove predominano le formazioni argillose: corsi d'acqua con regime torrentizio e soggetti a piene subitanee spesso disastrose; instabilità dei terreni che continuamente franano, rovinando campi coltivati, strade, edifici. Ciò nel periodo autunno-invernale. D'estate: letti torrentizi in secca, però con numerosi piccoli ristagni, fomite di malaria, terreno inaridito, fino a crepacciarsi, dal calor solare e dall'infocato soffio dei venti meridionali. Per la sete degli uomini e del bestiame risorse sorgentizie rare, spesso minime e talora rappresentate da acque fortemente selenitose o

---

<sup>(1)</sup> Riporto qualche esempio: dal 21 al 23 febbraio 1931 nella stazione pluviometrica di Villa Pioppo (Palermo) caddero mm. 520,2 e nella stazione dell'Istituto Zootecnico di Palermo mm. 435,5. La media annuale di Palermo, risultante dai dati di 120 anni, era di mm. 647,9 nel 1931. E come intensità, ad Enna il 29 settembre 1935 si ebbero mm. 23 in 10 minuti primi e a Collesano il 31 maggio 1939 mm. 71 in un'ora. (Dati del Servizio Idrografico di Palermo).

inquinata di sali di sodio e di magnesio, quand'anche non siano solfuree e quindi assolutamente impotabili.

Dei 25461 Kmq. della Sicilia ben 11.600 sono occupati da formazioni argillose: quasi i 4/9!

L'opera dell'uomo a poco a poco è riuscita a correggere in molte parti e in varia misura le condizioni naturali così poco favorevoli anche nel solo aspetto quantitativo e qualitativo di quell'elemento basilare che è l'acqua, ma per grandi estensioni il quadro è, purtroppo, dura realtà. Ed è proprio questo il quadro tipico comune alla maggior parte delle plaghe latifondistiche, tanto che, per coloro ai quali esso è familiare, la parola latifondo richiama più immediatamente l'immagine delle sue caratteristiche fisiche che il suo significato reale di particolare condizione agraria, che non è nemmeno più quello letterale, corrispondendo più propriamente a terreno con ordinamento produttivo povero.

Detto quadro domina nei seguenti bacini idrografici: pel versante ionico nel sistema del Simeto (Troina, Salso orientale, Dittaino, Cornalunga, Marge) dalla zona montana alla Piana di Catania; pel versante africano nel bacino del Salso o Imera meridionale, del Platani, del Belice e del Delia; pel versante tirrenico nel bacino del Birgi, del S. Leonardo, del Torto e del Salso o Imera settentrionale. Il fenomeno è dunque assai diffuso, specie nella Sicilia centrale e centro-meridionale, ove appunto maggiore è lo sviluppo assunto dalle formazioni argillose dell'era terziaria e interessa più o meno tutte le provincie dell'isola, per un'estensione complessiva di circa 1 milione 200 mila ettari. Chiunque si rechi per ferrovia o per le strade comuni da Palermo a Catania, oppure ad Agrigento, può avere un'adeguata idea delle sue caratteristiche. Egli rileverà inoltre che, per quanto desolate e spesso assai lontane dai centri abitati, quelle plaghe sono però tutte coltivate.

Esclusi i tratti lasciati a pascolo, il rurale siciliano coltiva ogni lembo di terra, anche là dove la frana o il torrente da un istante all'altro possono travolgere ogni cosa. Latifondo non è quindi sinonimo di terreno incolto, ma essenzialmente di terreno a coltura estensiva, in prima linea a cereali<sup>(1)</sup>, coltura che consente al contadino di abitare lontano dalla terra, recandosi soltanto a intervalli per lavori preparatori, per le semine e per il raccolto. Latifondo vuol dunque dire anche plaga praticamente disabitata.

Questa duplice condizione è la risultante di un complesso di fattori politici, sociali ed economici, che l'hanno preparata ed esasperata attraverso a vicende secolari. Essa è stata però favorita nella sua genesi e più facilmente ha potuto persistere, sia pure con alterne vicissitudini, attra-

---

(<sup>1</sup>) Predomina, com'è noto, il frumento, mentre per le leguminose tiene il primo posto la fava.

verso ai tempi anche in dipendenza dai particolari caratteri dell'ambiente naturale, caratteri, come s'è visto, invero sfavorevoli e che sotto alcuni aspetti andarono progressivamente aggravandosi, perché anche quelli che inizialmente ne erano stati gli effetti avevano poi assunto la funzione di cause.

L'interdipendenza di così vari e importanti fattori e l'ingente estensione del fenomeno, costituivano un tale complesso di difficoltà, che non potevano essere controbattute e alla fine integralmente eliminate se non da un'azione unitaria portata a fondo con provvedimenti eccezionali e adeguata larghezza di mezzi tecnici e finanziari.

L'azione risolutiva da pochi mesi iniziata si ha avuto in certo modo una fase preparatoria, anche per quanto ha più stretta attinenza coll'argomento di cui ci occupiamo. Tale fase è rappresentata da tutto un insieme di studi, ricerche e opere specifiche varie, che il Governo Nazionale — restituita anzitutto la sicurezza e la tranquillità alla campagna — ha fatto eseguire o promosso in questi ultimi lustri, sia a mezzo degli Uffici direttamente dipendenti dai Ministeri dell'Agricoltura e Foreste e dei Lavori Pubblici (Provveditorato alle Opere Pubbliche, Ispettorato Agrario Compartimentale, Ispettorati provinciali agrari, Milizia Forestale ecc.) sia per tramite e col concorso di Istituti scientifici e tecnici e di Enti locali vari (Banco di Sicilia, Consorzi di Bonifica, Consigli provinciali dell'Economia, Istituto Geologico dell'Università di Palermo).

Limitatamente all'argomento studi e ricerche si può notare che la Sezione Idrografica di Palermo eseguiva anzitutto lo studio delle risorse idrauliche dell'isola agli effetti delle possibilità anche morfologico-geologiche <sup>(1)</sup> di creare serbatoi per forza motrice o per irrigazione <sup>(2)</sup>. Successivamente procedeva alla ricognizione delle sorgenti, illustrandole poi in una monografia d'importanza fondamentale per il problema dell'acqua in Sicilia <sup>(3)</sup>.

Nel contempo, meglio potenziata ed attrezzata, la stessa Sezione andava intensificando e perfezionando la raccolta di quei dati meteorologici — specialmente pluviometrici — che per tanti lavori è indispensabile possedere.

Colla fondazione, per iniziativa del Banco di Sicilia, dell'Istituto Vittorio Emanuele III pel Bonificazione della Sicilia (ora assorbito dall'Ente

---

<sup>(1)</sup> Le possibilità geologiche per la tenuta dei bacini e le condizioni delle strette ove erigere le opere di sbarramento furono studiate dall'autore di questa relazione.

<sup>(2)</sup> Min. LL. PP. Servizio Idrografico. *Risorse idrauliche per forza motrice utilizzate e ancora disponibili*. Pubbl. n. 12. Sezione Idrografica di Palermo: Sicilia. Roma, 1929-VII.

<sup>(3)</sup> Min. LL. PP. Serv. Idrogr. *Le sorgenti italiane, elenco e descrizione*. Pubbl. n. 14. Sezione Idrografica di Palermo: Sicilia. Roma, 1934-XII.



di Colonizzazione del Latifondo) venivano intanto iniziate - di pari passo collo studio dei problemi tecnici ed economici agrari della regione - sistematiche ricerche geoidrologiche, con particolare riguardo a varie plaghe incluse in comprensori di bonifica, che è quanto dire plaghe latifondistiche. Ciò portava a una migliore conoscenza delle loro caratteristiche geologiche e delle loro possibilità idriche, anche perché le indagini erano accompagnate da numerosi sondaggi, sia a scopo puramente esplorativo sia per diretta ricerca di acqua nel sottosuolo <sup>(1)</sup>.

La natura stessa degli studi e delle ricerche, di cui ho fatto cenno, richiede non solo l'opera di numeroso personale specializzato e molti mezzi, ma anche tempo adeguato alla vastità del campo da investigare. Non deve dunque far meraviglia se si afferma che il lavoro eseguito è solo parte di quello che resta da compiere. I risultati finora acquisiti costituiscono comunque la base di orientamento per la soluzione di alcuni fra i molteplici problemi che sul piano totalitario della nuova fase di recente iniziata dovranno essere affrontati per la trasformazione del latifondo siciliano.

Mi riferisco ai problemi che riguardano: le varie possibilità di assicurare la provvista dell'acqua ad uso potabile ed irriguo (da sorgenti, con pozzi, serbatoi, acquedotti rurali, secondo i casi), la sistemazione idraulica e forestale, la stabilità degli edifici e delle opere varie, i materiali adatti alle costruzioni spesso da cercarsi lontano dai luoghi d'impiego, le caratteristiche chimico-fisiche dei terreni agrari in dipendenza dalla natura geologica, sovente inadatta a certe colture ecc.

Il compito per la soluzione degli accennati problemi risulta anche più vasto e complesso per il fatto che, pure avendo essi un substrato comune, in dipendenza dai caratteri fondamentali comuni dei fattori fisici primari, presentano tuttavia aspetti ed entità variabili da zona a zona, come può facilmente desumersi da quanto via via si è venuto esponendo.

#### CONCLUSIONI.

Le due sole cifre enunciate in principio - mezzo milione di ettari da appoderare, ventimila case coloniche da costruire - erano sufficienti a dare la misura della eccezionale portata di quell'impresa che è la colonizzazione del latifondo siciliano.

La descrizione delle condizioni naturali, che caratterizzano le plaghe che devono essere investite dall'azione trasformatrice, aggiunge, alla nuda

---

(1) I sondaggi eseguiti - previo lo studio delle condizioni geoidrologiche delle singole località fatto dallo scrivente - al 31 dicembre u. s. sommano a 232, con uno sviluppo totale di ml. 8920. Di essi n. 152 per ricerca esclusiva di acqua. Circa pel 50 % ebbero esito favorevole, cioè fornirono un quantitativo d'acqua praticamente utilizzabile.

eloquenza delle cifre, elementi di concreta valutazione delle difficoltà che presenta anche uno soltanto dei suoi vari settori.

Si tratta invero di condizioni in genere poco favorevoli e spesso nettamente avverse, che hanno la loro origine prima in fattori per così dire costituzionali, con cause cospiranti e i cui effetti per la loro interdipendenza non possono pertanto essere stabilmente modificati se non da un'azione coordinata nei mezzi e sufficientemente estesa nello spazio e nel tempo.

Ciò spiega l'insuccesso di sforzi o tentativi parziali o localizzati, anche apprezzabili nell'indirizzo e nel metodo, i quali in definitiva, se pur non hanno peggiorato lo stato delle cose, non hanno tuttavia raggiunto lo scopo prefissosi.

Se poi consideriamo che quello di operare sull'ambiente fisico è solo parte del problema d'insieme, il quale esige anche di mutare radicalmente abitudini di vita legate a tradizioni secolari e di trasformare metodi di coltura arretrati o di diffonderne di nuovi che consentano quelle alte produzioni che il clima e la terra di Sicilia possono dare, si avrà la visione completa del formidabile compito, che per essere attuato richiede eccezionale larghezza di mezzi ed esige lo sforzo concorde e coordinato di quanti possono portare il loro contributo.

Il fervore delle opere, di cui si manifestano già tanti e cospicui segni percorrendo le terre ove la battaglia è già sferrata, fa anticipare la visione di quello che saranno in un prossimo avvenire tante plaghe fino ad ora deserte. Così la bella isola, mentre vedrà accresciuta la prosperità e il benessere materiale e morale dei suoi fecondi rurali, avrà l'orgoglio di far salire a più alte quote quel contributo all'economia nazionale che anche nel campo dell'agricoltura, oltre in quello minerario, pure oggi apporta, tenendo un posto d'avanguardia nella produzione e nell'esportazione <sup>(1)</sup>.

Le finalità superiori alle quali è ispirata la riforma del latifondo siciliano non avevano bisogno di esser richiamate con la mia parola. Ben presenti alla nostra mente e da tutti noi sentite nel loro significato di rinnovamento e di elevazione, sono le stesse che là dove da millenni dominava la desolata e mortifera palude promossero il miracolo di nuove città e di campi fecondi.

Nelle grandi possessioni, alla fine disertate dall'uomo e abbandonate alle forze brute della natura, Plinio vide la rovina della Patria: *Latifundia perdidere Italiam*. Ma quelle terre serbavano un tesoro nascosto, che la novissima Italia trae ora dopo tanti secoli alla luce, fonte di vita e di prosperità ai suoi figli sempre più numerosi e nuovo sicuro strumento della sua potenza.

---

(1) Per darne un'idea basti ricordare, ad esempio, che nel 1937 e 1938 la Sicilia esportò per milioni 966 e 989 rispettivamente, importando per milioni 210 e 181.



## NOTE E COMUNICAZIONI

**Matematica.** — *Problemi riducibili d'integrazione delle equazioni lineari a derivate parziali* <sup>(1)</sup>. Nota <sup>(2)</sup> di MAURO PICONE, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. Essendo assegnate le funzioni continue reali

$$a_{\mu}(x, y), \quad b_{\nu}(x, y), \quad c_{\mu\nu}(x, y), \quad f(x, y),$$

nel rettangolo  $R$  del piano  $(x, y)$ , definito dalle limitazioni

$$R: x_1 \leq x \leq x_2, \quad y_1 \leq y \leq y_2,$$

vogliamo costruire in  $R$  una soluzione dell'equazione a derivate parziali d'ordine  $m + n$  ( $m \geq 1, n \geq 1$ ):

$$[1] \quad \frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n} = \sum_{\mu=0}^{m-1} a_{\mu} \frac{\partial^{\mu+n} u}{\partial x^{\mu} \partial y^n} + \sum_{\nu=0}^{n-1} b_{\nu} \frac{\partial^{m+\nu} u}{\partial x^m \partial y^{\nu}} + \\ + \sum_{\mu=0}^{m-1} \sum_{\nu=0}^{n-1} c_{\mu\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu} u}{\partial x^{\mu} \partial y^{\nu}} + f(x, y),$$

la quale equazione, risolta rispetto alla derivata

$$\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n},$$

non contiene derivate parziali con derivazioni rispetto a  $x$  in numero maggiore di  $m$  e rispetto a  $y$  in numero maggiore di  $n$ . Ricercheremo le soluzioni della [1] nella classe — che indicheremo con  $C_{mn}$  — delle funzioni continue, nel rettangolo  $R$ , con le derivate

$$\frac{\partial^{\mu+\nu} u}{\partial x^{\mu} \partial y^{\nu}}, \quad (\mu=0, 1, \dots, m; \nu=0, 1, \dots, n)$$

e perverremo subito al seguente teorema:

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

<sup>(2)</sup> Presentata nell'Adunanza del 12 aprile 1940-XVIII.

I. Ad una soluzione della [1], della classe  $C_{mn}$  in  $R$ , si possono prescrivere ad arbitrio, compatibilmente con l'appartenenza della soluzione alla detta classe, in funzione di  $y$ , i valori:

$$[u]_{x=x_1}, \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x=x_1}, \dots, \left[ \frac{\partial^{m-1} u}{\partial x^{m-1}} \right]_{x=x_1},$$

e, in funzione di  $x$ , i valori:

$$[u]_{y=y_1}, \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \right]_{y=y_1}, \dots, \left[ \frac{\partial^{n-1} u}{\partial y^{n-1}} \right]_{y=y_1},$$

in seguito a che essa riesce determinata.

Ovviamente, basta considerare il caso che i prescritti valori siano tutti identicamente lo zero. Si ha

$$\left[ \frac{\partial^\mu u}{\partial x^\mu} \right]_{x=x_1} = 0, \quad (\mu = 0, 1, \dots, m-1),$$

e quindi

$$\left[ \frac{\partial^\mu}{\partial x^\mu} \frac{\partial^n u}{\partial y^n} \right]_{x=x_1} = 0 \quad (\mu = 0, 1, \dots, m-1),$$

onde, posto

$$[2] \quad \frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n} = \varphi(x, y),$$

segue che

$$[3] \quad \frac{\partial^n u}{\partial y^n} = \int_{x_1}^x \frac{(x-\xi)^{m-1}}{(m-1)!} \varphi(\xi, y) d\xi,$$

e, analogamente, si trova

$$[4] \quad \frac{\partial^m u}{\partial x^m} = \int_{y_1}^y \frac{(y-\eta)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi(x, \eta) d\eta,$$

laddove, la [3] e la [4], forniscono, in virtù delle prescritte condizioni,

$$[5] \quad u = \int_{x_1}^x \int_{y_1}^y \frac{(x-\xi)^{m-1}}{(m-1)!} \frac{(y-\eta)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Introdotta tale espressione di  $u$  nella [1], si trova che il posto problema d'integrazione si traduce nella seguente equazione integrale per la  $\varphi$ :

$$[6] \quad \varphi(x, y) = \int_{x_1}^x M(x, y, \xi) \varphi(\xi, y) d\xi + \int_{y_1}^y N(x, y, \eta) \varphi(x, \eta) d\eta + \\ + \int_{x_1}^x \int_{y_1}^y P(x, y, \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta + f(x, y),$$

con i seguenti nuclei

$$M(x, y, \xi) = \sum_{\mu=0}^{m-1} a_{\mu}(x, y) \frac{(x-\xi)^{m-1-\mu}}{(m-1-\mu)!},$$

$$N(x, y, \eta) = \sum_{\nu=0}^{n-1} b_{\nu}(x, y) \frac{(y-\eta)^{n-1-\nu}}{(n-1-\nu)!},$$

$$P(x, y, \xi, \eta) = \sum_{\mu=0}^{m-1} \sum_{\nu=0}^{n-1} c_{\mu\nu}(x, y) \frac{(x-\xi)^{m-1-\mu} (y-\eta)^{n-1-\nu}}{(m-1-\mu)! (n-1-\nu)!}.$$

È ben noto che un'equazione integrale come la [6], da considerarsi del tipo di VOLTERRA <sup>(1)</sup>, ammette sempre una ed una sola soluzione continua nel rettangolo  $R$ , e con ciò risulta dimostrato il teorema.

<sup>(1)</sup> Esistono, invece, due nuclei continui  $M^*(x, y, \xi)$ ,  $N^*(x, y, \eta)$ , tali che le equazioni

$$\varphi(x, y) = F(x, y) + \int_{x_1}^x M(x, y, \xi) \varphi(\xi, y) d\xi,$$

$$\varphi(x, y) = G(x, y) + \int_{y_1}^y N(x, y, \eta) \varphi(x, \eta) d\eta,$$

equivalgono, rispettivamente, alle seguenti

$$\varphi(x, y) = F(x, y) + \int_{x_1}^x M^*(x, y, \xi) F(\xi, y) d\xi,$$

$$\varphi(x, y) = G(x, y) + \int_{y_1}^y N^*(x, y, \eta) G(x, \eta) d\eta,$$

dette, pertanto,  $F(x, y)$  la somma degli ultimi tre addendi e  $G(x, y)$  quella del primo e degli ultimi due, al secondo membro dell'equazione [6] del testo, questa equivale a ciascuna delle seguenti

$$(a) \quad \varphi(x, y) = f_1(x, y) + \int_{y_1}^y N(x, y, \eta) \varphi(x, \eta) d\eta + \int_{x_1}^x \int_{y_1}^y P_1(x, y, \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

$$(b) \quad \varphi(x, y) = f_2(x, y) + \int_{x_1}^x M(x, y, \xi) \varphi(\xi, y) d\xi + \int_{x_1}^x \int_{y_1}^y P_2(x, y, \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

con

$$f_1(x, y) = f(x, y) + \int_{x_1}^x M^*(x, y, \xi) f(\xi, y) d\xi,$$

$$P_1(x, y, \xi, \eta) = P(x, y, \xi, \eta) + M^*(x, y, \xi) N(\xi, y, \eta) +$$

$$\int_{\xi}^x M^*(x, y, \sigma) P(\sigma, y, \xi, \eta) d\sigma,$$

$$f_2(x, y) = f(x, y) + \int_{y_1}^y N^*(x, y, \eta) f(x, \eta) d\eta,$$

Ovviamente, un analogo teorema sussiste per le equazioni a derivate parziali, in  $r$  variabili indipendenti, del tipo:

$$\frac{\partial^{n_1+n_2+\dots+n_r} u}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \dots \partial x_r^{n_r}} = \sum_{v_1=0}^{n_1} \sum_{v_2=0}^{n_2} \dots \sum_{v_r=0}^{n_r} a_{v_1 v_2 \dots v_r} \frac{\partial^{v_1+v_2+\dots+v_r} u}{\partial x_1^{v_1} \partial x_2^{v_2} \dots \partial x_r^{v_r}} + f,$$

$$v_1 + v_2 + \dots + v_r \leq n_1 + n_2 + \dots + n_r - 1$$

$$P_2(x, y, \xi, \eta) = P(x, y, \xi, \eta) + N^*(x, y, \eta) M(x, \eta, \xi) + \int_{\eta}^y N^*(x, y, \sigma) P(x, \sigma, \xi, \eta) d\sigma.$$

E, a loro volta, la (a) e la (b) equivalgono alle seguenti, precisamente del tipo di VOLTERRA:

$$\varphi(x, y) = f_{12}(x, y) + \int_{x_1}^x \int_{y_1}^y P_{12}(x, y, \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) d\xi dy,$$

$$\varphi(x, y) = f_{21}(x, y) + \int_{x_1}^x \int_{y_1}^y P_{21}(x, y, \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

con

$$f_{12}(x, y) = f_1(x, y) + \int_{y_1}^y N^*(x, y, \eta) f_1(x, \eta) d\eta,$$

$$P_{12}(x, y, \xi, \eta) = P_1(x, y, \xi, \eta) + \int_{\eta}^y N^*(x, y, \sigma) P_1(x, \sigma, \xi, \eta) d\sigma,$$

$$f_{21}(x, y) = f_2(x, y) + \int_{x_1}^x M^*(x, y, \xi) f_2(\xi, y) d\xi,$$

$$P_{21}(x, y, \xi, \eta) = P_2(x, y, \xi, \eta) + \int_{\xi}^x M^*(x, y, \sigma) P_2(\sigma, y, \xi, \eta) d\sigma.$$

Assicurata così l'esistenza e l'unicità di una soluzione continua dell'equazione [6] del testo, segue altresì l'equivalenza di questa all'equazione integrale, precisamente pur essa del tipo di VOLTERRA,

$$\varphi(x, y) = g(x, y) + \int_{x_1}^x \int_{y_1}^y Q(x, y, \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

con

$$g(x, y) = f(x, y) + \int_{x_1}^x M^*(x, y, \xi) f(\xi, y) d\xi + \int_{y_1}^y N^*(x, y, \eta) f(x, \eta) d\eta,$$

$$Q(x, y, \xi, \eta) =$$

$$P(x, y, \xi, \eta) + M^*(x, y, \xi) N(\xi, y, \eta) + N^*(x, y, \eta) M(x, \eta, \xi) + \int_{\xi}^x M^*(x, y, \sigma) P(\sigma, y, \xi, \eta) d\sigma + \int_{\eta}^y N^*(x, y, \sigma) P(x, \sigma, \xi, \eta) d\sigma,$$

cui si perviene eliminando, dalla [6] del testo e dalle (a) e (b), i due integrali

$$\int_{x_1}^x M(x, y, \xi) \varphi(\xi, y) d\xi, \quad \int_{y_1}^y N(x, y, \eta) \varphi(x, \eta) d\eta.$$

considerata nel dominio rettangolare:

$$x_h^{(1)} \leq x_h \leq x_h^{(2)}, \quad (h = 1, 2, \dots, r),$$

alla cui soluzione si prescrivano i valori

$$[u]_{x_h = x_h^{(1)}}, \left[ \frac{\partial u}{\partial x_h} \right]_{x_h = x_h^{(1)}}, \dots, \left[ \frac{\partial^{\mu_h - 1} u}{\partial x_h^{\mu_h - 1}} \right]_{x_h = x_h^{(1)}}, \quad (h = 1, 2, \dots, r).$$

2. Sia ora data l'espressione differenziale lineare

$$D[v] \equiv \sum_{\mu_1 + \dots + \mu_r \leq m} d_{\mu_1 \dots \mu_r}(x) \frac{\partial^{\mu_1 + \dots + \mu_r} v}{\partial x_1^{\mu_1} \dots \partial x_r^{\mu_r}},$$

d'ordine  $m$ , nelle  $r$  variabili  $x_1, \dots, x_r$ , con coefficienti dipendenti dal solo punto  $x$ , di coordinate  $x_1, \dots, x_r$ , continui in un assegnato dominio  $A$  dello spazio a  $r$  dimensioni. Siano pure dati  $p$  funzionali lineari

$$[7] \quad X_1, X_2, \dots, X_p,$$

operanti sul punto  $x$ , e supponiamo che l'espressione differenziale  $D[v]$ , sia, nel dominio  $A$ , dotata di funzione di GREEN

$$H(x_1, \dots, x_r, \xi_1, \dots, \xi_r) \equiv H(x, \xi),$$

rispetto ai funzionali [7], vale a dire che, per ogni funzione  $\psi(x)$ , di una certa classe  $\Gamma_A$  nel dominio  $A$ , esiste una ed una sola funzione, continua in  $A$  con le sue derivate parziali dei primi  $m$  ordini, cioè, come diremo, della classe  $C^{(m)}$  in  $A$ , verificante le equazioni:

$$D[v] = \psi, \quad X_1[v] = X_2[v] = \dots = X_p[v] = 0,$$

e la  $v(x)$  è data da

$$[7'] \quad v(x) = \int_A H(x, \xi) \psi(\xi) d\xi, \quad (d\xi = d\xi_1 \dots d\xi_r),$$

riuscendo, per  $\mu_1 + \dots + \mu_r \leq m - 1$ ,

$$\frac{\partial^{\mu_1 + \dots + \mu_r} v}{\partial x_1^{\mu_1} \dots \partial x_r^{\mu_r}} = \int_A H^{(\mu_1 \dots \mu_r)}(x, \xi) \psi(\xi) d\xi, \quad H^{(\mu_1 \dots \mu_r)} = \frac{\partial^{\mu_1 + \dots + \mu_r} H}{\partial x_1^{\mu_1} \dots \partial x_r^{\mu_r}},$$

e i nuclei  $H$  e  $H^{(\mu_1 \dots \mu_r)}$  abbiamo, ciascuno, un certo iterato di quadrato sommabile nel dominio  $A^{(2)}$ , luogo, nello spazio a  $2r$  dimensioni, del punto

$(x_1, \dots, x_r, \xi_1, \dots, \xi_r)$  al variare di  $x$  e di  $\xi$  in  $A$ . E consideriamo l'equazione a derivate parziali:

$$[8] \quad \frac{\partial^n}{\partial y^n} D[u] = \sum_{\mu_1 + \dots + \mu_r \leq m-1} a_{\mu_1 \dots \mu_r} \frac{\partial^{\mu_1 + \dots + \mu_r + n} u}{\partial x_1^{\mu_1} \dots \partial x_r^{\mu_r} \partial y^n} + \sum_{v=0}^{n-1} b_v \frac{\partial^v}{\partial y^v} D[u] +$$

$$\sum_{\mu_1 + \dots + \mu_r \leq m-1} \sum_{v=0}^{n-1} c_{\mu_1 \dots \mu_r v} \frac{\partial^{\mu_1 + \dots + \mu_r + v} u}{\partial x_1^{\mu_1} \dots \partial x_r^{\mu_r} \partial y^v} + f,$$

con coefficienti e termine noto funzioni del punto  $(x_1, \dots, x_r, y)$ , continui nel dominio  $(A, B)$  dello spazio a  $r+1$  dimensioni, luogo del detto punto al variare di  $x$  in  $A$  e di  $y$  nell'intervallo  $B$  dell'asse  $y$ , di estremo inferiore  $y_1$  e superiore  $y_2$ . Si vuol costruire una soluzione  $u$  della [8], della classe  $C_{mn}$  nel dominio  $(A, B)$ , ivi cioè continua con le derivate

$$\frac{\partial^{\mu_1 + \dots + \mu_r + v} u}{\partial x_1^{\mu_1} \dots \partial x_r^{\mu_r} \partial y^v}, \quad (\mu_1 + \dots + \mu_r \leq m, v \leq n),$$

tale che, per ogni  $y$  in  $B$ , le  $D[u]$  e  $D\left[\frac{\partial^n u}{\partial y^n}\right]$  riescano funzioni di  $x$  della classe  $\Gamma_A$ , e per la quale i funzionali

$$X_\mu[u] \quad (\mu = 1, 2, \dots, p),$$

risultino funzioni di  $y$  prescritte in  $B$  e le derivate

$$\left[\frac{\partial^v u}{\partial y^v}\right]_{y=y_1} \quad (v = 0, 1, \dots, n-1),$$

funzioni di  $x$  prescritte in  $A$ .

Ci limiteremo a considerare il caso che tali funzioni siano tutte lo zero e supporremo che, per ogni funzione  $u(x, y)$  che abbia la qualità della ricercata soluzione della [8], si abbia:

$$\frac{\partial^v}{\partial y^v} X_\mu[u] = X_\mu\left[\frac{\partial^v u}{\partial y^v}\right] \quad (\mu = 1, 2, \dots, p; v = 1, 2, \dots, n).$$

Posto

$$\frac{\partial^n}{\partial y^n} D[u] = D\left[\frac{\partial^n u}{\partial y^n}\right] = \varphi(x, y),$$

poichè

$$\frac{\partial^n}{\partial y^n} X_\mu[u] = X_\mu\left[\frac{\partial^n u}{\partial y^n}\right] = 0,$$

si ha

$$[9] \quad \frac{\partial^n u}{\partial y^n} = \int_0^1 H(x, \xi) \varphi(\xi, y) d\xi,$$

e poichè

$$\left[ \frac{\partial^v D[u]}{\partial y^v} \right]_{y=y_1} = 0 \quad (v=0, 1, \dots, n-1),$$

si ha pure

$$[10] \quad D[u] = \int_{y_1}^y \frac{(y-\eta)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi(x, \eta) d\eta;$$

laddove le [9] e [10] forniscono, in virtù delle prescritte condizioni,

$$[11] \quad u = \int_{y_1}^y \int_A \frac{(y-\eta)^{n-1}}{(n-1)!} H(x, \xi) \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Introdotta tale espressione di  $u$  nella [8] si ottiene l'equazione integrale in  $\varphi$ :

$$[12] \quad \varphi(x, y) = \int_A M(x, y, \xi) \varphi(\xi, y) d\xi + \int_{y_1}^y N(x, y, \eta) \varphi(x, \eta) d\eta + \\ + \int_{y_1}^y \int_A P(x, y, \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta + f(x, y),$$

con

$$M(x, y, \xi) = \sum_{\mu_1 + \dots + \mu_r \leq m-1} a_{\mu_1 \dots \mu_r}(x, y) H^{(\mu_1 \dots \mu_r)}(x, \xi), \\ N(x, y, \xi) = \sum_{v=0}^{n-1} b_v(x, y) \frac{(y-\eta)^{n-1-v}}{(n-1-v)!}, \\ P(x, y, \xi, \eta) = \sum_{\mu_1 + \dots + \mu_r \leq m-1} \sum_{v=0}^{n-1} c_{\mu_1 \dots \mu_r v}(x, y) H^{(\mu_1 \dots \mu_r)}(x, \xi) \frac{(y-\eta)^{n-1-v}}{(n-1-v)!}.$$

Se non è  $M(x, y, \xi) \equiv 0$ , l'equazione [12] cui si perviene non rientra nei tipi classici. Se è  $M(x, y, \xi) \equiv 0$ , in particolare se tutti i coefficienti  $a_{\mu_1 \dots \mu_r}$  sono identicamente nulli in  $(A, B)$ , l'equazione [12] si riduce alla seguente, di tipo misto VOLTERRA-FREDHOLM,

$$[13] \quad \varphi(x, y) = \int_{y_1}^y N(x, y, \eta) \varphi(x, \eta) d\eta + \\ + \int_{y_1}^y \int_A P(x, y, \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta + f(x, y),$$

per la quale, nel dominio  $(A, B)$ , esiste una ed una sola soluzione continua<sup>(1)</sup>. Si ha dunque il teorema:

(<sup>1</sup>) Cfr. i miei *Appunti di Analisi superiore*, teor. XXI' di pag. 594 [Rondinella, Napoli (1940)].



II. Nelle ipotesi ammesse, per il posto problema d'integrazione dell'equazione:

$$[8_0] \quad \frac{\partial^n}{\partial y^n} D[u] = \sum_{v=0}^{n-1} b_v \frac{\partial^v}{\partial y^v} D[u] +$$

$$\sum_{\mu_1 + \dots + \mu_r \leq m-1} \sum_{v=0}^{n-1} c_{\mu_1 \dots \mu_r v} \frac{\partial^{\mu_1 + \dots + \mu_r + v} u}{\partial x_1^{\mu_1} \dots \partial x_r^{\mu_r} \partial y^v} + f,$$

è da considerarsi acquisito il teorema d'unicità, ed altresì il teorema d'esistenza, a patto di verificare che la soluzione della [13], continua in  $(A, B)$ , fornisca, mediante la [11], una funzione che goda delle richieste proprietà, per il che è sufficiente che

$$\varphi(x, y) = e^{-y} \int_{y_1}^y \frac{(y-\eta)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi(x, \eta) d\eta,$$

riescano, per ogni  $y$  in  $B$ , funzioni di  $x$  della classe  $\Gamma_A$ .

Sia, per esempio, la particolare equazione in due variabili  $x$  e  $y$ , da integrare nel rettangolo  $R$  ( $x_1 \leq x \leq x_2$ ,  $y_1 \leq y \leq y_2$ ):

$$[8'] \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = a_0 \frac{\partial u}{\partial y} + a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_1 \frac{\partial u}{\partial x} + c_0 u + f,$$

e siano prescritti i valori dei due funzionali

$$X_1[u] = u(x_1, y), \quad X_2[u] = u(x_2, y),$$

nonchè il valore di  $u$  per  $y = y_1$ . Detta  $H(x, \xi)$  la funzione di BURKHARDT relativa all'intervallo  $(x_1, x_2)$  si vede immediatamente che la [11], postovi  $n = 1$ , fornisce una soluzione del problema, con  $u(x_1, y) \equiv u(x_2, y) \equiv u(x, y_1) \equiv 0$ , non appena  $\varphi(x, y)$  è una soluzione, continua in  $R$ , dell'equazione integrale

$$[12'] \quad \varphi(x, y) = \int_{x_1}^{x_2} M(x, y, \xi) \varphi(\xi, \eta) d\xi + \int_{y_1}^y b(x, y) \varphi(x, \eta) d\eta +$$

$$\int_{y_1}^y \int_{x_1}^x P(x, y, \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta + f(x, y),$$

ove, posto  $H' \equiv \partial H / \partial x$ ,

$$M = a_0 H(x, \xi) + a_1 H'(x, \xi), \quad P = c_0 H(x, \xi) + c_1 H'(x, \xi),$$

e si ha dunque che ad una soluzione, della classe  $C_{21}$  in  $R$ , dell'equazione:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_1 \frac{\partial u}{\partial x} + c_0 u + f,$$

si possono prescrivere arbitrariamente i valori sui lati  $x = x_1$ ,  $x = x_2$ ,  $y = y_1$  del rettangolo  $R$ , in seguito a che essa riesce determinata <sup>(1)</sup>.

(<sup>1</sup>) Se nella [8'] del testo i coefficienti  $a_0$  e  $a_1$  non dipendono dalla  $y$ , posto:

$$D[v] \equiv v'' - a_1 v' - a_0 v,$$

l'equazione stessa assume la forma:

$$\frac{\partial}{\partial y} D[u] = bD[u] + (c_1 + ba_1) \frac{\partial u}{\partial x} + (c_0 + ba_0) u + f,$$

e pertanto, se le equazioni

$$[a] \quad D[v] = \psi(x) \quad , \quad v(x_1) = v(x_2) = 0,$$

sono dotate di funzione di GREEN  $H(x, \xi)$  la [11] del testo, postovi  $n = 1$ , fornisce una soluzione del problema di integrazione per la [8'], con le condizioni  $u(x_1, y) \equiv u(x_2, y) \equiv u(x_1, y_1) \equiv 0$ , non appena  $\varphi$  è soluzione, continua nel rettangolo  $R$ , dell'equazione integrale (12') del testo, la quale, essendo

$$M \equiv 0, P \equiv (c_0 + ba_0) H(x, \xi) + (c_1 + ba_1) H'(x, \xi),$$

ha il tipo misto VOLTERRA-FREDHOLM. Si ha dunque che: Se i coefficienti  $a_0$  e  $a_1$  dell'equazione [8'] del testo sono indipendenti dalla  $y$  e se le equazioni (a) sono dotate di funzione di GREEN, ad una soluzione della [8'] della classe  $C_{21}$  nel rettangolo  $R$ , si possono arbitrariamente prescrivere i valori sui lati  $x = x_1$ ,  $y = y_1$ ,  $x = x_2$  di  $R$ , in seguito a che essa riesce determinata.

Se, in luogo dei funzionali  $u(x_1, y)$  e  $u(x_2, y)$ , sono, per la stessa equazione [8'] dati i seguenti

$$X_1[u] = [\partial u / \partial x]_{x=x_1} \quad , \quad X_2[u] = [\partial u / \partial x]_{x=x_2},$$

bisognerà cercare di far comparire, al primo membro dell'equazione, un'espressione differenziale, nella  $x$ , che sia dotata di funzione di GREEN rispetto a tali funzionali. L'espressione  $\partial^2 u / \partial x^2$  non è di queste, ma l'espressione

$$D[v] \equiv v'' - v$$

lo è. Ponendo, nell'equazione,  $D[u] + u$ , in luogo di  $\partial^2 u / \partial x^2$ , essa assume la forma

$$\frac{\partial}{\partial y} D[u] = (a_0 - 1) \frac{\partial u}{\partial y} + a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + bD[u] + c_1 \frac{\partial u}{\partial x} + (c_0 + b) u + f,$$

e pertanto il problema si traduce nell'equazione integrale [12'] del testo, con

$$M = (a_0 - 1) H(x, \xi) + a_1 H'(x, \xi) \quad , \quad P = (c_0 + b) H(x, \xi) + c_1 H'(x, \xi),$$

ove  $H$  è ora la funzione di GREEN relativa alle equazioni:

$$v'' - v = \psi(x) \quad , \quad v'(x_1) = v'(x_2) = 0,$$

e si ha pertanto che ad una soluzione, della classe  $C_{21}$  nel rettangolo  $R$ , dell'equazione

$$\frac{\partial^3 u}{\partial u^2 \partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_1 \frac{\partial u}{\partial x} + c_0 u + f,$$

si possono prescrivere arbitrariamente i valori sul lato  $y = y_1$  di  $R$  e i valori della derivata  $\partial u / \partial x$  sui lati  $x = x_1$  e  $x = x_2$ , in seguito a che essa riesce determinata.

3. In terzo luogo, sia data, insieme all'espressione differenziale  $D[v]$  già considerata, la

$$E[v] \equiv \sum_{v_1 + \dots + v_s \leq n} c_{v_1 \dots v_s}(y) \frac{\partial^{v_1 + \dots + v_s} v}{\partial y_1^{v_1} \dots \partial y_s^{v_s}},$$

d'ordine  $n$ , nelle variabili  $y_1, \dots, y_s$ , con coefficienti dipendenti dal solo punto  $y$ , di coordinate  $y_1, \dots, y_s$ , continui in un assegnato dominio  $B$  dello spazio a  $s$  dimensioni. Insieme ai funzionali [7], operanti su  $x$  in  $A$ , siano dati i funzionali

$$[14] \quad Y_1, Y_2, \dots, Y_q,$$

operanti sul punto  $y$  in  $B$ , e supponiamo che anche l'espressione differenziale  $E[v]$  sia dotata, nel dominio  $B$ , di funzione di GREEN  $K(y, \eta)$ , rispetto ai funzionali [14], cioè che per ogni funzione  $\psi(y)$ , di una certa classe  $\Gamma_B$  nel dominio  $B$ , esista una ed una sola funzione della classe  $C^{(n)}$  in  $B$ , verificante le equazioni:

$$E[v] = \psi, \quad Y_1[v] = Y_2[v] = \dots = Y_q[v] = 0,$$

data da

$$[14'] \quad v(y) = \int_B K(y, \eta) \psi(\eta) d\eta, \text{ ecc.}$$

Detto  $(A, B)$  il dominio dello spazio a  $r + s$  dimensioni, luogo del punto  $(x, y) \equiv (x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s)$ , al variare di  $x$  in  $A$  e di  $y$  in  $B$ , consideriamo in  $(A, B)$  la seguente equazione a derivate parziali d'ordine  $m + n$ :

$$[15] \quad ED[u] = \sum_{\mu_1 + \dots + \mu_r \leq m-1} a_{\mu_1 \dots \mu_r}(x, y) \frac{\partial^{\mu_1 + \dots + \mu_r}}{\partial x_1^{\mu_1} \dots \partial x_r^{\mu_r}} E[u] +$$

$$\sum_{v_1 + \dots + v_s \leq n-1} b_{v_1 \dots v_s}(x, y) \frac{\partial^{v_1 + \dots + v_s}}{\partial y_1^{v_1} \dots \partial y_s^{v_s}} D[u] +$$

$$\sum_{\mu_1 + \dots + \mu_s \leq m-1} \sum_{v_1 + \dots + v_s \leq n-1} c_{\mu_1 \dots \mu_r v_1 \dots v_s}(x, y) \frac{\partial^{\mu_1 + \dots + \mu_r + v_1 + \dots + v_s} u}{\partial x_1^{\mu_1} \dots \partial x_r^{\mu_r} \partial y_1^{v_1} \dots \partial y_s^{v_s}} + f(x, y),$$

con coefficienti e termine noto, continui in  $(A, B)$ : Si vuol costruire una soluzione della [15], della classe  $C_{mn}$  nel dominio  $(A, B)$ , ivi cioè continua con le derivate

$$\frac{\partial^{\mu_1 + \dots + \mu_r + v_1 + \dots + v_s} u}{\partial x_1^{\mu_1} \dots \partial x_r^{\mu_r} \partial y_1^{v_1} \dots \partial y_s^{v_s}} \quad (\mu_1 + \dots + \mu_r \leq m, v_1 + \dots + v_s \leq n),$$

tale che, per ogni  $y$  in  $B$ , le  $D[u]$  e  $DE[u]$ , riescano funzione di  $x$  della classe  $\Gamma_A$  e, per ogni  $x$  in  $A$ , le  $E[u]$  e  $ED[u]$  funzioni di  $y$  della classe  $\Gamma_B$ , e per la quale i funzionali

$$X_\mu[u], \quad (\mu = 1, 2, \dots, p),$$

risultino funzioni di  $y$  prescritte in  $B$  e i funzionali

$$Y_\nu[u], \quad (\nu = 1, 2, \dots, q),$$

funzioni di  $x$  prescritte in  $A$ . Ci limiteremo a considerare il caso che tali funzioni siano tutte lo zero e che si abbia

$$E[X_\mu[u]] = X_\mu[E[u]] \quad , \quad D[Y_\nu[u]] = Y_\nu[D[u]], \\ (\mu = 1, 2, \dots, p \quad ; \quad \nu = 1, 2, \dots, q).$$

Si ponga

$$ED[u] \equiv DE[u] = \varphi(x, y).$$

Dalla  $X_\mu[u] = 0$ , segue  $X_\mu[E[u]] = 0$ , e dalle

$$DE[u] = \varphi \quad , \quad X_\mu[E[u]] = 0, \quad (\mu = 1, 2, \dots, p),$$

si deduce

$$[16] \quad E[u] = \int_A H(x, \xi) \varphi(\xi, y) d\xi,$$

e viceversa, Dalle  $Y_\nu[u] = 0$ , segue  $Y_\nu[D[u]] = 0$  e dalle

$$ED[u] = \varphi \quad , \quad Y_\nu[E[u]] = 0, \quad (\nu = 1, 2, \dots, q),$$

si deduce

$$[17] \quad D[u] = \int_B K(y, \eta) \varphi(x, \eta) d\eta,$$

e viceversa. La [16], con le condizioni  $Y_\nu[u] = 0$ , e la [17] con le condizioni  $X_\mu[u] = 0$ , danno poi, entrambe,

$$u = \int_A \int_B H(x, \xi) K(y, \eta) \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Introdotta tale espressione della  $u$  nella [15], ne segue per la  $\varphi$  l'equazione integrale

$$[18] \quad \varphi(x, y) = \int_A M(x, y, \xi) \varphi(\xi, y) d\xi + \int_B N(x, y, \eta) \varphi(x, \eta) d\eta + \\ + \int_A \int_B P(x, y, \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta + f(x, y),$$

con

$$\begin{aligned}
 M(x, y, \xi) &= \sum_{\mu_1 + \dots + \mu_r \leq m-1} a_{\mu_1 \dots \mu_r}(x, y) H^{(\mu_1 \dots \mu_r)}(x, \xi), \\
 N(x, y, \eta) &= \sum_{v_1 + \dots + v_s \leq n-1} b_{v_1 \dots v_s}(x, y) K^{(v_1 \dots v_s)}(y, \eta), \\
 P(x, y, \xi, \eta) &= \\
 &\sum_{\mu_1 + \dots + \mu_r \leq m-1} \sum_{v_1 + \dots + v_s \leq n-1} c_{\mu_1 \dots \mu_r, v_1 \dots v_s}(x, y) H^{(\mu_1 \dots \mu_r)}(x, \xi) K^{(v_1 \dots v_s)}(y, \eta).
 \end{aligned}$$

Di tali equazioni, come per quelle del tipo [12], non si possiede ancora, che io mi sappia, una teoria generale. Se però è identicamente  $M \equiv N \equiv 0$ , in particolare se tutti i coefficienti  $a_{\mu_1 \dots \mu_r}$  e  $b_{v_1 \dots v_s}$  sono identicamente nulli in  $(A, B)$ , la [18] si riduce ad un'ordinaria equazione tipo FREDHOLM, e si ha dunque il teorema:

III. *Nelle ipotesi ammesse, introdotto un parametro  $\lambda$  il problema di integrare l'equazione:*

$$\begin{aligned}
 [19] \quad ED[u] &= \\
 \lambda \sum_{\mu_1 + \dots + \mu_r \leq m-1} \sum_{v_1 + \dots + v_s \leq n-1} c_{\mu_1 \dots \mu_r, v_1 \dots v_s} \frac{\partial^{\mu_1 + \dots + \mu_r + v_1 + \dots + v_s} u}{\partial x_1^{\mu_1} \dots \partial x_r^{\mu_r} \dots \partial y_1^{v_1} \dots \partial y_s^{v_s}} + f,
 \end{aligned}$$

prescrivendo i valori dei funzionali  $X_\mu[u]$  e  $Y_v[u]$  come funzioni, rispettivamente, di  $y$  in  $B$  e di  $x$  in  $A$ , si traduce nella risoluzione dell'equazione integrale di Fredholm:

$$[20] \quad \varphi(x, y) = \lambda \int \int_A B P(x, y, \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta + f(x, y),$$

e sono pertanto da considerarsi acquisiti i teoremi d'esistenza e di determinazione per la soluzione del problema (<sup>1</sup>).

Se poi i funzionali  $X_\mu$  e  $Y_v$  sono tali che, per le relative funzioni di GREEN, si abbia

$$\begin{aligned}
 H(x, \xi) &\equiv 0 \quad , \quad \text{per } \xi_1 > x_1, \\
 K(y, \eta) &\equiv 0 \quad , \quad \text{per } \eta_1 > y_1,
 \end{aligned}$$

designato per ogni punto  $\bar{x}$  di  $A$ , con  $A(\bar{x}_1)$  quella parte di  $A$ , luogo dei punti  $x$  per cui  $x_1 \leq \bar{x}_1$ , e per ogni punto  $\bar{y}$  di  $B$ , con  $B(\bar{y}_1)$  quella parte

(<sup>1</sup>) Per un caso particolare di questo teorema cfr. D. MANGERON, *Sopra un problema al contorno per un'equazione differenziale alle derivate parziali di quarto ordine con le caratteristiche reali doppie* [« Rend. R. Acc. Scienze, Napoli » (1932-X), « Giornale di Mat. Battaglini » (1933-XI)].

di  $B$  luogo dei punti  $y$  per cui  $y_1 \leq \bar{y}_1$ , l'equazione integrale [18] assume il tipo misto VOLTERRA-FREDHOLM:

$$\varphi(x, y) = \int_{A(x_1)} M(x, y, \xi) \varphi(\xi, y) d\xi + \int_{B(y_1)} N(x, y, \eta) \varphi(x, \eta) d\eta + \\ + \int_{A(x_1)} \int_{B(y_1)} P(x, y, \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta + f(x, y),$$

e si ha dunque <sup>(1)</sup> il teorema d'unicità, e, sotto eventuali ulteriori ipotesi, quello d'esistenza per la soluzione del posto problema d'integrazione dell'equazione [15]. Anche questo risultato è di grande generalità, come caso particolare si ha, per esempio, il teorema (del quale il teor. I è, a sua volta, particolarissimo caso):

IV. Se la [7'] rappresenta in  $A$  la soluzione del problema di Cauchy per l'equazione  $D[v] = \psi$  e per una certa ipersuperficie  $S_1$  di  $A$  e la [14'] rappresenta in  $B$  la soluzione del problema di Cauchy per l'equazione  $E[v] = \psi$  e per una certa ipersuperficie  $S_2$  di  $B$ , ad una soluzione della [15] si possono prescrivere su  $S_1$ , i valori di essa e delle derivate dei primi  $m-1$  ordini rispetto alle coordinate di  $x$  e su  $S_2$  i valori di essa e delle derivate dei primi  $n-1$  ordini rispetto alle coordinate di  $y$ , in seguito a che essa riesca determinata in tutto  $(A, B)$ .

4. Siano  $\alpha_i$  e  $v_i(x)$  autovalore e autosoluzione per le equazioni:

$$D[v] = \alpha \theta(x) v, \quad X_\mu[v] = 0, \quad (\mu = 1, 2, \dots, p)$$

e  $\beta_j$  e  $w_j(y)$  per le equazioni

$$E[w] = \beta \tau(y) w, \quad Y_\nu[w] = 0, \quad (\nu = 1, 2, \dots, q).$$

Si ha

$$DE[v_i w_j] = D[v_i E[w_j]] = D[v_i] E[w_j] = \alpha_i \beta_j \theta(x) \tau(y) v_i w_j,$$

e quindi che  $\alpha_i \beta_j$  e  $v_i(x) w_j(y)$  sono autovalore e autosoluzione per le equazioni

$$DE[u] = \lambda \theta(x) \tau(y) u, \quad X_\mu[u] = 0, \quad Y_\nu[u] = 0, \quad (\mu = 1, \dots, p; \nu = 1, \dots, q).$$

Se i nuclei  $H(x, \xi)$  e  $K(y, \eta)$  sono simmetrici e se tutti i coefficienti  $c$ , nella [19], sono nulli, salvo quello di  $u$ , il nucleo dell'equazione integrale [20] assume la forma

$$H(x, \xi) \cdot K(y, \eta) \cdot c(x, y),$$

<sup>(1)</sup> Cfr. PICONE, *Appunti d'Analisi superiore* (loc. cit.).

è cioè di tipo *polare* e pertanto, in certe ben note ipotesi, segue l'esistenza dello spettro per il parametro  $\lambda$  nelle equazioni

$$DE[u] = \lambda c(n, y)u, \quad X_\mu[u] = 0, \quad Y_\nu[u] = 0, \quad (\mu = 1, \dots, p; \nu = 1, \dots, q),$$

il quale spettro contiene gli autovalori  $\alpha_i \beta_j$  nel caso che  $c(x, y)$  si decomponga nel prodotto  $\theta(x)\tau(y)$ .

5. Ai problemi d'integrazione di equazioni a derivate parziali del tipo di quello che abbiamo considerato propongo di dare l'attributo di *riducibili*, in quanto la traduzione di essi in equazione integrale si può far dipendere dalla costruzione di funzioni di GREEN relative a problemi d'ordine minore e in numero minore di variabili. Il più generale problema riducibile, al quale si può estendere il dato procedimento risolutivo, si pone al modo seguente:

Sia  $D_h[u]$  ( $h = 1, 2, \dots, s$ ) un'espressione differenziale lineare d'ordine  $n_h$ , nelle coordinate  $x_{h1}, x_{h2}, \dots, x_{h r_h}$  di un punto  $x_h$  dello spazio a  $r_h$  dimensioni, con coefficienti dipendenti dal solo punto  $x_h$ , dotata di funzione di Green in un dominio  $A_{h2}$  rispetto ai funzionali lineari

$$[21] \quad X_h^{(1)}, X_h^{(2)}, \dots, X_h^{(p_h)},$$

operanti sul punto  $x_h$  in  $A_h$  e siano  $i_1, i_2, \dots, i_k$ ,  $k (\leq s-1)$  indici scelti fra gl'indici  $1, 2, \dots, s$  e  $j_1, j_2, \dots, j_{s-k}$  gl'indici rimanenti.

Si deve integrare nel dominio  $(A_1, A_2, \dots, A_s)$  dello spazio a  $r_1 + r_2 + \dots + r_s$  dimensioni, luogo del punto  $(x_{11}, \dots, x_{1 r_1}, \dots, x_{s1}, \dots, x_{s r_s})$  al variare di  $x_1$  in  $A_1, \dots$ , di  $x_s$  in  $A_s$ , un'equazione a derivate parziali, il cui primo membro è

$$D_1 D_2 \dots D_s [u],$$

ed il secondo è una combinazione lineare, a coefficienti dipendenti dal punto  $(x_1, x_2, \dots, x_s)$ , di un termine noto, delle derivate parziali di  $u$ , con derivazioni, rispetto alle coordinate dei punti  $x_1, x_2, \dots, x_s$ , in numero non superiore, rispettivamente, a  $n_1 - 1, n_2 - 1, \dots, n_s - 1$ , delle derivate parziali di

$$D_{i_1} D_{i_2} \dots D_{i_k} [u], \quad (k = 1, 2, s-1; i_1, i_2, \dots, i_k = 1, 2, \dots, s)$$

rispetto alle coordinate dei punti  $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{s-k}}$ , con derivazioni, rispetto alle coordinate di  $x_{j_1}$ , in numero non superiore a  $n_{j_1} - 1$ , rispetto alle coordinate di  $x_{j_2}$ , in numero non superiore a  $n_{j_2} - 1, \dots$ , imponendo inoltre la condizione che i funzionali [21] (per  $h = 1, 2, \dots, s$ ) riescano funzioni del punto  $(x_1, \dots, x_{h-1}, x_{h+1}, \dots, x_s)$  prescritte nel dominio  $(A_1, \dots, A_{h-1}, A_{h+1}, \dots, A_s)$ .



**Meccanica.** — *Momenti d'inerzia di configurazione e loro intervento nella dinamica dei sistemi materiali.* Nota <sup>(1)</sup> di UMBERTO CISOTTI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. *Momenti d'inerzia di configurazione.* — Si abbia una qualsiasi distribuzione, discreta o continua, di punti materiali in movimento; designi  $P$  un punto generico e  $m$  la sua massa. In un istante qualsiasi mettiamo in corrispondenza biunivoca i punti  $P$  del sistema con quelli di una qualsiasi sua configurazione, passata o futura; per fissare le idee riferiamoci alla configurazione iniziale, cioè corrispondente all'istante  $t = 0$  e diciamo  $P_0$  la posizione che  $P$  aveva in questo istante. Colla posizione

$$[1] \quad s = P - P_0$$

risulta definito lo *spostamento diretto* di  $P$  dalla posizione iniziale  $P_0$  alla posizione  $P$ , che diremo *attuale*. È quasi superfluo far rilevare che lo spostamento effettivo da  $P_0$  a  $P$  in generale avrà luogo lungo una linea (traiettoria del punto  $P$ ) di cui  $s$  è una corda. Il prodotto

$$ms^2$$

si può interpretare come momento d'inerzia di  $m$ , ubicato in  $P$ , rispetto alla posizione iniziale  $P_0$ , e la somma

$$[2] \quad J = \sum ms^2,$$

estesa a tutte le masse del sistema, è la somma dei momenti polari di ciascuna massa, ubicata nella posizione attuale, rispetto alla corrispondente posizione iniziale. Il carattere dimensionale di  $J$  è quello di un momento d'inerzia, ma, come si vede, esso dipende, oltre che dalla distribuzione delle masse nella configurazione attuale, anche dalle due configurazioni, attuale e iniziale. Da qui scende la opportunità di chiamare  $J$  *momento d'inerzia di configurazione*: in modo preciso, *momento d'inerzia del sistema rispetto alla configurazione iniziale*. È però manifesto che il medesimo  $J$

<sup>(1)</sup> Presentata nell'Adunanza del 12 aprile 1940-XVIII.

rappresenta anche il momento d'inerzia del sistema rispetto alla configurazione attuale, qualora si immaginino le masse ubicate nei punti della configurazione iniziale <sup>(1)</sup>.

2. *Relazione coi momenti d'inerzia polari. — Momenti d'inerzia misti.* — Sia  $O$  un punto comunque prescelto nello spazio; si ha:

$$[3] \quad P - O = s + (P_0 - O);$$

per cui

$$\Sigma m (P - O)^2 = \Sigma m s^2 + \Sigma m (P_0 - O)^2 + 2 \Sigma m s \times (P_0 - O).$$

Ponendo:

$$[4] \quad I = \Sigma m (P - O)^2, \quad I_0 = \Sigma m (P_0 - O)^2, \quad H = \Sigma m s \times (P_0 - O),$$

la precedente relazione si scrive:

$$[5] \quad \boxed{I = I_0 + J + 2H}.$$

Si riconosce che  $I$  rappresenta il momento d'inerzia polare delle masse nella configurazione attuale, rispetto al polo  $O$ , mentre  $I_0$  è l'analogo momento d'inerzia polare, rispetto al medesimo polo  $O$ , del sistema di masse nella configurazione iniziale,  $J$  è il momento d'inerzia di configurazione definito dalla relazione [2], e infine  $H$  è un momento d'inerzia, con referenza al polo  $O$ , *misto* inquantochè dipende in modo composto da entrambe le configurazioni, iniziale e attuale.

3. *Una formula relativa alla dinamica dei sistemi materiali.* — Siano:  $F$  la forza esterna agente su  $P$  e  $f$  quella interna (azione complessiva su  $P$  proveniente da tutti gli altri punti del sistema); sicchè  $F + f$  è la risultante di tutte le forze a cui è sottoposto  $P$ . Ne segue che, durante il moto del sistema, ad ogni istante  $t$  e per ogni punto  $P$ , si ha:

$$m\ddot{P} = F + f,$$

(<sup>1</sup>) Nel principio gaussiano della minima costrizione o del minimo sforzo si introduce uno scalare denominato *costrizione*, avente anch'esso le dimensioni di un momento d'inerzia, in quanto risulta somma di prodotti di masse per quadrati di distanze di coppie di punti, ma tali coppie non hanno il significato da noi attribuito alle nostre coppie di punti  $P, P_0$ . È per questo che non riteniamo opportuno doversi applicare anche al nostro caso la denominazione di *costrizione*, che è invece pienamente giustificata nel caso del principio gaussiano su ricordato. (Cfr. LEVI-CIVITA e AMALDI, *Lezioni di Meccanica razionale*, volume secondo, parte seconda, Bologna, Zanichelli, 1927, pag. 483).

designando i punti, sovrapposti alla lettera, derivazione rispetto al tempo. In virtù della [1] è  $\dot{P} = \dot{s}$ , per cui la relazione precedente si può scrivere:

$$[6] \quad m\ddot{s} = F + f.$$

Moltiplicando scalarmente i due membri di questa relazione per  $s$  e sommando a tutti i punti del sistema, si ottiene:

$$\Sigma m\ddot{s} \times s = \Sigma (F + f) \times s.$$

Si rilevi che

$$\ddot{s} \times s = \frac{1}{2} \frac{d^2 s^2}{dt^2} = \dot{s}^2;$$

ponendo altresì

$$[7] \quad T = \frac{1}{2} \Sigma m\dot{s}^2, \quad L = \Sigma (F + f) \times s$$

e tenendo presente [2], la precedente può scriversi:

$$[8] \quad \boxed{\frac{1}{2} \ddot{J} = L + 2T.}$$

Risulta dalle relazioni [7] che  $T$  rappresenta l'energia cinetica del sistema,  $L$  il lavoro di tutte le forze (esterne e interne) per spostare il sistema dalla configurazione iniziale a quella attuale *direttamente*, cioè per effetto degli spostamenti [1]. La formula [8] va dunque ad esprimere: *in un qualunque sistema materiale in movimento la metà della derivata seconda rispetto al tempo del momento d'inerzia del sistema rispetto alla configurazione iniziale eguaglia il lavoro di tutte le forze attuali corrispondente al passaggio diretto del sistema dalla configurazione iniziale alla attuale, aumentato del doppio dell'energia cinetica.*

4. *Una formula di Cerruti.* — Si moltiplichino scalarmente i due membri della [6] per  $P_0 - O$  e si rilevi che

$$[9] \quad V_0 = \Sigma (F + f) \times (P_0 - O)$$

è il *viriale* delle forze attuali, nella configurazione iniziale, rispetto al polo  $O$ , per cui, tenendo presente l'ultima delle [4], si ottiene la formula:

$$\dot{H} = V_0.$$

D'altra parte, introducendo anche il viriale, rispetto a  $O$ , delle forze stesse nella configurazione attuale, cioè:

$$[11] \quad V = \Sigma (F + f) \times (P - O),$$

si vede che l'ultima delle relazioni [7], tenute presenti [3], [9] e [11], si può scrivere:

$$[12] \quad L = V - V_0.$$

Derivando due volte la relazione [5] rispetto al tempo  $t$  si ha, notando che  $I_0$  è indipendente da  $t$ ,

$$\ddot{I} = \ddot{J} + 2\ddot{H},$$

per cui la [8] può scriversi

$$\frac{1}{2}\ddot{I} - \ddot{H} = L + 2T,$$

e infine, per [10] e [12]:

$$\frac{1}{2}\ddot{I} = V + 2T,$$

formula dovuta a CERRUTI <sup>(1)</sup> e che va a coincidere colla [8] cambiando semplicemente  $I$  in  $J$  e  $V$  in  $L$ .

---

<sup>(1)</sup> *Sul viriale*. « Rend. della R. Acc. di Sc. fis. e mat. di Napoli » (1876), pag. 154-165, formula (11). Cfr. ancora CISOTTI, *Sull'energia cinetica di masse fluide continue: viriale degli sforzi*. « Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei ». Serie quinta, vol. XXXII (2° sem. 1923), pag. 465.

---

**Meccanica.** — *Una nuova teoria cosmogonica fondata sul problema degli  $N + 1$  corpi di dimensioni finite e indipendente da ogni specificazione sulla natura dei fenomeni dissipativi.* Nota di GIULIO KRALL, presentata <sup>(1)</sup> dall'Accademico FRANCESCO SEVERI.

A chi consideri le teorie cosmogoniche classiche e quelle attuali, particolarmente messe in luce o dal loro intrinseco valore o dall'abilità analitica inarrivabile di POINCARÉ, nessuna appare priva di qualche difficoltà specifica e di una sostanziale, a tutte comune. Quest'ultima è determinata dal fatto che tutte le teorie finora avanzate sono poggiate sulla estensione, ad un sistema planetario generale, di analisi svolte su uno, elementare, di due soli corpi, nei quali si fa intervenire, oltre alla ordinaria forza di attrazione newtoniana, — alludo alle teorie più in vista — una correzione esprimente l'azione delle fluttuazioni periodiche degli oceani o dei nuclei stessi, oppure un lieve effetto di isteresi, che è necessario schematizzare sotto forma di una forza di tipo viscoso (nella velocità radiale).

Soffermarsi su questa difficoltà sostanziale con qualche speranza di superarla per attacco frontale, con i metodi della Meccanica celeste, sarebbe, naturalmente, ingenuo: basta pensare in quale senso si può dire sia appena risolto il massimo problema di questa: il problema dei tre corpi.

Ma, come ho fatto vedere in più Note apparse particolarmente nei « Rend. Acc. Lincei » <sup>(2)</sup> l'associazione di una geniale osservazione di KELVIN sulla teoria di DARWIN, alla nozione di soluzione stazionaria di un sistema

<sup>(1)</sup> Nell'Adunanza del 12 aprile 1940-XVIII.

<sup>(2)</sup> *Spiegazione energetica della tendenza al parallelismo degli assi di rotazione di 2 corpi celesti gravitanti e rotanti.* « Boll. Unione Matematica Italiana », 1931, n. 5; *L'invariante adiabatico nel moto dei giroscopi.* « Rend. Acc. Lincei », 1931, fasc. 5-6; *Mete lontane conseguenti a marea del moto di un sistema planetario.* « Rend. Seminario Matematico », R. Università di Roma, 1932-XI; *Intorno agli effetti asintotici delle marea sul moto dei corpi celesti, generalità e problema dei due corpi.* « Rend. Acc. Lincei », 1932, fasc. 3; *Mete lontane conseguenti a marea del moto di un sistema planetario.* « Rend. Seminario Matem. R. Università di Roma », 1932; *État limite, résultant des marées, pour le mouvement d'un système planétaire.* « Comptes Rendus de l'Acc. des Sciences », 1932, pag. 485; *Intorno agli effetti asintotici delle marea sul moto dei corpi celesti. Problema dei 3 corpi.* « Rend. Acc. Lincei », 1932-X, fasc. 5;

dinamico generale secondo LEVI-CIVITA, consente di girare completamente quella fondamentale difficoltà cui ho alluso e di risolvere definitivamente il problema centrale della Cosmogonia: il quale consiste, come ben si sa, nel ricercare come attraverso una qualunque causa dissipativa, dal caos di un sistema di quanti si vogliano corpi di dimensioni non trascurabili in raffronto alle mutue distanze, si genera l'ordine attuale dell'Universo e del sistema solare in particolare, quale è a noi ben noto; ed un ordine futuro, estremamente remoto, ma ancor più saliente, di cui dirò tra breve.

All'uopo mi riferirò alle mie ricerche citate con l'intento di dare, da un lato una precisazione analitica che da quelle non risulta esplicita e dall'altro, di mettere in rilievo una osservazione non priva di significato in questo periodo di fervide discussioni e ricerche cosmogoniche.

L'idea del KELVIN si sintetizza in questo: senza approfondire la natura delle azioni delle maree sul moto dei corpi celesti [studiando il complesso di forze generato dalla configurazione dei pianeti, (variabile per fluttuazioni periodiche degli oceani o per deformazione dei nuclei che li costituiscono) in ritardo di fase sulla configurazione d'equilibrio corrispondente alla forza attrattiva], basta considerare il fatto ovvio che, alla presenza di attrito corrisponde, necessariamente, *dissipazione di energia*.

Ora, poichè queste azioni dissipative sono *interne*, nel senso ordinariamente inteso in Meccanica analitica, l'energia potrà scendere fino ad un limite inferiore condizionato all'*invarianza*, stabilita da un fondamentale teorema della Dinamica, *del momento della quantità di moto*.

Se si ricerca questo limite inferiore dell'energia senza precisare l'azione dissipativa considerando concorrenti al minimo alcuni parametri caratteristici del sistema, ad es. l'*eccentricità* dell'orbita intesa come *elemento ellittico*, le *velocità angolari* dei moti rotatori o, andando più in là di quanto ha voluto limitarsi il DARWIN, l'*inclinazione degli assi di rotazione sul piano dell'orbita* e, trattandosi di moti più generali di *precessione*, gli *angoli di precessione* e le *inclinazioni sul piano orbitale degli assi di precessione*, si constata che il minimo condizionato si ha per eccentricità nulle, velocità di rotazione eguali a quelle di rivoluzione, angoli di precessione nulli quindi *precessioni degeneri*; assi di precessione (che diventano di rotazione) normali al piano orbitale.

Restano così spiegate, anche spinte all'estremo, le caratteristiche essenziali del nostro sistema planetario.

1. *Osservazione; degradazione d'energia dovuta a fenomeni di isteresi gravitazionale.* — All'azione dissipativa conseguente alle maree, si sosti-

---

*Sul moto di un sistema planetario di  $(N + 1)$  corpi rigidi e suoi aspetti limiti stazionari.* « Rend. Acc. Lincei », 1933, fase. 12; *Sur le plus lointain avenir des systèmes planétaires.* « Scientia », Août, 1934.

tuisca una qualunque azione dissipativa che si può derivare ad es. da una specie di *isteresi della forza di gravitazione* ottenuta considerando leggi di attrazione del tipo

$$F = f \frac{mm'}{r^2} \left\{ 1 + \int_{-\infty}^t \frac{r^2(t)}{r^2(t')} K(t, t') dt' \right\}$$

con il *nucleo ereditario*, nel senso di VOLTERRA,  $K(t, t')$  precisato solo così da caratterizzare *cicli di isteresi positivi*, quindi portanti a degradazione d'energia in calore.

Nessun dubbio che il criterio del KELVIN conduce ancora, senza modifiche e con estrema semplicità, alle stesse conclusioni riportate nelle premesse in quanto in esso si parla di *dissipazione di energia senza che occorra precisarne il meccanismo*.

Comunque sia, per arrivare a conclusioni cosmogonicamente soddisfacenti, resta sempre da considerare il caso generale degli  $N + 1$  corpi a struttura qualunque che penseremo definita sufficientemente dai corrispondenti ellissoidi principali di inerzia.

Tale considerazione non implica, come già ho fatto vedere, difficoltà analitiche sensibili. Mentre, già per i due corpi, di cui uno solo di dimensioni non trascurabili, sferico a distribuzione concentrica delle masse, per una azione dissipativa di tipo viscoso, è d'uopo ricorrere, per le conclusioni asintotiche, alle risorse di una notevole abilità analitica.

Come vedremo, la nozione di *soluzione stazionaria di un sistema differenziale* applicata sistematicamente porta a conclusioni cosmogoniche valide in rigore, conformi del resto a quelle estrapolazioni cui inizialmente avevo alluso ed a precisazioni ulteriori molto suggestive.

La validità in rigore qui dichiarata, richiederà ancora una precisazione importante che sino ad ora non avevo fatta in modo esplicito e che esporrò in una nota seguente; ma prima mi siano concessi alcuni richiami che passo ad esporre.

2. Osservazioni intorno alle soluzioni stazionarie. — Di un sistema differenziale ordinario

$$[1] \quad \frac{dx_i}{dt} = X_i(x/t) \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

sia data una *relazione invariante*  $f(x, t) = 0$ , vale a dire, con significato ben noto, una relazione in termini finiti fra le  $x$  e  $t$  verificata da tutte le soluzioni del sistema che inizialmente la soddisfano.

Ciò posto, associamo alla  $f = 0$  la relazione simbolica

$$[2] \quad \delta f = 0$$



che si ottiene eguagliando a zero la variazione di  $f$  corrispondente a variazioni infinitesime  $\delta x_i$  delle  $x_i$ , tali però che le  $x_i + \delta x_i$  risultino ancora soluzioni dell'originario sistema.

Si dimostra allora che le equazioni equivalenti alla [2], precisamente le

$$[2 a] \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

unitamente alla  $f = 0$ , semprechè non risultino incompatibili, costituiscono un sistema di *relazioni invarianti*.

Se in particolare la  $f = 0$  è un integrale effettivo le [2 a] costituiscono un *sistema invariante* da sole o unitamente alla  $f = 0$  suddetta.

Il caso meccanicamente più interessante è quello in cui trattandosi di un *sistema canonico a funzione caratteristica* indipendente dal tempo, si rende *stazionario* addirittura l'*integrale dell'energia*, in via assoluta o subordinatamente ad uno o più *integrali o relazioni invarianti*. Le soluzioni che verificano questi sistemi di *relazioni invarianti*, prendono il nome di *soluzioni stazionarie*, che diconsi alla Routh quando gli integrali su accennati risultino dalla presenza di coordinate *cicliche od ignorabili*, alla Levi-Civita nelle condizioni più generali (possibili si intende).

3. *Osservazione sullo stato limite di minima energia.* — Ciò posto, possiamo subito ad osservare in generale che il moto di un sistema dinamico compabile con uno stato asintotico di minima energia deve soddisfare, ove con  $\mathcal{G}$  si indichi l'energia suddetta, alle condizioni di stazionarietà

$$[3] \quad \delta \mathcal{G} = 0$$

subordinatamente all'esistenza di certi integrali tipici del sistema differenziale che si considera (per esempio *integrali dei momenti cinetici*).

L'annullarsi condizionato della variazione deve aver luogo per tutte le quantità da cui dipende la  $\mathcal{G}$ , quantità che designeremo compendiosamente con  $z$  e che si possono distinguere in due gruppi: l'uno corrispondente alle variabili  $x$  del paragrafo precedente, cioè, nel caso nostro, costituito dalle *variabili canoniche*; l'altro, formato da quei parametri, lentissimamente variabili, che designeremo compendiosamente con  $a$  e che corrispondono ad eventuali costanti strutturali del sistema od a certe particolari determinazioni degli integrali di condizione, per esempio *costanti delle aree*.

Avendosi identicamente, con ovvio significato dei simboli,

$$[3 a] \quad \delta_z \mathcal{G} = \delta_x \mathcal{G} + \delta_a \mathcal{G},$$

la precedente relazione di stazionarietà, attesa l'indipendenza delle  $a$  dalle  $x$  implica separatamente, per quanto sempre subordinatamente a quei certi integrali, che sia

$$[4] \quad \delta_x \mathcal{E} = 0 \quad , \quad \delta_a \mathcal{E} = 0 .$$

La prima di codeste relazioni esprime che *le eventuali soluzioni minimizzanti l'energia totale vanno cercate tra le soluzioni stazionarie*, la seconda, discrimina tra queste quelle che effettivamente danno l'atteggiamento asintotico del moto.

4. *Impostazione del problema. Brevi richiami.* — Consideriamo un sistema planetario costituito da un numero qualunque  $N + 1$  di corpi celesti, aventi dunque *struttura qualunque*, sufficientemente inerti perchè l'energia cinetica del loro moto rigido, relativo al baricentro, non sia trascurabile per raffronto a quella del moto orbitale, sufficientemente estesi perchè risulti apprezzabile l'effetto correttivo, spettante a tale estensione, da apportare al potenziale calcolato, come d'ordinario, supponendo tutta la massa concentrata nei baricentri.

Per un moto qualunque, nei corpi suddetti avranno luogo azioni di natura dissipativa, lente ma incessanti, degradanti l'energia totale  $\mathcal{E}$ , somma di quella *cinetica* del moto dei baricentri (moto orbitale) e di quella del moto ad essi relativo, a quella posizionale che deriva dal campo di forza newtoniana.

Queste azioni dissipative porteranno, come abbiamo detto,  $\mathcal{E}$  ad un minimo subordinato all'invariante sussistere del *momento (vettoriale) totale delle quantità di moto*  $\vec{K}^*$ , dato iniziale ed immutabile del sistema.

Tale minimo va inteso, come si specifica al n. 3, non soltanto di fronte a tutte le possibili determinazioni dei vari parametri che figurano nelle equazioni del problema e nell'assegnato momento risultante (*costanti delle arce, coseni direttori* delle terne principali d'inerzia, *momenti delle quantità di moto ecc.*), ma anche di fronte ad ogni altra soluzione del problema stesso. Ciò richiede che sia incondizionatamente, se sfruttiamo l'integrale dell'energia  $\mathcal{H}^* = \mathcal{E}$ ,

$$[5] \quad \frac{\partial \left( \mathcal{H}^* + \sum_1^3 \omega_i K_i^* \right)}{\partial z} = 0 .$$

In queste equazioni, ben manifeste condizioni di *estremo*, le  $\omega_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) designano tre *moltiplicatori lagrangiani*,  $K_i^*$  le componenti del vettore *momento delle quantità di moto*  $\vec{K}^*$ ,  $z$  infine rappresenta una generica delle incognite del sistema differenziale (coppie canoniche) rispettivamente

tutti quei parametri che, conseguentemente alle azioni di cui si tratta, si debbono far concorrere al minimo, in conformità con le precisazioni fatte al n. 3.

5. *Conseguenze cosmogoniche desunte dalle* [5]. — Se si rende esplicita l'espressione di  $\mathcal{H}^*$  e  $\vec{K}^*$  spettante al problema dei tre corpi puntiformi le condizioni di stazionarietà [5] mettono subito in luce come moti asintotici le classiche *soluzioni triangolari* del LAGRANGE mentre, per  $\vec{K}^* = 0$ , salvo una preliminare *regolarizzazione secondo Sundmann e Levi-Civita*, fanno concludere per la collisione e la quiete finale.

Per gli  $N + 1$  corpi si mettono in evidenza *moti complanari su circonfereze percorse con ugual periodo di rivoluzione*.

Per i due corpi giroscopici con struttura rotonda, restano caratterizzati *moti su orbite circolari, con periodo di rotazione eguale a quello di rivoluzione e con l'asse minore dell'ellissoide di inerzia, coincidente con quello di rotazione, normale al piano dell'orbita*.

Infine, per gli  $N + 1$  corpi con ellissoide di inerzia a tre assi e con moto *precessionale iniziale* si ha il seguente risultato:

*I corpi celesti aventi struttura qualunque (sia agli effetti cinetici come a quelli della mutua attrazione) appartenenti ad un sistema planetario, soggetto a qualsivogliano azioni dissipative interne (isteresi, maree), tendono a portare i loro baricentri su una retta rotante con velocità uniforme attorno il baricentro comune, in un piano ben determinato dai dati iniziali (normale al momento  $\vec{K}^*$ ).*

*Su questa retta essi disporranno gli assi maggiori dei loro ellissoidi di inerzia, mentre quelli minori, attorno cui a loro volta roteranno (così da mostrarsi sempre la stessa faccia come fa la Luna alla Terra) si porranno ad essa normalmente.*

**Meccanica.** — *Un'importante precisazione analitica occorrente per una nuova teoria cosmogonica fondata sul problema degli  $N + 1$  corpi.* Nota di GIULIO KRALL, presentata <sup>(1)</sup> dall'Accademico FRANCESCO SEVERI.

In una Nota precedente ho richiamato, con qualche ulteriore precisazione, i risultati cosmogonici generali che ho raggiunti alcuni anni or sono, ricercando tra le *soluzioni stazionarie*, secondo ROUTH e LEVI-CIVITA, del problema degli  $N + 1$  corpi di dimensioni finite, quelle che potevano rappresentare uno *stato limite di minima energia* compatibile con l'invarianza del momento totale delle quantità di moto.

Questa ricerca, che va al di là di tutte le teorie cosmogoniche finora ancorate al problema dei 2 corpi, è stata istituita con una tacita premessa analitica che, per quanto possa sembrare spontanea, è opportuno precisare e giustificare. Si tratta sostanzialmente di ciò: Premessa l'esistenza di *azioni dissipative*, la ricerca del moto finale è fatta tra le *soluzioni stazionarie di equazioni dinamiche in cui quelle azioni non figurano* (non sono anzi in nessun modo precisate). Sono queste soluzioni stazionarie tali anche per il sistema differenziale effettivo, noto solo nei termini che preciseremo tra un momento ?

Orbene, si dimostra che alla domanda si può rispondere in senso affermativo e ritenere quindi conseguito quel completamento cui sopra ho alluso.

All'uopo, cominciamo a considerare un sistema differenziale normale

$$[1] \quad \frac{dx_i}{dt} = X_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

che potremo pensare rappresentativo del sistema planetario *privo* di azioni dissipative.

Sia

$$[2] \quad \frac{dx_i}{dt} = X_i + X'_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

---

<sup>(1)</sup> Nell'Adunanza del 12 aprile 1940-XVIII.

il sistema differenziale che sintetizza il moto in presenza delle azioni sudette, contemplate nelle  $X'_i$ , e che ci limitiamo a precisare nei termini seguenti.

Siano  $x_i = \bar{x}$  le soluzioni stazionarie di [1]; per esse risulta

$$[3] \quad X'_i(\bar{x}) = 0$$

cioè a dire, sussiste l'ovvia condizione che le azioni dissipative si annullano per le  $x = \bar{x}$ . Se valgono tali condizioni [3], le  $\bar{x}$  soluzioni di [1] saranno allora soluzioni anche di [2]. Ma per noi si richiede che esse risultino *soluzioni stazionarie* nel senso che l'energia totale del sistema abbia per il valore che compete alle  $\bar{x}$  un valore estremo.

Orbene, basta supporre che le azioni  $X'$  ammettano solo per valori prossimi alle  $\bar{x}$  — per le quali si annullano — una rappresentazione compendiosa con la *funzione dissipativa del Rayleigh* perchè il carattere di estremo che compete alle  $\bar{x}$  per le  $X' = 0$  si mantenga effettivamente, per un celebre teorema sulla stabilità in presenza di azioni dissipative dovuto a Lord KELVIN, anche con l'intervento di queste <sup>(1)</sup>.

Ma, come ebbe a rilevare il LEVI-CIVITA, si può vedere ciò senza introdurre la condizione [3] anche se essa è spontanea in quanto se le  $X'$  non si annullassero nello stato trovato, questo non potrebbe essere inteso come stato-limite.

Occorre però introdurre un'altra condizione, molto naturale del resto, che passo a precisare:

Si consideri infatti il sistema differenziale originario [1] e lo si scriva mettendo in evidenza un gruppo  $a_1, a_2, \dots, a_m$ ; di parametri che normalmente sono costanti (quegli stessi parametri cui si è alluso nei numeri precedenti, quindi momenti cinetici corrispondenti a coordinate cicliche, energia, angoli di direzione di assi di precessione ecc.); si ponga dunque

$$[4] \quad \frac{dx_i}{dt} = X_i(x | a_1, a_2, \dots, a_m).$$

Siano, per le  $a$  costanti,

$$x_i = \bar{x}_i(t | a_1, a_2, \dots, a_m)$$

soluzioni, comunque ricavate, sulle quali si fissa l'attenzione.

Orbene, si supponga che le  $a$  varino per cause qualsivogliano azioni dissipative, isteresi ecc.

Allora le  $\bar{x}$  non saranno più soluzioni di [4] in quanto si avrà in generale

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dx_i}{dt} \Big|_{x=\bar{x}} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \Big|_{x=\bar{x}} \frac{da_j}{dt} \neq X_i(\bar{x} | a).$$

<sup>(1)</sup> Confronta ad es. G. KRALL, *Meccanica Tecnica delle Vibrazioni*. Vol. I, Cap. IV, pagg. 211–212. Bologna, Zanichelli, 1940–XVIII.

Ma supponiamo che tali variazioni abbiano luogo *lentissimamente* in rispetto ai periodi del moto, cioè, come si suol dire con locuzione usuale in meccanica ergodica, siano *adiabatiche*.

Ciò vorrà dire che le derivate  $\dot{a} = \frac{da}{dt}$  si potranno ritenere infinitesime, cioè tali che

$$\frac{da}{dt} \ll \frac{dx}{dt}.$$

In queste circostanze il termine

$$\sum_i^m \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \bigg|_{r=\bar{r}} \cdot \frac{da_j}{dt}$$

è trascurabile e si può allora senz'altro affermare che le soluzioni del sistema originario sono soluzioni anche del sistema a parametri adiabaticamente variabili. Con ciò risulta legittimata la nostra ricerca delle soluzioni asintotiche dei sistemi dissipativi nell'ambito di quelle dei sistemi conservativi.

È così, direi definitivamente, conclusa una questione fondamentale della Cosmogonia, in quanto si è accertato che una *qualunque* correzione della legge della gravitazione, che implichi dissipazione d'energia, spiega largamente tutte le caratteristiche cinematiche dell'Universo, senza dover ricorrere a generalizzazioni arbitrarie di risultati desunti per sistemi binari di due soli corpi di cui al più uno solo ha dimensioni non trascurabili; ma considerando invece direttamente il problema generale degli  $N - 1$  corpi di dimensioni finite ed a struttura qualunque.

Resterebbe, è ben vero, da discutere il caso, che ha interesse puramente analitico, di un sistema planetario a momento delle quantità di moto  $\vec{K} = 0$ . Gravi difficoltà si presentano alla sua trattazione. Infatti, poichè la *condensazione generale* può dare effettivamente una soluzione possibile, analiticamente occorrerebbe la *regolarizzazione* preventiva del problema degli  $N + 1$  corpi *non* puntiformi. Ciò costituisce però certamente un problema impossibile, tenuto anche conto che l'estensione si rende sempre più sensibile con l'avvicinarsi dei corpi, cosicchè vien meno anche la schematizzazione che riconduce a considerare i soli *ellissoidi di inerzia* nella caratterizzazione delle forze di attrazione.

**Chimica.** — *Ricerche su chetoni pirrolici (1-metil-2,5-diacetilpirrolo, 1-metil-2-acetilpirrolo)* <sup>(1)</sup>. Nota di REGINALDO MANZONI ANSIDEI, presentata <sup>(2)</sup> dall'Accademico GIAN BATTISTA BONINO.

In precedenti lavori eseguiti in questo Istituto <sup>(3)</sup> si era dimostrato che il gruppo C=O degli acetilpirroli presentava nello spettro Raman un comportamento assai diverso a secondo che il gruppo CO·CH<sub>3</sub> era legato all'anello pirrolico in  $\alpha$  ovvero all'azoto dell'immino pirrolico. E cioè mentre la riga Raman del C=O chetonico nell'1-acetilpirrolo si osservava a 1715 cm<sup>-1</sup> in una posizione pressochè coincidente con quella nella quale appare la riga Raman del C=O nei chetoni alifatici (per esempio nell'acetone <sup>(4)</sup>) la corrispondente riga del 2-acetilpirrolo si presentava invece assai spostata verso le minori frequenze come se il C=O del 2-acetilpirrolo si trovasse in uno stato di perturbazione analogo per es. a quello del gruppo aldeidico della 2-pirrolaldeide <sup>(5)</sup> ovverosia anche del gruppo chetonico nell'ortoossiacetofenone <sup>(6)</sup> ecc.

Si poteva pensare che il C=O sostituito in  $\alpha$  al pirrolo risentisse una forte azione «chelativa» da parte dell'immino pirrolico, come il C=O dell'ortoossiacetofenone risente, per es., una forte perturbazione chelativa dovuta all'ossidrilile vicino <sup>(7)</sup>.

---

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica fisica ed Elettrochimica della R. Università di Bologna. Aprile 1940–XVIII.

<sup>(2)</sup> Nell'Adunanza del 12 aprile 1940–XVIII.

<sup>(3)</sup> BONINO, MANZONI ANSIDEI, PRATESI, «Z. Phys. Chem.», B. 22, 21 (1933).

BONINO, MANZONI ANSIDEI, PRATESI, «Z. Phys. Chem.», B. 25, 348 (1934).

BONINO, MANZONI ANSIDEI, «R. Acc. Lincei», 22, 349 (1935).

BONINO, MANZONI ANSIDEI, DINELLI, «R. Acc. Lincei», 22, 448 (1935).

BONINO, MANZONI ANSIDEI, «Ric. Scient.», 8, II, n. 3–4 (1937).

MANZONI ANSIDEI, «Ric. Scient.», 8, II, n. 3–4 (1937).

<sup>(4)</sup> KOHLRAUSCH, KÖPPL, «Z. Phys. Chem.», B. 24, 370 (1934).

<sup>(5)</sup> MANZONI ANSIDEI, «Ric. Scient.», 8, II, n. 3–4 (1937).

<sup>(6)</sup> BONINO, MANZONI ANSIDEI, M. ROLLA, «Ric. Scient.», 8, II, n. 5–6 (1937).

<sup>(7)</sup> BONINO, MANZONI ANSIDEI, M. ROLLA. Vedi notà <sup>(8)</sup>.



D'altra parte si era trovato che il 2.5-diacetilpirrolo (che possiede due gruppi  $C=O$  rappresentati ordinariamente come perfettamente simmetrici rispetto al nucleo pirrolico) mostrava invece due righe del gruppo  $C=O$  ambedue spostate verso le minori frequenze come se i detti gruppi del 2.5-diacetilpirrolo fossero bensì perturbati ma ciascuno in misura nettamente diversa.

Quest'ultima esperienza si poteva spiegare supponendo che una prima perturbazione dei gruppi  $C=O$  fosse dovuta alla nuvola di carica « aromatica » del nucleo pirrolico agente ugualmente su ambedue i gruppi carbonilici. Questa ipotetica perturbazione poteva trovare sperimentalmente un riscontro nell'analogo spostamento della riga del  $C-O$  chetonico nell'acetofenone <sup>(1)</sup> per effetto della nuvola di carica del nucleo fenilico. Si poteva poi supporre che nel 2.5-diacetilpirrolo su uno dei due gruppi chetonici già perturbati nel modo sopradetto agisse l'immino pirrolico determinando una ulteriore azione « chelativa » causa della differenza di comportamento tra i due  $C=O$  stessi.

Onde chiarire meglio questi fatti ho pensato di studiare analoghi chetoni pirrolici i quali fossero però metilati all'azoto.

Le ricerche eseguite sulle metossibenzaldeidi in confronto con le ossibenzaldeidi <sup>(2)</sup> mi avevano dimostrato che sostituendo l'idrogeno ossidrilico con un metile l'azione « chelativa » scompariva. Studiando perciò il 2.5-diacetilpirrolo metilato all'azoto si sarebbe potuto o meno confermare se le due differenti righe del  $C=O$  sovra ricordate fossero da imputarsi all'intervento di una azione chelativa dell'immino pirrolico.

#### PARTE SPERIMENTALE.

*1-metil-2-acetilpirrolo.* — Ho preparato questo composto secondo il metodo di CIAMICIAN e DENNSTED <sup>(3)</sup> scaldando l'*N*-metilpirrolo con anidride acetica. Avevo antecedentemente ottenuto l'*N*-metilpirrolo da joduro di metile e pirrolo potassico secondo il metodo di HESS e WISSING <sup>(4)</sup>. Liquido incolore, p. b. 68°-70° a 12 mm. di pressione.

*1-metil-2.5-diacetilpirrolo.* — Ho preparato questo derivato diacetilico per metilazione del 2.5-diacetilpirrolo con solfato di dimetile in presenza di liscivia di potassa secondo il metodo di E. FISCHER <sup>(5)</sup> p. f. 133°-134°.

<sup>(1)</sup> KOHLRAUSCH, PONGRATZ, « Wien. Ber. », 143, 288 (1934).

<sup>(2)</sup> KOHLRAUSCH, KAOHVEC, « Z. Phys. Chem. », B. 38, 119 (1937).

MANZONI ANSIDEI, « Boll. Scient. Chim. Ind. Bologna », 1, 71 (1937).

<sup>(3)</sup> CIAMICIAN, DENNSTED, « Ber. », 17, 2952 (1884).

<sup>(4)</sup> HESS, WISSING, « Ber. », 47, 1422 (1914).

<sup>(5)</sup> E. FISCHER, « Ber. », 46, 2507 (1913).

Tutti questi composti sono stati purificati per distillazione nel vuoto, lo spettro Raman dell'1-acetil-2.5-diacetilpirrolo è stato ottenuto sulla sostanza disciolta in cloroformio.

*1-metil-2-acetilpirrolo.* —  $\Delta\nu$ : 3122 (2 dif); 3014 ( $1/2$ ); 2922 (1); 1642 (5 dif) (e, f); 1522 (0); 1477 ( $1/2$ ); 1401 (8) (e, f); 1319 (1); 1244 ( $1/2$ ); 1227 ( $1/2$ ); 1155 ( $1/2$ ); 1096 (1); 1060 (1); 1021 (1); 943 (2); 928 (0); 884 (1); 812 ( $1/2$ ); 747 (0); 701 (3); 662 (0); 630 (0); 495 ( $1/2$ ); 420 ( $1/2$ ); 333 (0); 217 ( $1/2$ ); 182 ( $1/2$ ).

*1-metil-2.5-diacetilpirrolo.* —  $\Delta\nu$ : 3136 (0); 3027 (2 dif); 2931 (1 dif); 1672 (4); 1651 (2); 1507 ( $1/2$ ); 1475 (5); 1442 (5); 1391 (2); 1356 (0); 1218 (2); 1050 (1); 974 ( $1/2$ ); 944 (2); 714 ( $1/2$ ); 644 (0).

#### DISCUSSIONE DEI RISULTATI.

Nella tabella seguente riporto per la zona dello spettro Raman fra 1350–1750 quanto  $\text{cm}^{-1}$  i risultati ottenuti per alcuni carbonil derivati del pirrolo che hanno particolare interesse per questa discussione.

TABELLA I.

*Frequenze Raman tra 1350–1750  $\text{cm}^{-1}$ .*

|                                        |               |          |               |               |               |          |          |          |          |
|----------------------------------------|---------------|----------|---------------|---------------|---------------|----------|----------|----------|----------|
| 2-pirrolaldeide . .                    | 1353 (7)      | 1403 (3) | —             | —             | 1552 (0)      | 1647 (6) | —        | —        | 1718(00) |
| 1-acetilpirrolo . .                    | 1372( $1/2$ ) | 1400 (3) | 1422( $1/2$ ) | 1465( $1/2$ ) | —             | —        | —        | —        | 1715 (6) |
| 2-acetilpirrolo . .                    | 1367 (2)      | 1406 (4) | —             | —             | —             | 1636 (5) | —        | —        | —        |
| 1-metil-2-acetil-<br>pirrolo . . . . . | —             | 1401 (8) | —             | 1477( $1/2$ ) | 1522 (0)      | 1642 (5) | —        | —        | —        |
| 2.5-diacetil-pir-<br>rolo . . . . .    | 1359 (1)      | 1405 (2) | —             | 1485 (2)      | —             | —        | 1663 (1) | 1677 (2) | —        |
| 1-metil-2.5-dia-<br>cetilpirrolo . .   | 1356 (0)      | 1391 (2) | 1442 (5)      | 1475 (5)      | 1507( $1/2$ ) | —        | 1651 (2) | 1672 (4) | —        |

L'esame della tabella I ci mostra frattanto che la riga caratteristica del C=O nell'1-metil-2-acetilpirrolo cade a  $1642 \text{ cm}^{-1}$  e cioè in una posizione che rivela una forte perturbazione del gruppo C=O per quanto tale perturbazione appaia meno intensa che non nel 2-acetilpirrolo libero all'azoto.

Contrariamente a quello che si sarebbe potuto dedurre da considerazioni di indole elementare, nel 2.5-diacetilpirrolo metilato all'azoto compaiono invece ancora due righe del gruppo  $C=O$  corrispondenti ambedue a gruppi  $C=O$  perturbati.

Cade dunque l'ipotesi che le due righe del  $C=O$  dei diacetilpirroli simmetrici (2.5-) prendano origine dal fatto che uno dei due gruppi  $C=O$  sia impegnato in un'azione « chelativa » con l'immino pirrolico. Anzi le due righe del  $C=O$  dell'1-metil-2.5-diacetilpirrolo oltre a mostrarsi ancora nettamente distinte sono ambedue leggermente spostate verso le minori frequenze rispetto alle righe del dichetone libero all'azoto.

Questi risultati mostrano come occorra ricercare in altre possibili cause quelle ragioni di perturbazione dei gruppi chetonici ed aldeidici sostituiti in  $\alpha$ ,  $\alpha'$  al pirrolo e che in un primo esame era facile attribuire soltanto ad una « chelazione » dissimmetrica coll'immino pirrolico. Così potrebbe esser presa in considerazione l'idea di una iperconiugazione (v. a tale proposito MULLIKEN <sup>(1)</sup>), a cui prenda parte il gruppo metilico legato all'N pirrolico, ovvero di una possibile « chelazione » rispetto al  $C-H$  pirrolico in  $\beta$ . Altre ricerche sono perciò in corso su questo argomento.

Ringrazio il professor G. B. BONINO per l'interesse dimostrato per questa mia ricerca.

---

(<sup>1</sup>) MULLIKEN, « J. Chem. Phys. », 7, 339, (1939).

**Petrografia.** — *Studi petrografici sul Massiccio del Monte Bianco. Il granito* <sup>(1)</sup>. Nota preliminare di EDOARDO SANERO, presentata <sup>(2)</sup> da S. E. FEDERICO MILLOSEVICH.

Ultimato lo studio delle formazioni granitiche e porfiriche del Monte Chetif <sup>(3)</sup> ho ritenuto opportuno estendere le mie ricerche alle finitime formazioni eruttive similari dal versante italiano del Monte Bianco. Fui a ciò indotto da ragioni di indole varia, fra cui non ultima quella che effettivamente uno studio geologico-petrografico dettagliato, moderno su queste formazioni non esiste, poichè le nostre conoscenze al riguardo sono ancora quelle forniteci da Duparc e Mrazec <sup>(4)</sup> oltre una quarantina di anni fa, riferentesi prevalentemente al versante francese e a quello svizzero. D'altra parte il legame genetico, già da me <sup>(5)</sup> messo in evidenza, fra le formazioni eruttive del Monte Chetif e quelle del Monte Bianco, appartenenti allo stesso ciclo magmatico ercinico, mi invogliò ad affrontare questo studio, non scevro di parecchie difficoltà, trattandosi di una zona piuttosto elevata e non percorribile per gran parte dell'anno.

Nell'estate scorsa ho perciò intrapreso una serie di escursioni intese a studiare dettagliatamente le formazioni eruttive in parola ed a procurarmi il materiale occorrente per le ricerche chimico-petrografiche di laboratorio.

La zona fatta oggetto delle mie prime osservazioni sul terreno è essenzialmente quella limitata a sud e sud-ovest dal Ghiacciaio della

---

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito negli Istituti di Mineralogia e Petrografia delle Regie Università di Torino e di Cagliari. Le ricerche condotte sul terreno furono compiute col contributo finanziario del Comitato per la Geologia del Consiglio Nazionale delle Ricerche, concesso all'Istituto di Mineralogia e Petrografia della R. Università di Torino, per un programma di studi nelle Alpi Occidentali.

<sup>(2)</sup> Nell'Adunanza del 12 aprile 1940-XVIII.

<sup>(3)</sup> E. SANERO, *Studi petrografici sulle formazioni granitiche e porfiriche del Monte Chetif (Valle d'Aosta)*. « Periodico di Mineralogia », n. 2, 1938-XVII, pag. 161.

<sup>(4)</sup> L. DUPARC et L. MRAZEC, *Recherches géologiques et pétrographiques sur le Massif du Mont Blanc*. « Mémoires de la Société de physique et d'histoire naturelle de Genève », vol. XXXIII, n. 1. Genève, 1898.

<sup>(5)</sup> E. SANERO, loc. cit.

Brenva, a nord dallo spartiacque della Catena dal Monte Mandit al Dente del Gigante ed a est e nord-est dal Ghiacciaio di Rochefort e dal vallone sottostante.

Dai risultati di queste osservazioni e dell'esame preliminare dell'abbondante materiale raccolto, appare evidente che le formazioni eruttive del Monte Bianco sono piuttosto complesse; lo studio completo dell'intero versante italiano richiederà ancora ulteriori ricognizioni sul terreno e successivamente un notevole periodo di tempo per le ricerche di laboratorio. Per questi motivi mi sono deciso a pubblicare ora la presente Nota di carattere puramente preliminare, avente per iscopo di riferire in modo affatto succinto i risultati delle osservazioni di carattere chimico-petrografico relativi alla facies più comune del granito della zona oggetto di studio, noto nella letteratura geologico-petrografica col nome di « proto-gino ».

\* \* \*

La facies più comune del granito, che affiora per notevole estensione a valle dei ghiacciai di Toula e d'Entrève, è quella a grossi elementi feldspatici (di qualche centimetro di diametro) bianchi che spiccano nella roccia di colore grigio verdastro, determinando una struttura porfiroide.

Macroscopicamente oltre agli individui feldspatici sopraccennati si nota in quantità notevole il quarzo in granuli e, nettamente subordinata ai componenti sialici, la biotite.

L'esame microscopico svela ancora la struttura porfiroide determinata dalla presenza di grossi cristalli di feldspato idiomorfi, sparsi entro la massa a struttura granitoide normale, con accenni qua e là a struttura cataclastica, che si manifesta in frequenti casi di frattura e rinsaldatura degli individui di quarzo.

I componenti essenziali sono: quarzo, feldspato potassico, plagioclasio, biotite; accessori: muscovite, orneblenda, ortite, apatite e zircone.

Il quarzo, in granuli irregolari, è un componente abbondante della nostra roccia; presenta molto spesso evidenti fenomeni cataclastici, talvolta già visibili a luce naturale e in ogni caso riconoscibili per l'estinzione ondulosa degli individui deformati. Include talvolta laminette di muscovite. Si notano inoltre sciami, e, più raramente, file delle solite minutissime inclusioni goccioliformi, probabilmente liquide.

Il feldspato potassico, generalmente fresco, è rappresentato tanto dall'ortoclasio quanto dal microclino, nonchè dall'associazione microperititica ortoclasio-plagioclasio. Fra questi i più frequenti sono la microperitite e il microclino.

Il plagioclasio, pur esso in quantità notevole, appare torbido, spesso profondamente alterato; è sovente geminato secondo la legge dell'albite, più raramente secondo la legge albite-pericline. Negli individui in cui

sono ancora ben visibili le lamelle di geminazione ho potuto determinare, con l'impiego del piatto di FEDOROW, l'angolo degli assi ottici che risultò:

$$+ 2V = 81^{\circ}.$$

L'estinzione nella zona simmetrica, determinata ancora mediante il piatto di FEDOROW, raggiungendo il massimo, ha dato:

$$\varphi = -12^{\circ},$$

a cui corrisponde nel diagramma di BERECK<sup>(1)</sup> un plagioclasio della composizione  $Ab_{92}An_8$  che è in ottimo accordo con quella  $Ab_{91}An_9$  che si calcola dal valore  $+ 2V = 81^{\circ}$ , testè determinato.

Il plagioclasio, come dianzi accennai, è sovente profondamente alterato, con formazione di aggregati micacei, costituiti da squamette estremamente piccole e non risolvibili neanche a forti ingrandimenti.

La biotite, in lamine mediamente grandi, a contorni irregolari, con colore carico e pleocroismo intenso dal giallo chiaro, verdolino a bruno rossastro, a luce convergente si rivela debolmente biassica. Sovente appare parzialmente cloritizzata, più raramente trasformata in epidoto di tipo pistacitico.

La muscovite è estremamente più scarsa della biotite; rarissima soprattutto quella originaria, in laminette di dimensioni esigue, inclusa generalmente nel quarzo.

L'orneblenda, che in alcuni casi manca affatto, mentre in altri è presente, ma in quantità sempre piuttosto esigua, possiede i soliti caratteri dell'orneblenda verde.

L'ortite, in prismetti a contorni perfetti, è piuttosto rara, e la si identifica con una certa facilità e sicurezza, per l'insieme dei suoi caratteri e specialmente per il marcatissimo e tipico pleocroismo:  $\alpha$  = giallo bruno,  $\beta$  = castagno, bruno rossiccio,  $\gamma$  = bruno seppia.

L'apatite in prismetti e lo zircone in granuli, inclusi nei componenti essenziali della roccia e specialmente nella biotite, sono piuttosto rari. Gli individui di zircone inclusi nella biotite presentano quasi sempre ampie e nette aureole policriche.

La composizione mineralogica quantitativa, determinata per mezzo del tavolino integratore, è risultata la seguente:

|                               |      |
|-------------------------------|------|
| Quarzo . . . . .              | 33 % |
| Feldspato potassico . . . . . | 21 » |
| Plagioclasio . . . . .        | 36 » |
| Biotite . . . . .             | 9 »  |
| Accessori . . . . .           | 1 »  |

<sup>(1)</sup> M. BEREK, *Mikroskopische Mineralbestimmung mit Hilfe der Universal-drehtischmethoden*. Berlin, 1924.

L'analisi chimica della roccia ha dato i seguenti risultati:

|                                |        |       |
|--------------------------------|--------|-------|
| SiO <sub>2</sub>               | 72,14  | 1,201 |
| TiO <sub>2</sub>               | 0,27   | 0,003 |
| ZrO <sub>2</sub>               | 0,03   | —     |
| Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> | 14,57  | 0,143 |
| Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub> | 0,88   | 0,006 |
| FeO                            | 1,12   | 0,016 |
| MnO                            | 0,02   | —     |
| MgO                            | 0,81   | 0,020 |
| CaO                            | 1,23   | 0,022 |
| SrO                            | tracce | —     |
| BaO                            | tracce | —     |
| K <sub>2</sub> O               | 4,61   | 0,049 |
| Na <sub>2</sub> O              | 3,60   | 0,058 |
| H <sub>2</sub> O —             | 0,05   |       |
| H <sub>2</sub> O +             | 0,72   |       |
| P <sub>2</sub> O <sub>5</sub>  | 0,05   |       |
| S                              | 0,01   |       |
| Somma                          | 100,11 |       |

Da questi dati analitici, per la rappresentazione diagrammatica di Niggli, si calcolano i seguenti valori:

$$\begin{array}{lll}
 \text{si} = 375,4 & \text{al} = 44,7 & \\
 \text{ti} = 0,9 & \text{fm} = 15,0 & \text{k} = 0,45 \\
 & \text{c} = 6,9 & \text{mg} = 0,42 \\
 & \text{alk} = 33,4 & \text{c/fm} = 0,46
 \end{array}$$

Non è mia intenzione, dato il carattere preliminare di questa Nota, di entrare qui a discutere il chimismo della formazione granitica del Monte Bianco, per eventuali confronti con altre similari delle Alpi Occidentali (granito del Monte Chetif, granito della zona del Canavese, granito di Baveno ecc.) il che sarà fattibile solo quando, continuando le ricerche, sarò in possesso di un maggior numero di osservazioni e di dati sperimentali. Mi limito perciò per ora ad osservare che i valori calcolati per la rappresentazione diagrammatica di Niggli soddisfano assai bene alle condizioni volute dai magmi leucogranitici di tipo engadinitico, pur senza essere lontani dai valori richiesti dai magmi granitici di tipo yosemitico<sup>(1)</sup>.

<sup>(1)</sup> P. NIGGLI, *Die Magmentypen*. « Schweiz. Min. und Petrogr. Mitt. », Bd. XVI, Heft 2, pag. 335. Zurich, 1936.



**Fisiologia.** — *Metodo per l'esame funzionale degli organi di senso dell'orecchio interno (labirinto acustico e non acustico).* Nota <sup>(1)</sup> di SILVESTRO BAGLIONI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

È basato sull'eccitamento provocato dalla stimolazione di sorgenti sonore pure ottenute mediante la percussione di un rebbio di diapason metallici di frequenza e intensità variabili, applicati col loro stelo, munito di adatto stilo-sonda, a punta stigmatica rotonda, su determinate zone cutanee della regione temporale adiacenti al meato uditivo. La propagazione dell'energia sonora agli organi di senso dell'orecchio interno avviene per la cosiddetta trasmissione ossea.

I diapason sono quelli della serie di EDELMANN, che permettono una serie graduale di toni che vanno dagli stimoli subsonori della frequenza di 16 cicli (v. d. o Hz), gradatamente (mercè una suddivisione degli intervalli originali dei semitoni) di ciclo in ciclo ai toni sonori, sempre più alti sino alla frequenza di 880 Hz (la<sup>4</sup>).

Le zone cutanee più adatte ad essere eccitate sono due:

I) la zona situata immediatamente dinanzi al trago, in corrispondenza del solco formato dal rilievo del trago e dell'apofisi articolare del mascellare inferiore;

II) la zona situata posteriormente al padiglione allo stesso livello della zona I, sul rilievo osseo della porzione superiore della mastoide.

I caratteri degli eccitamenti (sensazioni) che si avvertono per gli stimoli portati sulla zona I sono nettamente diversi da quelli degli eccitamenti che si avvertono per uguali stimoli portati sulla zona II.

1. — I caratteri degli eccitamenti della prima zona si possono essenzialmente così descrivere.

Questa zona è quella che meglio trasmette, tra tutte le zone adiacenti all'adito uditivo, gli stimoli sonori, ossia, è più sensibile a tali ecci-

---

<sup>(1)</sup> Presentata nell'Adunanza del 21 marzo 1940-XVIII.

tamenti. La maggior sensibilità consiste nel fatto che la soglia di ampiezza (o intensità) delle vibrazioni, ossia della energia sonora, è la più bassa, in confronto di altre zone (ad eccezione forse delle zone interne del condotto uditivo esterno, che debbono però essere ulteriormente esplorate). Per stabilire questo carattere ho misurato il tempo in secondi di durata dell'eccitamento dall'inizio dell'applicazione dello stimolo, che segue alla percussione del rebbio e che quindi ha massima intensità, sino alla scomparsa della sensazione, che si va attenuando sempre più col decrescere dell'ampiezza delle vibrazioni. Per fissare possibilmente in un modo esatto il grado dell'intensità delle vibrazioni, è servito il metodo di GRADENIGO, che consiste nel fissare sulla zona estrema del rebbio un triangolo nero disegnato su carta suddiviso ai lati da indici equidistanti.

Gli eccitamenti sonori provocati dagli stimoli applicati su questa zona di ipersensibilità - o meglio massima eccitabilità - in funzione delle frequenze, seguono la nota legge della curva della sensibilità acustica, basata sui risultati degli eccitamenti per via aerea (timpanossiculare), pel fatto che mano mano che si sale dalle frequenze più basse a quelle più alte della nostra serie di diapason l'eccitamento o sensazione sonora diviene più intensa e duratura. Ulteriori ricerche dimostreranno se effettivamente le due curve ottenute per trasmissione ossea o per via aerea (timpanossiculare) coincidano perfettamente.

2. - I caratteri degli eccitamenti della seconda zona differiscono da quelli della prima zona per i seguenti fatti.

a) Gli stimoli sonori che applicati sulla prima zona provocano massimo eccitamento, applicati su questa seconda zona provocano eccitamenti molto meno intensi e meno duraturi, quando le frequenze vanno aumentando da circa 100 vd, e nel senso che quanto più esse salgono sino a 880 vd (che rappresenta il limite superiore della serie dei diapason usata) tanto meno sensibile diviene questa zona. Se pertanto si dovesse stabilire la curva caratteristica della eccitabilità acustica, basandosi sui risultati di questi eccitamenti si avrebbe un diagramma essenzialmente diverso di quello noto sulla base degli eccitamenti sonori per via aerea e per via ossea della prima zona.

b) Questa seconda zona ha però invece particolare massima sensibilità per stimoli di frequenze più basse. Per la frequenza di circa 100 vd (questo limite è forse variabile secondo i vari individui, come sarà più esattamente stabilito da ulteriori ricerche), l'intensità e la durata della reazione sensitiva è presso a poco uguale per le due zone. Ma notevole differenza si ha nel carattere complessivo dell'eccitamento per le due zone: mentre cioè per la zona I (anteriore) prevale il carattere della sensazione sonora, per la seconda si avverte un nuovo carattere di vibrazione meccanica, che produce un frastuono o stordimento sgradevole. Scendendo a frequenze

sempre più basse, l'eccitamento della zona seconda diventa sempre più intenso e duraturo, in confronto di quello della zona anteriore, assumendo però sempre più evidente il carattere sgradevole dello stordimento che giunge sino alla vertigine e (in alcune persone particolarmente sensibili, specialmente donne) alla nausea e al vomito, specialmente quando si stimola con frequenze molto basse (25, 16 vd). Tali reazioni si osservano anche se lo stelo del diapason è posto sulla cute di altre regioni del capo (ad esempio vertice del cranio e altre); in ogni caso però la zona più sensibile è sempre quella indicata da me come seconda. ●

Riassumendo i risultati, si può dire che esistono due particolari zone che sono dotate di due distinte sensibilità massime ai diversi stimoli vibratorii:

I) La zona che corrisponde alla regione situata anteriormente al meato uditivo, in corrispondenza del solco formato dal rilievo dell'impianto del trago e del capo articolare del mascellare inferiore, che si può indicare *zona di ipersensibilità* (massima sensibilità) *per stimoli sonori o acustici* applicati direttamente e che, quindi, si trasmettono per la cosiddetta via ossea all'organo di senso cocleare dell'udito. L'ipersensibilità acustica caratteristica di questa zona può essere anche dimostrata mediante un semplice auto-esperimento: strisciando lievemente col polpastrello dell'indice (o mediante un qualsiasi altro analogo corpo ottuso) sulla regione cutanea che si trova innanzi il padiglione, cominciando dall'alto della tempia fino in basso all'orlo della mascella inferiore, in senso verticale, è facile riconoscere che il rumore di striscio è avvertito dall'udito, in grado massimo, quando si passa sopra la detta zona.

II) La seconda zona che corrisponde allo stesso livello della prima, ma posteriormente al padiglione, sul rilievo della regione superiore dell'apofisi mastoidea, che si può indicare *zona di ipersensibilità* (massima sensibilità) *per stimoli vibratorii di bassa frequenza* (sotto 100 vd), ha invece la proprietà di reagire con eccitamenti di carattere differente, a fondo sgradevole, di frastuono o stordimento, che può giungere sino alla vertigine e alla nausea, e che per tali caratteri ricordano gli abnormi eccitamenti degli organi di senso del labirinto non acustico (macule e creste dell'otricolo, sacculo e canali semicircolari), i quali secondo le moderne dottrine reagiscono a stimoli meccanici provenienti dagli atteggiamenti statici e dinamici del capo e del corpo, costituendo essi la sede del senso cinestesico speciale.

Il meccanismo di azione degli stimoli vibratorii (sonori e oscillatori) secondo l'ordine delle frequenze, applicati col metodo suddescritto direttamente sulle dette due zone e trasmessi per la cosiddetta via ossea, può essere interpretato tenendo conto del modo della propagazione fisica delle vibrazioni e della posizione anatomica (topografica) dei due organi di senso dell'orecchio interno.

Per ciò che riguarda la natura e il modo della propagazione o trasmissione fisica delle vibrazioni per via ossea (indipendentemente dalla oggi tanto discussa questione dei fattori fisici che la determinano), si può ammettere che dalla zona immediatamente stimolata si irradi l'energia sonora o vibratoria, penetrando nei tessuti viventi, verso tutte le direzioni come in una massa liquida, con intensità decrescente secondo il quadrato del raggio della distanza dalla zona direttamente eccitata.

Poichè l'organo cocleare è situato nella regione della rocca petrosa che corrisponde alla zona anteriore, ossia in massima vicinanza alla re-



Fig. 1. — Rappresenta schematicamente la regione dell'orecchio esterno di destra.

1. Zona anteriore ipersensibile agli stimoli sonori;
2. Zona posteriore ipersensibile agli stimoli vibratorii di bassa frequenza.

È disegnata la posizione, nella rocca petrosa, degli organi di senso (coclea e labirinto non acustico) in rapporto topografico colle regioni cutanee.

gione cutanea che trovasi nel solco formato dal rilievo dell'attacco del trago e del capo articolare dell'osso mascellare inferiore (zona di ipersensibilità acustica), mentre il labirinto non acustico trovasi invece in corrispondenza della regione posteriore dell'orecchio esterno (come vedesi nella figura schematica annessa), mi par facile spiegare il particolare comportamento di queste due zone, di essere cioè la prima particolarmente adatta per la stimolazione e quindi anche per l'esame funzionale dell'organo di senso cocleare dell'udito, e la seconda (zona d'ipersensibilità labirintica) per la stimolazione artificiale e quindi anche per l'esame funzionale degli

organi di senso del labirinto non acustico, il quale, pertanto, avrebbe la proprietà di reagire anche a tal forma di energia meccanica vibratoria di basse frequenze, subsonore e infrasonore.

Ulteriori più dettagliate e sistematiche ricerche su persone normali, come su persone che abbiano lesioni funzionali patologiche di questi due organi di senso dell'orecchio interno, stabiliranno la portata scientifica e pratica che compete a questo metodo di esame funzionale dei due organi di senso dell'orecchio interno.

**Biologia.** — *Moderni aspetti e orientamenti della citogenetica.* Nota <sup>(1)</sup> di GUSTAVO BRUNELLI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

PARTE I.

*La diplospirofase fase normale della divisione cariocinetica.*

Per quanto il processo cariocinetico sia stato da tempo schematizzato, esso in base alle ricerche di questi ultimi decenni deve essere sottoposto a revisione.

Fino a pochi anni addietro si seguitava a leggere nei trattati e si ripeteva dalle cattedre, come naturale conseguenza di ciò che nei trattati si affermava e si divulgava, che nel nucleo in riposo vi è un reticolo, che da esso si origina lo spirema, che questo si segmenta trasversalmente nella profase, e che poi ciascun segmento si suddivide longitudinalmente per costituire i cromosomi sdoppiati metafasici.

In una nostra Memoria <sup>(2)</sup> nel 1910, estendendo le idee di VAN BENEDEN, RABL e BOVERI abbiamo dato tutta un'altra spiegazione del procedimento del fenomeno cariocinetico. Affermavamo infatti che non vi è neanche nella telofase delle divisioni somatiche un vero reticolo, e tanto meno poi un vero spirema profasico, che ogni cromosoma persiste come una individualità a sè, e che forma dei segmenti ritorti a spirale, che ciascun cromosoma mostra già nell'anafase una fenditura longitudinale, che è poi quella che riappare nella profase seguente (scissione longitudinale precoce), che è accompagnata da una distorsione e condensazione dei cromosomi a spirale.

Supponevamo anche che tale procedimento sia generale ed esteso ai due regni dei viventi.

Il reticolo comunque è una vera illusione, già per GREGOIRE sarebbe un *réseau des réseaux*. Anche chi voglia ammettere che in certi casi non

---

<sup>(1)</sup> Presentata nell'Adunanza del 12 aprile 1940-XVIII.

<sup>(2)</sup> BRUNELLI G., *Sulla ricostituzione del nucleo*. « Rendiconti R. Accademia dei Lincei », vol. XIX, 1910.

vi sia continuità nei cromosomi da una divisione all'altra, deve concedere a maggior ragione che i cromosomi si riedifichino come delle individualità indipendenti (unità tattiche di FICK), senza previa formazione di uno spirema.

D'altra parte, comunque noi concepiamo i fenomeni cariocinetici dal punto di vista dinamico, ci sembra più assurdo ammettere che una segmentazione dello spirema (determinata da quali forze?) abbia luogo nel nucleo che sorte appena dalla fase di riposo; così ammettendo, come da molti si suppone, che nella cariocinesi intervengano fenomeni elettrici, il carattere della bipolarità sarebbe certamente più evidente nella metafase e nella anafase che non nell'inizio dello stadio profasico. Nè vediamo una ragione qualsiasi per ritenere necessaria la saldatura per i capi dei cromosomi telofasici, anche dal punto di vista della presunta azione di particolari fenomeni fisici.

Tutto ciò abbiamo chiaramente indicato nel processo della spermatogenesi o meglio nelle divisioni spermatogoniali, che poi si comportano in sostanza come quelle delle ordinarie mitosi somatiche.

Questo è stato poi controllato nelle piante (DIGBY, FRASER e SNELL) quasi contemporaneamente alle nostre ricerche. Significative al riguardo sono le parole di ROBERTSON, il quale ha voluto sincerarsi della verità di queste affermazioni, e ha concluso con noi che questo è il normale procedimento della profase. Anche SCHUWETOW ha confermato in seguito nei vegetali le mie ricerche, come ROBERTSON negli insetti.

Larga diffusione hanno poi avuto queste idee dopo le ricerche simili di DEHORNE e di BOLLES LÉE, che ha indicato col nome di spirofase<sup>(1)</sup> il procedimento da noi contrapposto allo schema di FLEMMING, che per il vecchio tradizionalismo scientifico si seguì per molti anni a esporre nei trattati e a insegnare, schematizzando il processo cariocinetico come in verità non si compie.

È importante notare che il nuovo modo di riguardare la profase (con duplicità iniziale dei segmenti spirematici e loro indipendenza) è stato inizialmente scoperto negli Ortoteri, negli Anfibii e nei vegetali, ossia proprio dove le figure nucleari sono più chiare, mentre naturalmente non si prestano a questo studio molti altri organismi.

I nuovi studi confermano e allargano le vedute di RABL circa la individualità cromosomica e l'analogo ordinamento dei cromosomi telofasici e profasici. Specialmente negli Ortoteri si può seguire ogni cromosoma in una vescicola (cariomero), come ho fatto io e più tardi WENRICH. Vi

---

(<sup>1</sup>) BOLLES LÉE ha introdotto il termine di spirofase, egli però non ammette la duplicità delle spirali cromosomiche da me sostenuta e più tardi ammessa da altri autori.



sono, secondo me, diversi gradi intermedi tra il persistere dei cromosomi, secondo la teoria di RABL e di BOVERI, e l'*Achromatinerhaltungshypothese*, secondo le quali i cromosomi si riedificano da determinati territori del plasma.

Come ogni cromosoma si riedifichi come una unità indipendente è ormai chiaro sino all'evidenza. D'altra parte anche quando dai cromosomi telofasici si formano dei cariomeri (FOL), la scissione profasica riappare, nella riedificazione dei cromosomi, coll'identico aspetto della precedente scissione anafasica (BRUNELLI in *Gryllus*). Debbo anzi notare al riguardo che assai chiare sono le mie figure, circa la scissione anafasica dei cromosomi degli Ortotteri, in cui questi elementi si presentano straordinariamente grandi e mostrano una individualità accompagnata da una duplicità (come effetto della scissione longitudinale) dalla telofase alla profase. Colla nostra teoria si accorda la presenza di procromosomi (OVERTON) di doppia struttura, nelle cinesi così maturative che somatiche (STRASBURGER) e la precocità della scissione profasica segnalata già da BRAUER. Questo modo di comportarsi dei cromosomi nella profase ormai è ammesso, sempre più si afferma e cominciò con AGAR ad apparire nei trattati.

Questa doppia iniziale struttura profasica a sua volta ha messo in dubbio e per noi ha abbattuto definitivamente l'ipotesi della sinapsi (nello stadio goniale che così si denomina e dovuto essenzialmente a fenomeni osmotici) come copulazione parallela, sulla quale già nel 1905 FARMER e MOORE e MEVES nel 1908 avevano espresso dei dubbi, senza negare come io ho ammesso che una coniugazione dei cromosomi (nel senso riduzionale) avvenga nella diacinesi della prima divisione maturativa, come ho dimostrato negli Ortotteri.

Questa ipotesi della struttura spirale dei cromosomi come fenomeno normale delle cariocinesi anche somatiche per le ricerche specialmente dei botanici, ma anche degli zoologi, è ormai generalmente ammessa. Così il DARLINGTON nella sua opera sui recenti progressi della citologia (*Recent advances in Cytology*, Lond 2 Edit) ammette senz'altro questa struttura spirale, che serve di base a molte discussioni <sup>(1)</sup>.

Vi è soltanto una divergenza tra gli autori nell'ammettere o nel negare la duplicità della spirale, ma quest'ultimo punto di vista da noi da tanti anni sostenuto, è quello che tende ad affermarsi. Basta ricordare la recente interessante memoria di GATES <sup>(2)</sup>.

---

<sup>(1)</sup> Naturalmente vi può essere qualche caso di cromosomi eccezionalmente corti che non mostrano una evidente struttura spirale, ma queste si debbono riguardare come rare eccezioni, che non infirmano la regola.

<sup>(2)</sup> R. GATES, *The structure of the Chromosome*. « Journal of the Royal microscopical Society », 1938, vol. 58.

Come dice il GATES la duplicità della spirale cromosomica mette in dubbio molte delle teorie sulla meiosi e la mitosi, ma questo è caratteristico dei progressi della citologia.

Per il momento non vogliamo entrare nella discussione impostata da GATES se varie apparenze di cromosomi debbano invece interpretarsi come pieghe dei cromosomi, questo naturalmente richiede ulteriori ricerche, quello che è fuori di dubbio è la duplicità della spirale cromosomica anche nelle cinesi somatiche.

Naturalmente tranne nobili eccezioni, gli scienziati stranieri (ormai sono pochi i coscenziosi della bibliografia), hanno posto a tacere la priorità delle nostre ricerche e della nostra ipotesi, sebbene avrebbero potuto trovarne cenno nel classico libro del WILSON. Ci conforta comunque che nei nostri manuali di genetica e di biologia si sia cominciato a mettere a posto tale punto. Per es. MONTALENTI scrive: « Le numerosissime ricerche sull'intima struttura dei cromosomi hanno portato a riconoscere che ogni cromosoma consta essenzialmente di un cromonema (cioè di un filamento cromatico avvolto a spirale). La struttura a spirale osservata già dal BRUNELLI 1911 (tale data va corretta in 1910) e confermata da molti ricercatori recenti ha verosimilmente una grande importanza nel dinamismo dei fenomeni mitotici e sinaptici, che consisterebbe sostanzialmente in torsioni e detorsioni del cromonema » (1).

A sua volta PIERANTONI (2) scrive: « Come ebbe già il BRUNELLI ad affermare fin dal 1910 la struttura dei cromosomi fin dal loro comparire è eminentemente spirale. Tale struttura che si ritiene come semplicemente frequente tende oggi ad apparire specialmente per gli studiosi dei cromosomi delle cellule vegetali, come un fatto generale ed anche al BRUNELLI tocca la priorità di aver affermato la duplicità dei cromosomi anafasici e telofasici e quindi l'interpretazione a doppia spirale che oggi si va generalizzando nelle vedute sulla struttura del cromosoma. Anzi può dirsi che tale duplicità della spirale, ossia che essa risulti da un paio di cromosomi ravvolti a spira, sia evidente fin dalla prima differenziazione dei cromosomi giusta le vedute della PERRY (1932) venute a conferma di quelle di BRUNELLI, 1910, DEHORNE 1911, KAUFMANN 1926, VEIDOWSKY (1926-27), SHARP (1929), TELEZYNSKY (1930-31), GEITLER 1938, GATES 1938 ed altri ».

Sono molte le deduzioni da trarsi da queste premesse col riguardare un puro anaacronismo lo schema di FLEMMING, basta pensare all'impor-

---

(1) G. MONTALENTI, *Elementi di Genetica*. Licinio Cappelli, editore, Bologna, 1939.

(2) U. PIERANTONI, *Nozioni di Biologia (compresa la genetica e la biologia delle Razze)*. Unione Tipografica Editrice Torinese, 1940-XVIII.

tanza che illustri biologi come REINKE davano alla segmentazione trasversale dello spirema per la interpretazione dei fenomeni ereditari, e all'importanza non meno grande che poi si diede alla sinapsi come copulazione parallela di cromosomi nella profase maturativa, e in seguito al crossing-over di MORGAN (chiasmatisia di JANNSENS).

L'influenza di questi nuovi orientamenti circa l'interpretazione dei fenomeni cariocineticici, nei riguardi delle dottrine moderne dell'eredità e della citogenetica, saranno da noi esaminati nella II Parte della Nota.

## PARTE II.

### *Il morganismo e le deformazioni esotiche della scienza dell'eredità e della razza.*

La moderna genetica si fonda in gran parte sulla minuta analisi dei fenomeni ereditari, sulla dottrina della individualità dei cromosomi, e lo scambio dei cromomeri attraverso il processo detto di chiasmatisia, crossing-over (torsione spirale, avviticchiamento).

È evidente che questo aspetto della torsione spirale ammessa la duplicità delle spirali cromosomiche anche nelle ordinarie divisioni cellulari non ha più il valore che si voleva ad esso attribuire, perchè quanto riguarda la rottura e lo scambio di pezzi di cromosomi è ben lungi dall'essere un reperto obiettivo.

Comunque l'errore del moderno orientamento della citogenetica è questo: di aver sostituito alle ipotesi statistiche mendeliane (il valore delle così dette leggi Mendeliane è puramente statistico, come ha scritto il matematico HOGBEN) una ipotesi strettamente causale, e aver localizzato perciò i geni sui cromosomi con troppi particolari. È noto che col crossing-over vennero da MORGAN, e dalla sua scuola, spiegati diversi fenomeni che riguardano la separazione e la ricombinazione dei caratteri mendeliani.

Di recente si è ritenuto di apportare una nuova documentazione alla teoria delle localizzazioni genidiali, collo studio dei cromosomi giganteschi (che poi sono anch'essi cromosomi spirali!) delle ghiandole salivari dei ditteri.

Questi cromosomi intravisti dal BALBIANI nel 1881 nel tipico aspetto da lui scoperto dei nuclei del *Chironomus* furono rivisti e interpretati da HEITZ e BAUER e in altri ditteri (*Cricotopus*) nell'Istituto da me diretto dalla prof. LOMBARDI, finchè PAINTER nel 1934 credette di poter riconoscere nelle loro strutture la localizzazione dei geni e trasformò fantasiose congetture in dettagliate mappe genetiche.

I moderni e infatuati seguaci del Morganismo dimenticano inoltre le obiezioni fatte dal punto di vista citologico alla chiasmatipia non solo da noi ma, sotto altri punti di vista, da quel gran Maestro della citologia che è stato EDMONDO WILSON, dalle stesse riserve di IOHANNSEN e di altri autori, assai più profondi conoscitori di citologia di alcuni moderni divulgatori delle dottrine genetiche.

Se l'aspetto citologico del crossing-over appariva a WILSON dubbio, questo dubbio oggi è centuplicato dagli aspetti che anche nelle cellule somatiche presenta l'incrociarsi delle spirali doppie cromosomiche, in seguito alla nostra interpretazione obiettiva del fenomeno cariocinetico discussa nella I Parte di questa Nota.

I due processi della mitosi ordinaria e delle meiosi vanno riveduti completamente, sia per la parte apparente che teorica e la dottrina della chiasmatipia ne esce profondamente scossa. La pretesa scoperta dei PAINTER sulle ghiandole salivari dei Ditteri, alla quale sopra si è accennato non è invece che una prova contraria alla dottrina genetica, dato che la ghiandola salivale (di un organismo larvale e quindi per giunta condannata alla distruzione) è poi la meno adatta, per l'alterato metabolismo, allo studio di fenomeni ereditari. È strano che reputati morfologi mostrino così di ignorare le più elementari conoscenze di fisiologia cellulare, ed è interessante ricordare come l'alterazione dei nuclei giganti sia stata per la prima volta rilevata proprio da uno zoologo, il KORSCHOLT.

A parte il lusso di particolari col quale tali moderni autori dell'alchimia cromosomiale vogliono gabellare come fatti accertati solo delle pure ipotesi, resta dunque il fatto che una cellula secretoria a nucleó gigantesco mostra il suo chimismo alterato, per nulla adatto alla dimostrazione di fenomeni ereditari. La conformazione dei suoi persistenti cromosomi mostra solo l'importanza di quella struttura spirale che serve invece a noi proprio per combattere la chiasmatipia!

In base a questa mia critica scrive il PIERANTONI <sup>(1)</sup>: « L'osservazione del comportamento dei caratteri e corrispondenti variazioni delle strie avrebbe portato i moderni genetisti e soprattutto il MORGAN, lo SHARP, il BRIDGES, il PAINTER ed altri alla ricostruzione di una specie di mappa della localizzazione dei geni nei cromosomi sulla quale non vogliamo troppo insistere, trattandosi di studi ancora in corso e non mancando chi obietta che le ghiandole salivari, come organi secretori e quindi a nucleo non normale, non sono forse quelle più adatte per lo studio di questa minutissima struttura dei cromosomi ». Non tutti gli autori usano però la stessa prudenza, anzi tutt'altro.

---

<sup>(1)</sup> U. PIERANTONI, *Nozioni di Biologia (compresa la genetica e la biologia delle Razze)*. 2ª ediz. Unione Tipografica Editrice Torinese, 1940-XVIII.

Passando da un autore all'altro le ipotesi sulla costituzione del genotipo della *Drosophila* si è arrivati alle più assurde conclusioni reclamistiche che mai la biologia abbia registrato: basta ricordare queste mirabolanti frasi di TIMOFÉEFF-RESSOVSKY <sup>(1)</sup>: « Nella fig. 1 sono rappresentate le mappe cromosomiche genetiche dei cromosomi della *Drosophila melanogaster*, l'organismo più profondamente studiato nel mondo. Ciascun gene occupa una posizione definitiva in un determinato cromosoma. Il genotipo viene così a essere formato da una catena di geni ripartita nei cromosomi.

« Questa rappresentazione del genotipo viene elaborata con grande esattezza in *Drosophila melanogaster*, ma è pure valida per tutti gli organismi vegetali e animali che vennero finora analizzati da un punto di vista genetico ».

Non bisogna dimenticare che eminenti citologi come il LEVI hanno riconosciuto che nella *Drosophila*: « i caratteri della mitosi sono poco favorevoli ad una minuta analisi citologica (LEVI, *Trattato di istologia*, Torino, 1927) ciò che ci sembra in contrasto colle suddette asserzioni.

Quello che non ci dice TIMOFÉEFF-RESSOVSKY, — dopo così enfatica espressione circa i risultati ottenuti dallo studio della *Drosophila*, — è con quale obiettività si siano elaborate le mappe genetiche, servendosi di una quantità di ipotesi che poi si danno come fatti accertati. Le mappe debbono dimostrare la verità delle ipotesi genetiche, ma resta a vedersi quanto prodotto della fantasia non abbia cooperato nella loro redazione. Dopo poche pagine si scrive dallo stesso autore che lo studio esatto del crossing-over, ha così permesso una completa elaborazione della teoria cromosomica delle eredità, ma non si dice che il crossing-over a sua volta non è che una ipotesi, la cui dimostrazione è data solo da schemi mentali.

Lo stesso ENRIQUES <sup>(2)</sup> nel libro da lui dedicato all'apologia delle dottrine di MORGAN così si esprime: « l'accumulo di maggiore materiale genetico ha tolto le basi dell'accordo (comportamento uguale dei simboli e di cromosomi), non esiste più un accordo tra i simboli (ossia i risultati degli esperimenti mendeliani) ed un insieme di corpi che si vedono al microscopio nelle cellule. L'accordo passa dal visibile all'invisibile (!) passa ad un meccanismo di riduzione e di associazione che, come si è visto, non si sa nemmeno quando possa avvenire ».

Il brillante salvataggio delle dottrine citogenetiche dell'eredità, di cui poi ci parla l'ENRIQUES è stato fatto appunto da MORGAN sostituendo a un'interpretazione statistica (che tale è la così detta legge Mendeliana)

---

<sup>(1)</sup> TIMOFÉEFF-RESSOVSKY, *Mutabilità sperimentale in genetica*. Ed. italiana a cura di A. Bruzzatti Travino, Enrico Hoepli, Milano, 1939—XVII.

<sup>(2)</sup> P. ENRIQUES, *La legge di Mendel e i cromosomi*. Zanichelli, 1932.

una presunta legge causale, servendosi adunque dell'invisibile e di cervellotici procedimenti, moltiplicando le unità con procedimenti di rottura ecc.

È necessario ricordare che il WEISMANN aveva all'opposto modificato le sue localizzazioni ereditarie nei cromosomi dall'invisibile al visibile per spiegare il Mendelismo, solo quando i cromosomi apparvero troppo pochi si rovesciò di nuovo il problema delle localizzazioni.

Anche i più entusiasti seguaci come il MONTALENTI degli indirizzi più moderni della citogenetica finiscono coll'esporre dubbi sopra le questioni che in altri punti espongono come risolte, MONTALENTI (1), per esempio, così si esprime: «... lo studio citologo dello scambio come si è detto va incontro a difficoltà grandissime, sì che il processo non può dirsi ancora oggi completamente chiarito nonostante le numerosissime ricerche. Comunque è certo che, nonostante che vari autori, e soprattutto il DARLINGTON, abbiano cercato di costruire una completa teoria dello scambio citologico (che non è possibile riassumere qui) questo fenomeno rimane ancora oscuro nei suoi particolari ».

Lo stesso JUCCI (2) qualche anno addietro scriveva: « gli esperimenti più diversi si sono mostrati d'accordo nell'assegnare un determinato ordine di allineamento dei cromosomi, ma la determinazione della distanza reciproca in base alla percentuale degli scambi (crossing-over) è solo grossolanamente approssimativa. Lo riconosce del resto anche MORGAN e non bastano le ipotesi suppletive del doppio crossing-over ad eliminare il dubbio che la rappresentazione di MORGAN per quanto ingegnosa sia la sola possibile ».

Fino a che punto però questi dubbi concordino coll'entusiasmo fetista delle ultradettagliate mappe genetiche, questo ci lascia alla nostra volta perplessi circa la serietà delle costruzioni e la logica di molti moderni neo-genetisti e citogenetici.

In un nostro articolo (3) in occasione alle onoranze al prof. RUSSO abbiamo criticato i nuovi orientamenti della citogenetica sia nei riguardi del crossing-over che delle più moderne ricerche sui cromosomi delle ghiandole salivari e nelle mappe genetiche, così leggermente redatte da moderni studiosi dei fenomeni ereditari.

---

(1) G. MONTALENTI, *Elementi di genetica*. Licinio Cappelli Editore, Bologna, 1938.

(2) C. JUCCI, *La legge di Mendel e i Cromosomi*. Scuola Tipografica Pio X, Roma, 1932.

(3) G. BRUNELLI, *Un momento critico della citologia moderna. Diplospirofase e chiasmaticopia. Il romanzo della Drosophila*. Mem. XXIII, « Atti della R. Accad. di Scienze naturali in Catania », 63, 64, 1937-38 VI, vol. III, Catania, 1939.



Siamo lieti poichè questa nostra critica appariva a qualche nostro Collega eccessiva, quanto dopo di noi, ma indipendentemente, hanno scritto due autori americani JEFFREY e HAERTH <sup>(1)</sup> sotto il suggestivo ed eloquente titolo di «Crepuscolo cromosomiale», che supera senza dubbio il nostro scetticismo: «If chiasmotyp is present in the chromosomes involved in the reduction division, it is likewise clearly present in all chromosomes, whether reproductive, vegetative somatic or sexual somatic».

E dopo aver scritto: «to crossing-over is subject to serious doubt», gli stessi autori così concludono: «La scienza relativamente nuova della citogenetica presenta un rigoglioso fiorire di ipotesi effimere, che una più matura e larga conoscenza senza dubbio sfronderà.

«Tra le prime di queste ipotesi da essere sfatata è evidentemente quella della chiasmatiopia perchè è basata su non sicure accurate ed estensive basi di fatti citologici».

Lo stesso MORGAN era così poco sicuro della chiasmatiopia che non sapeva neppure in quale momento della meiosi localizzarla.

«Sembra preferibile, dice lo stesso MORGAN, a non ancora legare la teoria dell'*enlacement* all'uno stadio piuttosto che all'altro, effettivamente il risultato pratico è lo stesso, che si producano allo stato leptotene, come innanzi abbiamo ammesso, o come crede lo JANSSENS a uno stadio più avanzato (strepsinema)».

Non sono certo alcune pretese scoperte della moderna radiogenetica che possono far mutare le nostre idee circa la fragilità dell'edificio Morganiano.

L'analisi del potere mutativo delle radiazioni è stato affrontato con gran lena e se vogliamo con genialità da TIMOFÉEFF RESSOVSKY, ma le sue premesse e le sue conclusioni ci sembrano troppo audaci e certe affermazioni non dimostrate.

Non è il caso qui di discutere, ma torneremo sull'argomento, lo stato attuale della radiogenetica, ed è semplicemente pericoloso che alle audacie Morganiste si associno quelle di certi moderni radiogenetici.

Bisogna tener presente quanto nel secondo Congresso di radiobiologia affermava giustamente il GHIGI <sup>(2)</sup> convinto cultore della moderna genetica e quindi fonte non sospetta:

---

<sup>(1)</sup> E. C. JEFFREY e E. J. HAERTH, *The Chromosomal Crepusculum*. «The American Naturalist», Vol. 1, 73, n. 749, novembre-dicembre 1939.

<sup>(2)</sup> A. GHIGI, *Mutazioni e radiazioni*. «Atti del II Congresso di radiobiologia», Modena, 1936-XVI. Dal punto di vista della discussione dei rapporti tra problemi della genetica e della evoluzione che non intendiamo discutere nella presente Nota si veda anche: M. CANELLA, *Orientamenti della moderna Biologia*. Zanichelli edit. Bologna, 1939-XVII.



« Le cellule germinali appartengono a quella categoria di elementi che sembrano essere maggiormente radiosensibili. Di qui sorge la possibilità di una Radiogenetica la quale stando a tutto ciò che è stato prima detto, sembra avere capacità molto limitata nel senso della evoluzione della specie. Inoltre le mutazioni indotte da radiazioni sono in maggioranza letali, semiletali, degenerative di determinati organi e funzioni o dell'intero organismo e sembrano spesso condurre ad un regresso o alla estinzione della specie piuttosto che ad un'evoluzione progressiva di essa ».

I dubbi da me espressi circa gli orientamenti della moderna citogenetica hanno fatto ritenere a taluno che io non creda più come per il passato alla teoria della individualità dei cromosomi, alla quale ho portato anche personalmente noti contributi, ma questo non è nella mia intenzione, come anche la mia critica al crossing-over non deve far ritenere che io escluda la coniugazione nella diacinesi precedente la divisione eterotipica e uno scambio di cromomeri, ma ritengo che la citogenetica non abbia bisogno di rottura di cromosomi. Una idea simile per il crossing-over, è stata esposta da Goldschmidt che ha emesso l'ipotesi che anche accettando l'idea che gruppi di fattori siano portati dai cromosomi che avanti la riduzione realizzano tra di loro certi scambi, non è necessario ammettere che questi scambi siano costituiti da un processo simile a quello dell'enjambement. Il nostro punto di vista si accorda anche col non escludere localizzazioni ereditarie anche nel plasma, come oggi generalmente si ammette.

Le nostre critiche sono solo rivolte a dare alla moderna dottrina sull'eredità e la razza un più serio indirizzo, che non sia quello preso dal neomorganismo colle esagerazioni sulla *Drosophila*.

Tanto più pericolosa è questa esterofilia nelle dottrine ereditarie, quando da questo romanzo a lungo metraggio sulla *Drosophila* si vogliono inferire giudizi circa anche il problema razziale umano. Allora deve intervenire il nostro nazionalismo scientifico per fare tabula rasa delle esagerazioni e di false dottrine propalate ai nostri danni da certa scienza straniera <sup>(1)</sup> che dobbiamo mettere in quarantena.

---

<sup>(1)</sup> Tra questi autori cito, per esempio, SHULL, *Heredity*, M. GRAW; H. U. Publ. London, 1926, la cui opera si fregia nel frontispizio di due celebri moscerini *Drosophile*, e nella quale è scritto, nel capitolo conclusivo, che da osservazioni psicologiche fatte durante la Grande Guerra, da certo sig. R. M. YERKES, l'Italia per l'intelligenza figura al dodicesimo posto e per bontà dell'autore prima del Belgio e dell'Olanda.



## NOTE E COMUNICAZIONI

**Astronomia (Astrofisica).** — *Altezza della cromosfera nel 1939 e andamento del ciclo solare* <sup>(1)</sup>. Nota <sup>(2)</sup> di GIORGIO ABETTI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

I risultati delle osservazioni dell'altezza della cromosfera eseguite ad Arcetri nel 1939 come usualmente di 30° in 30° di latitudine, sono raccolti nella seguente tabella. Si sono eseguite dal personale dell'osservatorio, in maggioranza dal dott. P. CIPRIANI, 88 osservazioni nelle giornate più favorevoli, con i seguenti risultati medi.

TABELLA I.  
*Arcetri.*

| Latitudine | Altezza  | Latitudine | Altezza  |
|------------|----------|------------|----------|
| + 90° N    | 10'' .41 | — 90° S    | 10'' .57 |
| + 60 E     | 10 .55   | — 60 W     | 10 .40   |
| + 30 E     | 10 .40   | — 30 W     | 10 .38   |
| 0 E        | 10 .43   | 0 W        | 10 .39   |
| — 30 E     | 10 .36   | + 30 W     | 10 .30   |
| — 60 E     | 10 .37   | + 60 W     | 10 .43   |

Da questi dati si ricava l'altezza media generale per il 1939: 10'' .42. Facendo il confronto con il precedente anno si ottiene:

$$1939 \ 1938 = + 0'' .11.$$

Si può quindi concludere che l'altezza della cromosfera è rimasta sensibilmente costante, rispetto al 1938, ed è molto uniformemente distribuita attorno al globo solare.

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nel R. Osservatorio Astrofisico di Arcetri, Firenze.

<sup>(2)</sup> Presentata nell'Adunanza del 17 maggio 1940-XVIII.

L'area totale delle protuberanze, dedotta dalle stazioni di Arcetri, Catania, Tashkent, Zurigo, risulta diminuita di 435 unità di protuberanze rispetto al 1938, confermando così anche per il fenomeno delle protuberanze la decisa discesa dell'attività solare verso il minimo.

Anche per gli altri fenomeni solari si verifica lo stesso fatto, come si prova prendendo in esame i numeri relativi delle macchie ed i numeri caratteristici per i flocculi di calcio e di idrogeno.

Nella tabella II sono appunto raccolte le medie annue, dal 1933 al 1939, delle unità di protuberanza osservate ad Arcetri, Catania, Zurigo. Quelle di Zurigo sono state corrette per ridurle al sistema di Arcetri <sup>(1)</sup>.

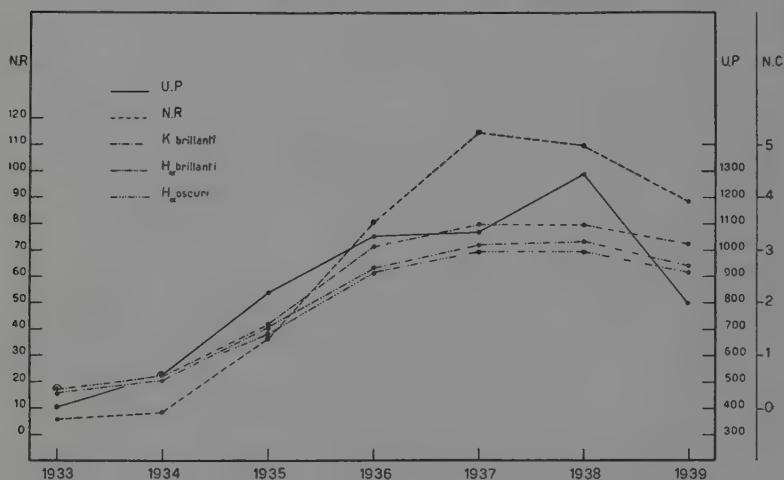


Fig. 1. — Andamento del ciclo solare dal 1933 al 1939.

Inoltre per gli stessi anni si danno, nella Tabella III, le medie dei numeri relativi e dei numeri caratteristici per i flocculi brillanti di calcio, brillanti ed oscuri di idrogeno dedotti dal Bollettino di Zurigo <sup>(2)</sup>. Nel grafico (fig. 1) è tracciato l'andamento di questi dati dall'ultimo minimo all'ultimo massimo del presente ciclo. Da questo si vede che il massimo è avvenuto circa nel 1937.5 <sup>(3)</sup>, forse con alquanto ritardo per l'area delle protuberanze al lenbo rispetto agli altri fenomeni. Questo fatto, che ho avuto occasione di notare precedentemente <sup>(4)</sup>, potrà venire meglio messo

<sup>(1)</sup> Cfr. « Astron. Mitt. Zürich », 139, pag. 503 e sgg. 1940.

<sup>(2)</sup> « Quart. Bullet. Int. Astron. Union », 1939, Zürich.

<sup>(3)</sup> Cfr. anche « Astr. Mitt. Zürich », 137, pag. 392, 1939.

<sup>(4)</sup> Pubbl. Oss. Arcetri, fasc. 49, pag. 24, 1931.

in evidenza qualora si considerino e si conguagliano le medie mensili invece che quelle annue. Oltre all'epoca del massimo si deduce anche dalla fig. 1 che, fra il minimo avvenuto nel 1933.8 <sup>(1)</sup> ed il massimo sono passati 3.7 anni; risulta quindi che questa prima parte del ciclo undecennale è notevolmente più breve di quella media che si computa di 5.2 anni <sup>(2)</sup>. Bisogna però notare che pur essendo avvenuto il massimo di attività nel 1937.5, è anche vero che dopo una notevole diminuzione di questa sul finire e sui primi del 1938, alla metà dello stesso anno si è avuta una notevole ripresa dell'attività solare con numeri relativi delle macchie che giunsero, il 13 luglio 1938, fino a 229, con una media mensile per quello stesso mese di 165.3. Nei numeri relativi questo massimo è stato superato, nei cicli precedenti, da quello del 1870. Così dicasi per le protuberanze al lembo, la cui area media ha superato quella del 1937 e per i flocculi di calcio e di idrogeno la cui intensità è rimasta nel 1938 uguale a quella del 1937. Si deve quindi concludere che questo massimo di attività solare si è esteso in ambedue queste annate.

Sono continuate nel 1939 con notevole frequenza le eruzioni cromosferiche, indici anche queste della notevole intensità del passato massimo che ha avuto pure forti ripercussioni sulla terra con tempeste ionosferiche e magnetiche eccezionali e aurore boreali visibili, nel 1938 e 1940, anche alle nostre latitudini.

TABELLA II.  
*Area diurna media delle protuberanze al lembo  
dal 1933 al 1939.*

| Anno | Unità di protuberanza |         |                | Medie | Diff. |
|------|-----------------------|---------|----------------|-------|-------|
|      | Arcetri               | Catania | Zurigo ridotte |       |       |
| 1933 | 412                   | 413     | 384            | 403   |       |
| 1934 | 526                   | 590     | 462            | 526   | + 123 |
| 1935 | 815                   | 879     | 816            | 837   | + 311 |
| 1936 | 1382                  | 794     | 979            | 1052  | + 215 |
| 1937 | 1344                  | 771     | 1085           | 1067  | + 15  |
| 1938 | 1659                  | 1118    | 1097           | 1291  | + 224 |
| 1939 | 944                   | 694     | 761            | 800   | — 491 |

<sup>(1)</sup> « Astr. Mitt. Zurich », 132, pag. 68, 1935.

<sup>(2)</sup> Cfr. *Il Sole*, pag. 65, Hoepli, Milano, 1936.

## TABELLA III.

*Numeri relativi delle macchie e numeri caratteristici dei flocculi  
dal 1933 al 1939.*

| Anno | N. R. | Diff.  | Flocculi             |        |                                |        |                                |        |
|------|-------|--------|----------------------|--------|--------------------------------|--------|--------------------------------|--------|
|      |       |        | Calcio (K)<br>chiari | Diff.  | Idrog. (H $\alpha$ )<br>chiari | Diff.  | Idrog. (H $\alpha$ )<br>oscuri | Diff.  |
| 1933 | 5.7   |        | 0.37                 |        | 0.30                           |        | 0.35                           |        |
|      |       | + 3.0  |                      | + 0.23 |                                | + 0.24 |                                | + 0.25 |
| 1934 | 8.7   |        | 0.60                 |        | 0.54                           |        | 0.60                           |        |
|      |       | + 27.4 |                      | + 1.00 |                                | + 1.00 |                                | + 0.77 |
| 1935 | 36.1  |        | 1.60                 |        | 1.54                           |        | 1.37                           |        |
|      |       | + 44.3 |                      | + 1.45 |                                | + 1.12 |                                | + 1.24 |
| 1936 | 80.4  |        | 3.05                 |        | 2.66                           |        | 2.61                           |        |
|      |       | + 34.0 |                      | + 0.43 |                                | + 0.45 |                                | + 0.37 |
| 1937 | 114.4 |        | 3.48                 |        | 3.11                           |        | 2.98                           |        |
|      |       | — 4.8  |                      | 0.00   |                                | + 0.06 |                                | + 0.02 |
| 1938 | 109.6 |        | 3.48                 |        | 3.17                           |        | 2.96                           |        |
|      |       | — 20.8 |                      | — 0.34 |                                | — 0.43 |                                | — 0.36 |
| 1939 | 88.8  |        | 3.14                 |        | 2.74                           |        | 2.60                           |        |

**Astronomia.** — *I problemi fondamentali della Cosmogonia e la legge di Newton.* Nota VI <sup>(1)</sup> di GIUSEPPE ARMELLINI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. *Preliminari.* — Termineremo in questa Nota lo studio sopra i problemi fondamentali del Sistema Planetario secondo la nuova teoria cosmogonica da me proposta, per passare poi — in altre Note — ai Sistemi Stellari, alla Galassia ed alle nebulose extragalattiche.

A tale proposito cominciamo col ricordare che, nella nostra quarta Nota <sup>(2)</sup> avevamo visto come, assumendo come valore massimo (in unità C. G. S.) del coefficiente cosmogonico  $\epsilon$  il numero  $4 \cdot 10^{-14}$  (od una quantità dello stesso ordine di grandezza), le perturbazioni prodotte dall'introduzione del termine cosmogonico nella legge di NEWTON risultano così piccole da sfuggire alle osservazioni; esse non altereranno dunque la concordanza, abbastanza buona, tra le osservazioni stesse e le posizioni planetarie, calcolate con l'ordinaria legge newtoniana. Dobbiamo ora passare alla seconda parte del nostro studio e cioè esaminare se un tale valore di  $\epsilon$  sia sufficiente a rendere piccole le eccentricità e le inclinazioni delle orbite planetarie in un intervallo di tempo dell'ordine di grandezza dell'età dei pianeti.

Per semplificare i calcoli numerici, premettiamo due osservazioni e cioè:

1° Come vedremo tra breve, e come del resto sembra assai probabile anche da altre fonti, questa età dei pianeti può considerarsi circa dell'ordine di  $10^{10}$  o di  $10^{11}$  anni e cioè di decine o centinaia di bilioni di anni. Essa è dunque assai inferiore all'età del Sole che deve supporci (JEANS) di trilioni o decine di trilioni di anni ( $10^{12}$  o  $10^{13}$ ), come quella generalmente ammessa per le stelle.

Possiamo dunque supporre che, alla nascita dei pianeti, il raggio  $r$  del globo solare avesse valore poco diverso dall'attuale ( $r = 695.000$  km.  $= 6,95 \cdot 10^{10}$  cm.).

2° Applicando il teorema della conservazione del momento della quantità di moto, vedremo facilmente che, all'epoca della nascita dei pianeti

<sup>(1)</sup> Presentata nell'Adunanza del 17 maggio 1940—XVIII.

<sup>(2)</sup> Cfr. G. ARMELLINI, *I problemi fondamentali della Cosmogonia e la legge di Newton.* Nota IV in « Rend. R. Acc. dei Lincei », 1939, sem. I.



(supposti generati da esplosioni del globo solare), la velocità angolare  $\omega$  di rotazione del Sole era circa 25 volte maggiore dell'attuale. Per semplicità, volendo ottenere soltanto l'ordine di grandezza, considereremo  $\omega$  come costante assumendo il suo valore medio eguale a circa dodici volte quello attuale ( $\omega = 2,8 \cdot 10^{-6}$ ) e cioè porremo in cifra tonda  $\omega = 3 \cdot 10^{-5}$  in unità C. G. S., od anche  $\omega = 930$  prendendo per unità di tempo l'anno.

2. *Limiti inferiori per l'età dei pianeti.* — Nella nostra citata Nota IV, abbiamo dimostrato la formola (cfr. eq. 25):

$$[1] \quad a = (C + \beta t)^{\frac{2}{5}}$$

la quale ci dice come varia col tempo, in virtù del termine cosmogonico, la distanza media  $a$  di un pianeta dal Sole. In essa  $C$  è eguale ad  $a_0^{5/2}$  dove  $a_0$  indica il valore di  $a$  per  $t = 0$  e si è posto per brevità:

$$[2] \quad \beta = \varepsilon r^2 \omega^2 q^3 = \varepsilon r^2 \omega \sqrt{Mf}$$

essendo  $M$  la massa solare,  $f$  il coefficiente attrattivo ed  $r$  il raggio del Sole. In unità C. G. S., essendo  $M = 1,98 \cdot 10^{33}$ ,  $f = 6,67 \cdot 10^{-8}$ ,  $r = 6,95 \cdot 10^{10}$  ed  $\omega = 3 \cdot 10^{-5}$ , si ottiene subito  $\beta = 6,6 \cdot 10^{-14}$ ; se invece prendiamo come unità di lunghezza, tempo e massa, l'unità astronomica (e cioè 149.450.000 km.), l'anno e la massa del Sole, poichè  $\beta$  ha le dimensioni  $L^{5/2} T^{-1}$ , il suo valore si riduce a  $2,4 \cdot 10^{-9}$ .

Inoltre, se supponiamo p. es. i pianeti generati da esplosioni del Sole,  $a_0$  sarà certamente maggiore del raggio solare  $r$ , benchè di ordine di grandezza non molto diverso. Come vedemmo infatti i pianeti primitivi debbono supporre assai vicini al Sole, da cui poi si allontanarono lentamente in virtù della [1] e cioè per effetto del termine cosmogonico.

Per semplicità supporremo  $a_0$  eguale a dieci volte il raggio solare e cioè a 0,05 unità astronomiche. Noteremo in proposito, che a tale distanza dal Sole, un pianeta compie una rivoluzione in poco più di quattro giorni, mentre la rotazione solare primitiva avveniva in circa un giorno; secondo le nostre formole, il pianeta si allontanerà dunque dal Sole. La  $C$  risulterà eguale a 0,0006 circa, mentre il rapporto  $r:a$  sarà sempre piccolo.

Ciò posto, segue dalla [1] che il tempo  $T$  impiegato dal pianeta a raggiungere la sua distanza media attuale  $a$ , sarà legato ad  $a$  dalla relazione:

$$[9] \quad a = (0,0006 + 2,4 \cdot 10^{-9} T)^{\frac{2}{5}}$$

dove  $a$  è misurato in unità astronomiche e  $T$  è espresso in anni.

Trascurando Plutone (forse antico satellite di Nettuno) e prendendo per  $a$  i valori spettanti attualmente ai singoli pianeti, troviamo immedia-

tamente il tempo  $T$  che ciascuna orbita ha impiegato per dilatarsi dalle immediate vicinanze del Sole alle dimensioni attuali; per brevità chiameremo tali tempi col nome di *Età Cosmogoniche*.

Li riportiamo nella seguente tabella, osservando soltanto che, poichè per  $\varepsilon$  abbiamo adoperato il valore  $4 \cdot 10^{-14}$ , che è certamente da considerarsi come prossimo al massimo ammissibile, i valori di  $T$  saranno ovviamente da ritenersi come minimi compatibili con la nostra teoria (<sup>1</sup>).

TABELLA.

*Età cosmogoniche minime per i singoli pianeti*  
(in anni).

| Pianeta            | $a$  | $T$              | Pianeta           | $a$   | $T$                 |
|--------------------|------|------------------|-------------------|-------|---------------------|
| Mercurio . . . . . | 0,38 | $1,6 \cdot 10^8$ | Giove . . . . .   | 5,20  | $2,4 \cdot 10^9$    |
| Venere . . . . .   | 0,72 | $2,9 \cdot 10^8$ | Saturno . . . . . | 9,54  | $4,0 \cdot 10^9$    |
| Terra . . . . .    | 1,00 | $4,5 \cdot 10^8$ | Urano . . . . .   | 19,19 | $8,0 \cdot 10^9$    |
| Marte . . . . .    | 1,52 | $6,8 \cdot 10^8$ | Nettuno . . . . . | 30,07 | $1,2 \cdot 10^{10}$ |

Osserviamo che, se la nostra teoria cosmogonica è esatta, questi tempi dovranno necessariamente risultare inferiori, sebbene presso a poco dello stesso ordine di grandezza, delle vere età dei pianeti. Ora ciò appunto si verifica. Basta infatti ricordare, p. es., che l'età della Terra – dedotta in modo assai plausibile dagli elementi radioattivi contenuti nelle rocce – sembra certamente superiore al miliardo ( $10^9$ ) di anni.

E tale successo si trova confermato anche da una recentissima Nota (<sup>2</sup>) del prof. J. PLACINTEANU, dell'Università di Jassy; Nota in cui l'autore applica la mia legge di attrazione all'atomo e trova – come egli stesso gentilmente mi comunica – che l'accordo tra teoria ed osservazione viene migliorato rispetto ai calcoli eseguiti senza tener conto del termine cosmogonico.

Notiamo che il problema può essere invertito e cioè, dato un limite superiore per l'età dei pianeti, se ne può dedurre un limite inferiore per

(<sup>1</sup>) In una recentissima Nota (« Comptes Rendus », To. CCX, n. 21) che ci giunge mentre correggiamo queste bozze, il prof. J. CHAZY, esaminando il nostro problema e basandosi sul moto di Mercurio, stima che il valore di  $\varepsilon$  sia dell'ordine di  $10^{-17}$ . In tal caso le età reali dei pianeti, calcolate con la nostra formola, sarebbero dell'ordine di  $10^{11}$  anni, e cioè in perfetto accordo con altri dati. Purtroppo però sul moto di Mercurio esistono vari dubbi, onde ci sembra prudente qualche riserbo.

(<sup>2</sup>) Cfr. J. PLACINTEANU, *Application de la loi newtonienne de M. Armellini à l'atome*, in « Ann. Scient. Univ. de Jassy », to. XXVI, fasc. I, 1940.

il coefficiente cosmogonico  $\varepsilon$ . Così, p. es., supponendo che l'età massima della Terra sia di  $10^{12}$  anni, si trova come limite inferiore di  $\varepsilon$  il valore  $2 \cdot 10^{-17}$ .

Passeremo ora al calcolo numerico delle variazioni totali, subite dalla velocità angolare di rotazione del Sole e dagli elementi delle orbite planetarie durante il periodo di esistenza dei pianeti stessi. Per renderci indipendenti da  $\varepsilon$  (e quindi da  $T$ ), prenderemo generalmente come variabile indipendente  $a$ , integrando da  $a_0$  ad  $a$ . Faremo solo eccezione per le eccentricità, le quali — riducendosi in tempi relativamente brevi — si studiano meglio prendendo per variabile indipendente  $t$ .

3. *Riduzione delle eccentricità.* — Dalla [14] della nostra Nota IV, indicando con  $E$  l'eccentricità di un'orbita planetaria e trascurando per semplicità termini di ordine superiore, abbiamo la formula:

$$[4] \quad \frac{dE}{dt} = - \frac{\varepsilon n^2 a E}{2}$$

dove il moto medio  $n$  è legato alla massa solare  $M$  dalla nota relazione:

$$[5] \quad n^2 = \frac{Mf}{a^3}$$

onde la [4] diviene:

$$[6] \quad \frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = - \frac{\varepsilon Mf}{2 a^2}$$

e cioè per la [1]:

$$[7] \quad \frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = - \frac{\varepsilon Mf}{2} [C + \beta t]^{-\frac{4}{5}}$$

dove la costante  $C$  è eguale approssimativamente come vedemmo, a 0,0006 e cioè ad  $a_0^{5/2}$ .

Integrando tra  $t = 0$  e  $t$  e servendosi della [2] si ha subito:

$$[8] \quad \log \frac{E}{E_0} = - \frac{5 \varepsilon Mf}{2 \beta} \left[ (C + \beta t)^{\frac{1}{5}} - C^{\frac{1}{5}} \right] = - \frac{5 \sqrt{Mf}}{2 \omega r^2} \frac{1}{a_0^2} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{\beta}{C} t \right)^{\frac{1}{5}} \right].$$

Scegliendo, come unità di misura, l'unità astronomica, l'anno e la massa del Sole, si ha  $M = 1$ ,  $a_0 = 0,05$ ,  $f = 4 \pi^2$ ,  $\omega = 930$ ,  $\beta = 2,4 \cdot 10^{-9}$ ,  $r = 0,0047$ .

In conseguenza, la [8] diviene:

$$[9] \quad \log \frac{E}{E_0} = 170 \left[ 1 - \left( 1 + 4 \cdot 10^{-6} t \right)^{\frac{1}{5}} \right]$$

dove i logaritmi sono neperiani e dove  $E_0$  indica il valore di  $E$  per  $t = 0$ .

La [9] mostra che, quando  $t$  cresce all'infinito,  $E$  tende a zero e che vi tende anzi piuttosto rapidamente; nel senso cioè che, al massimo dopo

alcuni milioni di anni — tempo certamente assai inferiore alla vita di un pianeta — l'orbita si può considerare come ridotta *praticamente circolare*. Osserviamo che se per  $\epsilon$  si ponesse invece il suo limite inferiore il tempo richiesto aumenterebbe; ma allora anche l'età dei pianeti aumenterebbe in proporzione ed il risultato sarebbe identico.

Sarà però bene aggiungere, a scanso di equivoci, che ciò si verificherebbe esattamente se si trattasse — come abbiamo sempre supposto — di un *unico* pianeta che ruotasse intorno al Sole. Nel caso invece di più pianeti, a causa delle mutue perturbazioni, l'eccentricità non possono esattamente tendere a zero; ma, essendo le masse planetarie piccole, sebbene non trascurabili rispetto alla massa del Sole, anche le eccentricità diverranno certamente molto piccole. E ciò appunto si osserva.

4. *Variazione della velocità angolare di rotazione del Sole.* — Se si suppongono i pianeti generati dal Sole, è facile calcolare la variazione della velocità angolare di rotazione del Sole che si produce nel tempo impiegato dal pianeta per passare dalla distanza  $a_0$  alla distanza  $a$  dal Sole stesso.

Infatti, supposta l'orbita circolare e detta  $m$  la massa del pianeta, il suo momento della quantità di moto è ovviamente  $mna^2$ ; valore che, per la [5], si riduce a  $m\sqrt{Mfa}$ . D'altra parte, il momento della quantità di moto del Sole è eguale al prodotto della sua velocità angolare per il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione; vale a dire a  $\frac{2}{5} Mr^2 \omega$ . Ma, trattandosi di forze interne, la somma geometrica dei due momenti deve mantenersi rigorosamente costante. Astraendo dunque per semplicità dalla inclinazione dell'orbita planetaria sul piano dell'equatore solare e chiamando con  $\omega_0$  la velocità di rotazione del Sole quando il pianeta considerato aveva da esso una distanza media  $a_0$ , otteniamo:

$$[10] \quad m\sqrt{Mfa} + \frac{2}{5} Mr^2 \omega = m\sqrt{Mfa_0} + \frac{2}{5} Mr^2 \omega_0$$

da cui si ricava

$$[11] \quad \omega_0 - \omega = 5m\sqrt{Mf} \frac{\sqrt{a} - \sqrt{a_0}}{2Mr^2}.$$

Nel caso di più pianeti, basta ovviamente eseguire le somme delle variazioni di  $\omega$  prodotte da ciascuno di essi.

Con facili calcoli numerici, si trova in tal modo che nel primitivo sistema planetario, la velocità  $\omega$  era circa 25 volte maggiore dell'attuale e cioè il Sole ruotava intorno a sè stesso in un giorno circa. Ne segue che — essendo oggi il momento della quantità di moto del Sole circa 1/30 di quello di tutto il Sistema Planetario — *anticamente il momento della quantità di moto del Sistema stesso* (ente invariabile, come la massa) *era quasi tutto*

*raccolto nel Sole*; come appunto doveva essere. Resta così spiegato questo annoso problema della distribuzione del momento nel Sistema Planetario, tra Sole e Pianeti, senza bisogno di ricorrere all'ipotesi di un astro estraneo passato in vicinanza del Sole.

Inutile aggiungere che una rotazione di un giorno è perfettamente compatibile con la stabilità del globo solare, giacchè produce all'equatore solare una forza centrifuga eguale appena ad 1/75 della gravità. Da note teorie, segue anzi che lo schiacciamento polare del Sole doveva allora essere compreso tra 1/60 nel caso di un Sole omogeneo ed 1/150 nel caso di grande condensazione centrale. Il Sole era dunque, anche allora, quasi sferico: molto più di quanto lo siano oggi Giove e Saturno.

5. *Variazioni delle inclinazioni.* — Dalla formola [5] della nostra Nota IV abbiamo:

$$[12] \quad \frac{dI}{dt} = - \frac{\varepsilon r^2 \omega n \sin I}{10 a} = - \frac{\varepsilon r^2 \omega \sqrt{Mf} \sin I}{10 a^{5/2}} = - \frac{\beta \sin I}{10 a^{5/2}}.$$

Ma dalle [1] della presente Nota si ha:

$$[13] \quad da = \frac{2}{5} a^{-3/2} \beta dt$$

onde la [12] diviene:

$$[14] \quad \frac{dI}{\sin I} = - \frac{da}{4 a}.$$

Integrando si ha:

$$[15] \quad \operatorname{tg} \frac{I}{2} = S \operatorname{tg} \frac{I_0}{2}$$

dove abbiamo chiamato con  $I_0$  l'inclinazione iniziale dell'orbita planetaria (riferita sempre al piano dell'equatore solare) e dove si è posto:

$$[16] \quad S = \sqrt[4]{\frac{a_0}{a}}.$$

Si vede subito che, crescendo  $a$  secondo la [1], l'inclinazione  $I$  tende a zero.

Prendendo come unità di lunghezza l'unità astronomica e ponendo per  $a_0$  il valore 0,05 si ha la seguente tabella per i valori di  $S$ :

| Pianeta            | $a$  | $S$  | Pianeta           | $a$   | $S$  |
|--------------------|------|------|-------------------|-------|------|
| Mercurio . . . . . | 0,38 | 0,60 | Giove . . . . .   | 5,20  | 0,31 |
| Venere . . . . .   | 0,72 | 0,51 | Saturno . . . . . | 9,54  | 0,27 |
| Terra . . . . .    | 1,00 | 0,47 | Urano . . . . .   | 19,19 | 0,22 |
| Marte . . . . .    | 1,52 | 0,42 | Nettuno . . . . . | 30,07 | 0,20 |

Così, p. es., essendo oggi l'inclinazione dell'orbita di Saturno sull'equatore solare di circa  $5^\circ$ , se (facendo astrazione dalle perturbazioni prodotte in Saturno dall'attrazione degli altri pianeti durante tutta la sua esistenza) si pone tale valore al posto di  $I$ , troviamo  $I_0 = 18^\circ 25'$ ; la variazione totale dovuta al termine cosmogonico sarebbe quindi di oltre tredici gradi. Analogamente mentre l'eclittica è oggi inclinata sull'equatore solare di  $7^\circ 11'$ , la sua primitiva inclinazione doveva essere di  $15^\circ$  ecc.

In realtà però le variazioni dell'inclinazioni — se si tiene conto delle mutue perturbazioni — sono molto maggiori, sia perchè  $a_0$  è probabilmente più piccola di 0,05, sia in forza di un teorema di cui darò la dimostrazione in una prossima Nota parlando dei sistemi stellari, secondo il quale l'introduzione del termine cosmogonico nella legge di NEWTON tende a produrre la *complanarità* delle orbite.

Con l'occasione osserviamo che il prof. F. ZAGAR, in un suo recentissimo lavoro <sup>(1)</sup>, trova invece che a causa del termine cosmogonico la variazione totale dell'inclinazione dell'orbita di Saturno sarebbe stata di appena  $0',6$  (!) e ne deduce che la mia nuova teoria non spiega le deboli inclinazioni planetarie.

Ma, come già per la difficoltà di cui parlammo nella precedente Nota, egli si è ingannato per alcune involontarie sviste di calcolo. Infatti: 1° Egli calcola (cfr. mem. cit., § 8) la variazione totale di  $I$  cercando una relazione tra  $I$  ed  $E$ . Ora, *a priori*, ciò urta col fatto che  $E$  tende a zero assai più rapidamente di  $I$ . Dopo un certo tempo quindi, mentre  $I$  ha ancora variazioni notevoli,  $E$  si mantiene praticamente costante ed eguale a zero. Per stabilire una tale relazione, occorrerebbe quindi considerare anche i termini superiori. 2° Per una svista nel segno di un logaritmo, egli pone (formola [51]) al denominatore una quantità che va invece al numeratore, scrivendo  $a = C(1 - E^2)$  invece di  $a(1 - E^2) = C$ , con  $C$  costante. Ma anche così corretta, tale equazione — mentre è valida (come dimostrammo per primi, nel 1937, nella nostra Nota I) nel caso di un Sole puntiforme — risulta completamente fallace nel caso di un Sole esteso e ruotante. Basta osservare che in questo caso, mentre  $E$  si mantiene sempre piccola e tende a zero,  $a$  tende all'infinito, onde il prodotto  $a(1 - E^2)$  non può mantenersi costante. Lo ZAGAR non si è poi accorto che, una volta ammessa tale equazione, diminuendo  $E$ , dovrebbe diminuire anche  $a$  e quindi i pianeti dovrebbero avvicinarsi al Sole, invece di allontanarsi; cosa che è in opposizione non solo con i nostri, ma con i suoi stessi risultati. 3° Per altra svista, e sempre nel calcolo di  $I$ , egli dimentica di porre nella formola seguente alla [52] il valore dell'eccen-

<sup>(1)</sup> Cfr. F. ZAGAR, *Il moto di un punto attratto con particolare legge da un corpo esteso e ruotante* in «Pubbl. Osservatorio Astr. di Bologna», vol. III, n. 11 e «Mem. Soc. Astr.», vol. XIII, 2.



tricità  $E$  al denominatore. Se si considera che  $E$  tende rapidamente a zero, segue immediatamente quanto grande sia l'effetto nel risultato finale. L'equazione [54] a cui egli arriva tra  $E$  ed  $I$  è quindi fallace.

Si può aggiungere che non è lecito, come fa lo stesso prof. ZAGAR, assumere  $\omega$  costantemente eguale al valore attuale; mentre, come abbiamo visto,  $\omega$  era inizialmente circa 25 volte maggiore. Molto meno poi è lecito porre per  $E$  il suo valore attuale, dopo aver dato il valore iniziale  $E_0$ , giacchè la  $E$  attuale è affetta da tutte le perturbazioni, prodotte dall'attrazione degli altri pianeti, durante l'intera esistenza di Saturno. Ora noi abbiamo sempre considerato, come del resto fa anche lo ZAGAR, il caso unico pianeta e quindi abbiamo fatto astrazione dalle perturbazioni. Una volta quindi assunto il valore iniziale  $E_0$ , occorre porre per  $E$  ciò che risulta dal calcolo secondo la [9]. Anche dunque questa obbiezione contro la nuova teoria cosmogonica, si rivela inconsistente.

6. *Conclusioni.* — Terminiamo così la prima parte del nostro studio, per passare, in successivi lavori, dal sistema planetario ai sistemi stellari. Intanto, siamo lieti di vedere come la nostra teoria abbia già attirato l'attenzione degli studiosi. In proposito, oltre ai lavori già nominati del PLACINTEANU e dello ZAGAR, citiamo una Nota <sup>(1)</sup> del prof. J. CHAZY, il quale trova che il valore di  $\epsilon$  è in ogni caso minore dell'inverso della velocità della luce, e cioè di  $3,3 \cdot 10^{-11}$ ; risultato in perfetto accordo col nostro, che da  $a \approx$  il valore massimo  $4 \cdot 10^{-14}$ . E sopra tutto caldamente ringraziamo S. E. SOMIGLIANA, il quale nel discorso tenuto pochi mesi or sono per l'inaugurazione del nuovo anno dell'Istituto Lombardo Veneto, ha voluto fare una larga e lusinghiera esposizione <sup>(2)</sup> di questa nuova teoria cosmogonica.

<sup>(1)</sup> Cfr. J. CHAZY, *Sur une loi corrective de la loi de Newton* in « Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences », T. CCIX (1939). Nella seconda Nota (ib. CCX, n. 21), ora pervenutaci, lo stesso prof. J. CHAZY, esamina il nostro problema con i metodi della teoria delle perturbazioni e *conferma completamente* la nostra affermazione, secondo la quale *l'inclinazione dell'orbite planetarie sul piano dell'equatore solare tende a zero*.

<sup>(2)</sup> Cfr. C. SOMIGLIANA, *Ipotesi e discussioni cosmogoniche*. Discorso inaugurale nell'Adunanza solenne 5 novembre 1939-XVIII.



**Astronomia.** — *Sul numero delle stelle con piccola velocità spaziale rispetto al Sole.* Nota di ATTILIO COLACEVICH, presentata <sup>(1)</sup> da GIORGIO ABETTI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Alcune recenti ricerche <sup>(2)</sup> hanno rimesso in campo la questione del numero delle stelle con piccola velocità spaziale rispetto al Sole e conseguentemente l'esistenza o meno di un « ammasso del Sole ». In questa Nota comunico i risultati che si possono ricavare a tale proposito dalle ricerche eseguite tempo addietro da F. H. SEARES <sup>(3)</sup> aggiungendovi alcune considerazioni conclusive.

Poniamo:

$v$  = velocità spaziale di una stella in km/sec.

$T$  = » tangenziale » » »

$\theta$  = » radiale » » »

Indichiamo inoltre con l'indice zero quei valori di tali velocità che non sono corretti per il moto del Sole verso il suo apice.

W. S. ADAMS, G. STRÖMBERG e A. H. JOY <sup>(4)</sup> hanno stabilito, sulla base delle velocità spaziali di 1241 stelle, che la frequenza  $F$  dei valori di logaritmo  $v$  è bene espressa dalla nota curva degli errori:

$$[1] \quad F(\log v) d(\log v) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(\log v - A)^2} d(\log v).$$

<sup>(1)</sup> Nell'Adunanza del 17 maggio 1940-XVIII.

<sup>(2)</sup> L. GIALANELLA, *Nuove ricerche sull'« ammasso del Sole »*. « Rend. Lincei », vol. XXVI, dicembre 1937; ID., *Nuove ricerche sull'« ammasso del Sole »*. « Rend. Lincei », vol. XXVII, aprile 1938; ID., *Nuove ricerche sull'« ammasso del Sole »*, « Rend. Acc. d'Italia », ser. VII, vol. I, 1940; K. GRAF FERRARI, *Zur Frage der Realität des « Sonnenhaufens »*. « Astron. Nachrichten », Bd. 268, pag. 355, 1939.

<sup>(3)</sup> F. H. SEARES, *The distributions functions for stellar velocity*. « Contr. Mount Wilson », 272, 1924; ID. ID., *Mean parallaxes of stars of small proper motions*. « Contr. Mount. Wilson. », 282, 1924.

<sup>(4)</sup> W. S. ADAMS, G. STRÖMBERG and A. H. JOY, *The relationship of absolute magnitude to space velocity*. « Contr. M. Wilson », 210, 1921.

Partendo da questa distribuzione di  $\log v$ , SEARES ha determinato la distribuzione dei valori di  $\log T$ ,  $\log T_0$ ,  $\theta$ ,  $\theta_0$  trovando che essi seguono la distribuzione Gaussiana degli errori; in particolare ha trovato che la probabilità di trovare un valore  $T_0$  è data da:

$$[2] \quad P(\log T_0) d(\log T_0) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 (\log T_0 - \log \underline{T_0})^2} d(\log T_0)$$

$$\text{con } h = 2,18 \quad \log \underline{T_0} = 1,27 + 0,052 M - 0,0019 M^2$$

$M$  = grandezza assoluta di una stella.

Successivamente però lo stesso SEARES ha modificato la legge Gaussiana della distribuzione, dimostrando che, sempre in base a considerazioni di ordine generale circa la distribuzione del moto delle stelle, detta legge non era verificata per i piccoli valori di  $T_0$ , e precisamente che per  $T_0$  minore o uguale a 10 km/sec. essa doveva essere sostituita con buona approssimazione da

$$P(T_0) dT_0 = \frac{2}{\sigma} \frac{T_0}{T_1^2} dT_0 \quad \text{con} \quad \frac{2}{\sigma} = 0,172$$

cioè si aveva:

$$[4] \quad P(T_0) dT_0 = 0,00172 T_0 dT_0.$$

Allo scopo di poter facilmente eseguire un confronto con i risultati ottenuti recentemente, ho considerato lo stesso numero di stelle esaminato in quei casi, cioè le 6739 stelle contenute nel catalogo delle velocità radiali di J. H. MOORE (<sup>1</sup>). Si trova così la seguente formula che dà il numero delle stelle con velocità tangenziale compresa tra  $T_0$  e  $T_0 + dT_0$ :

$$[5] \quad P(T_0) dT_0 = 11,6 T_0 dT_0.$$

TABELLA I.

| km/sec.        | 0-1 | 1-2  | 2-3  | 3-4  | 4-5  | 5-6  | 6-7  | Totale |
|----------------|-----|------|------|------|------|------|------|--------|
| $P(T_0)$ . . . | 5,5 | 17,4 | 29,0 | 40,6 | 52,2 | 63,8 | 75,4 | 283,9  |
| $P(v_0)$ . . . | 5,4 | 10,1 | 18,6 | 25,8 | 33,2 | 40,0 | 48,7 | 181,8  |
| Osserv. . .    | 1   | 2    | 12   | 17   | 18   | 35   | 37   | 122    |

(<sup>1</sup>) *Publ. Lick. Obs.*, vol. XVIII, 1932.

I valori calcolati di  $P(T_0)$  sono dati nella Tabella I entro il valore limite di 7 km/sec. Volendo invece trovare il numero probabile  $P(v_0)$  di stelle che hanno velocità spaziale rispetto al sole minore di 7 km/sec. bisogna tenere conto anche della velocità radiale. Poichè questo calcolo non è stato eseguito da SEARES esponiamo il modo con il quale se ne è tenuto conto.

Si sa già che a piccoli valori di  $T_0$  devono corrispondere in via statistica piccoli valori di  $\theta_0$  e precisamente si trova che il valore medio aritmetico  $\bar{T}_0$  per un gruppo di stelle e quello corrispondente  $\bar{\theta}_0$  sono legati dalla relazione <sup>(1)</sup>:

$$[6] \quad \bar{T}_0^2 = 2 \bar{\theta}_0^2.$$

Si sono quindi assunti come valori  $T_0$  per ogni colonna della tabella I i valori rispettivamente  $0.5^2$ ,  $1.5^2$ ,  $2.5^2$  ecc., da cui con l'equazione [6] si sono ricavati i corrispondenti valori di  $\theta_0$ .

Bisogna ora considerare il fatto che i valori di  $\theta_0$  che concorrono a formare la media hanno una dispersione attorno al valore medio assunto.

Ho calcolato questa dispersione in accordo con le formule proposte da SEARES <sup>(2)</sup> a tale proposito ed ho incluso nel computo di  $P(v_0)$  solo quella frazione dei valori di  $\theta_0$  per cui si aveva:

$$\begin{array}{llllll} 0. \leq T_0^2 + \theta_0^2 < 1^2 & \text{per la prima} & \text{colonna numerica della tabella I} \\ 1^2 \leq T_0^2 + \theta_0^2 < 2^2 & \text{»} & \text{seconda} & \text{»} & \text{»} & \text{»} \\ & & & & & \text{ecc.} \end{array}$$

ottenendo la seguente distribuzione dei valori di  $v_0$ .

L'ultima riga della tabella 2 è riportata nella tabella 1 e dà la distribuzione  $P(v_0)$  per  $v_0$  minore di 7 km/sec.

Ricordiamo che questo valore di  $P(v_0)$  risulta da considerazioni generali sul moto, sulla luminosità e sulla densità spaziale delle stelle; esso è stato ricavato sulla base della frequenza delle velocità spaziali di 1241 stelle. I successivi calcoli statistici fatti su questa base da SEARES, il modo con cui è stato fatto il computo della dispersione di  $v_0$  riassunto nella Tabella II, e la possibilità di uno scostamento della realtà dal valore statistico devono essere tenuti presenti quando si voglia eseguire un confronto con i valori osservati.

A tale proposito servono ottimamente i risultati numerici ottenuti da L. GIALANELLA <sup>(3)</sup> sul numero delle stelle con moto spaziale rispetto

<sup>(1)</sup> SEARES, « Contr. M. Wilson », 272, pag. 6.

<sup>(2)</sup> SEARES, « Contr. M. Wilson », 272, formule 65, 66.

<sup>(3)</sup> GIALANELLA, « Rend. Lincei », vol. XXVI, dicembre 1937.

al Sole inferiore a 7 km/sec. che si trovano tra quelle elencate nel catalogo di 6739 stelle di MOORE già citato. Dalle Tabelle pubblicate da GIALANELLA ricavo i valori osservati, contenuti nell'ultima riga della mia tabella I. I valori ivi dati sono direttamente confrontabili con quelli teorici.

TABELLA II.

| $T_0 \backslash v_0$ | 0-1 | 1-2  | 2-3  | 3-4  | 4-5  | 5-6  | 6-7  | > 7   | Totale |
|----------------------|-----|------|------|------|------|------|------|-------|--------|
| 0-1 . . . . .        | 5,4 | 0,1  | —    | —    | —    | —    | —    | —     | 5,5    |
| 1-2 . . . . .        | —   | 10,0 | 6,0  | 1,3  | 0,1  | —    | —    | —     | 17,4   |
| 2-3 . . . . .        | —   | —    | 12,6 | 9,6  | 4,5  | 1,7  | 0,5  | —     | 28,9   |
| 3-4 . . . . .        | —   | —    | —    | 14,9 | 12,6 | 6,6  | 3,8  | 2,7   | 40,6   |
| 4-5 . . . . .        | —   | —    | —    | —    | 16,0 | 13,9 | 8,9  | 13,4  | 52,2   |
| 5-6 . . . . .        | —   | —    | —    | —    | —    | 17,8 | 16,6 | 29,4  | 63,8   |
| 6-7 . . . . .        | —   | —    | —    | —    | —    | —    | 18,9 | 56,5  | 75,4   |
| Totale . . .         | 5,4 | 10,1 | 18,6 | 25,8 | 33,2 | 40,0 | 48,7 | 102,0 | 283,8  |

Si rileva dal confronto che il numero delle stelle effettivamente esistenti con tali moti è inferiore a quello calcolato teoricamente nel rapporto circa 1 : 1.5. Tale differenza è probabilmente imputabile al metodo statistico usato, ma è confortante notare che, tenuto conto di questa differenza e degli scarti singoli inevitabili in ogni ricerca statistica quando gli elementi considerati sono pochi, i valori variano in buon accordo con quanto è previsto dalla formula teorica [5], che vale anche per le  $v_0$ , cioè  $P(v_0)$  osservato cresce proporzionalmente al valore di  $v_0$  stesso.

Si deve quindi concludere che il numero delle stelle con piccolo moto spaziale rispetto al sole che sono state osservate, è con tutta probabilità in accordo con quello previsto dalla statistica in base a considerazioni di ordine generale e che conseguentemente non è probabile l'esistenza, intesa in senso fisico, di un « ammasso solare ». Un accordo migliore tra la teoria e l'osservazione potrà essere trovato con metodo rigoroso solo dall'analisi delle velocità di un insieme omogeneo di stelle. Ho intenzione di eseguire tale ricerca, che dovrebbe risultare, utile anche da vari altri punti di vista.

Prima di chiudere accennerò ancora ad un lavoro comparso sul medesimo argomento di K. GRAF FERRARI. Questo A. in una sua breve Nota basandosi sulla distribuzione di  $T$  (e non come è più logico in questo caso di  $T_0$ ) giunge a risultati di un altro ordine di grandezza e trova che il numero calcolato è circa 3 volte inferiore di quello osservato. Bisogna però rilevare a questo proposito il fatto che egli non tiene presente la modifica alla legge Gaussiana nella distribuzione delle velocità pubblicata successivamente da SEARES, modifica che evita una improbabile rapida caduta verso zero del numero delle piccole velocità.

---

**Astronomia.** — *Prospettive della ipotesi nebulare di Laplace.*

Nota di TITO NICOLINI, presentata <sup>(1)</sup> da LUIGI CARNERA, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. La ipotesi nebulare di LAPLACE sulla origine del sistema planetario, ha continuato anche in anni recenti a destare interessamento particolare. Date le difficoltà notevoli di vario genere che essa pone, le ricerche relative sono per necessità di cose rivolte ad aspetti schematici particolari della teoria, mentre una presentazione sintetica giustificata che deduca effettivamente le conseguenze osservate, sembra oggi impresa non possibile. Lo stesso LAPLACE, con evidente cognizione delle difficoltà gravissime da superare, preferì dare alla sua teoria, alla fine della *Exposition du Système du Monde*, una veste intuitiva e priva di substrato analitico. Fino alle ricerche più recenti, si è stati costretti a giustificare, con insufficiente riferimento analitico, soltanto aspetti particolari, e ciò inoltre ha significato ripetutamente complicare altri lati della visione sintetica.

Le difficoltà cui dà luogo la ipotesi nebulare sono state messe in evidenza da varie ricerche ben note; tuttavia meno in considerazione è a volte tenuto il loro significato d'insieme, e corrono ripetutamente in merito affermazioni discutibili.

Vari ricercatori hanno anche modificata la ipotesi originaria nei tentativi di dedurne miglior accordo coi fatti; così facendo però è possibile travisarla completamente. Anzitutto quindi occorre intendersi sulle caratteristiche della ipotesi di LAPLACE; se in tale denominazione dovesse includersi in blocco quanto riporta la *Exposition du Systeme du Monde*, si dovrebbe senz'altro rigettare la ipotesi. Ma esaminando il valore di una teoria, occorre invece vedere se in essa possa individuarsi un'idea, un nucleo essenziale che porti a qualche effettiva estensione di conoscenze, indipendentemente da particolari che potrebbero risultare inutili o addirittura erronei.

Leggendo l'opera del LAPLACE, c'è da domandarsi se le linee fondamentali risiedano nella costituzione gassosa della estensione nebulare, nella forte condensazione centrale, nella rotazione uniforme, o altro. Vi è

---

<sup>(1)</sup> Nell'Adunanza del 17 maggio 1940-XVIII.

certo modo di interpretare personalmente le cose. Ma per una esposizione realmente conveniente delle idee del LAPLACE, la interpretazione dei presupposti essenziali dovrebbe riassumersi in quanto segue.

L'elemento di partenza è una massa nebulare rotante, di struttura da definire <sup>(1)</sup>, che dà origine ai pianeti ed al sole col processo definito dalle due caratteristiche seguenti:

1° *si disgrega nelle masse separate per eccesso di rotazione;*

2° *il disgregamento avviene col rilasciamento di materia lungo tutto l'equatore;* da anelli successivamente formati si genererebbero i pianeti, la massa centrale costituirebbe il Sole.

La evidenza di studi analitici successivi piuttosto dettagliati, ha mostrato che la struttura generale del modello soddisfacente a queste due condizioni essenziali, appare precisata in una massa nebulare rarefatta all'esterno, con forte condensazione al centro, condizione intuita dal LAPLACE stesso; propriamente la nebulosa di LAPLACE deve intendersi essenzialmente specificata nel noto *modello di ROCHE*.

La importante concezione del LAPLACE ha avuto per primo scopo evidentemente di spiegare la complanarità e la debole eccentricità delle orbite planetarie; a parte poi la questione se il modello riesca più o meno felicemente a spiegare le altre particolarità del sistema planetario (rotazioni ecc.) ed anzi la stessa formazione dei pianeti e del Sole.

2. Al bordo equatoriale del modello lenticolare di ROCHE (con massa concentrata in un nucleo), la forza centrifuga eguaglia la gravità, e il moto circolare della materia è semplice moto orbitale; si ha dunque rilasciamento di materia mentre procede la contrazione della nebulosa. Pel sistema solare d'altronde la necessità della condensazione centrale appare manifesta dalla considerazione dei momenti delle quantità di moto, dei quali particolarmente importa la proprietà conservativa. Per un pianeta di orbita circolare il momento d. q. d. m. è

$$\mu = mrv = mr^2 \omega$$

essendo  $m$  la massa,  $r$  il raggio orbitale,  $v$  la velocità lineare,  $\omega$  la angolare di rivoluzione. Per un corpo rotante,  $k$  essendo il *raggio di girazione*

$$\mu = mK^2 \omega$$

Pel sistema planetario si hanno i risultati seguenti relativi al moto orbitale terrestre,  $\mu_1$  essendo il momento per unità di massa:

---

(<sup>1</sup>) La costituzione gassosa o pulverulenta ecc., può considerarsi meno essenziale nel porre la ipotesi. Essa potrebbe esser dedotta dalle condizioni realmente necessarie, anziché supposta, come dal LAPLACE, con possibilità di errore.



| <i>Pianeti</i> | ♂    | ♀    | ♂    | ♂    | ♂    | ♂    | ♂    | ♂    | P     |
|----------------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|
| $\mu$          | 0.01 | 0.68 | 1.00 | 0.13 | 722  | 293  | 64   | 94   | 1.2 ? |
| $\mu_1$        | 0.61 | 0.85 | 1.00 | 1.24 | 2.28 | 3.08 | 4.39 | 5.49 | 6.00  |

Pel  $\mu$  relativo alla rotazione solare non può aversi una valutazione attendibile; se il sole fosse omogeneo sarebbe  $\mu = 40$  unità della tabella, ma non si conosce la distribuzione delle densità.

Adottando il modello di MILNE, di grande condensazione centrale,  $\mu$  sarebbe assai ridotto; d'altro lato gli strati interni solari dovrebbero ruotare molto più veloci degli esterni, rallentati dalla *viscosità radiativa* <sup>(1)</sup>. Ad ogni modo l'ordine di grandezza del  $\mu$  relativo alla rotazione solare non può scostarsi molto dalla cifra data. Così i pianeti (e in modo soverchiante Giove e Saturno) che hanno una frazione piccolissima della massa del sistema, ne trasportano quasi per intero il momento rotazionale (le rotazioni planetarie risultano di importanza trascurabile).

Per interpretare esattamente la natura di questa difficoltà, è da riflettere che se le masse dei pianeti esterni fossero abbastanza piccole, l'anomalia sfuggirebbe all'osservazione, ma rimarrebbe altrettanto inspiegabile la considerazione dei momenti d. q. d. m. per unità di massa. Questi infatti per tutti i pianeti non potrebbero avere valori diversi dai riportati, dovendo detti valori corrispondere ai movimenti orbitali; al contrario la materia ruotante all'equatore solare non è sostenuta dal moto orbitale, ma quasi per intero dalla pressione degli strati sottostanti. Questo stesso concetto si può tradurre nella seguente forma: la nebulosa laplaciana che sotto la forma lenticolare di ROCHE avrebbe abbandonato materia per tutta l'estensione da Nettuno e Plutone fino a Mercurio, come mai si sarebbe ridotta all'attuale Sole, tanto lontano dalla forma lenticolare e dalla possibilità di perdere materia per rotazione ?

Portando i pianeti e i loro  $\mu$  nella massa solare, questa subirebbe un aumento insignificante, mentre la rotazione si porterebbe ad un periodo di 10<sup>h</sup> circa; si sarebbe ancora, come nel caso di Giove, molto lontani da perdite di massa per forza centrifuga. D'altro lato, si consideri la nebulosa presolare ruotante estesa alle orbite degli ultimi pianeti, e nella sua rotazione uniforme sia distribuito il momento d. q. d. m. complessivo del sistema solare. Per il rilasciamento rotazionale di materia all'equatore, e cioè per imporre con tale  $\mu$  complessivo la velocità angolare dei pianeti estremi, dovrebbe aversi un estremo grado di condensazione centrale; conseguenza da cui si potrebbe sfuggire solo supponendo un  $\mu$  iniziale assai superiore all'attuale. Questa questione della necessità della condensazione centrale, del resto di comprensione intuitiva, è posta chiaramente

<sup>(1)</sup> Ved. JEANS, *Astronomy and Cosmogony*, pag. 274.

in luce dalle moderne trattazioni di cosmogonia, e qui non è il caso di insistere ancora al riguardo di detta deduzione.

Così in corrispondenza ad ogni distanza planetaria, la nebulosa presolare doveva avere una densità esterna  $\rho_e$  non superiore ad una piccola frazione della media nebulare  $\rho_m = \frac{M}{V}$ . D'altra parte un noto teorema dovuto al POINCARÉ e meglio precisato dal CRUDEL (1) impone che la densità di un anello planetario non scenda sotto un certo limite perchè la materia non sia dispersa, ma si condensi effettivamente nella massa planetaria. Precisamente, secondo il limite di CRUDEL,  $f$  essendo la costante di gravitazione:

$$\rho_e > \frac{\omega^2}{\pi f}$$

Così si hanno per  $\rho_e$  due limitazioni; passando però ai valori numerici (si rinvia in proposito all'opera citata del JEANS, p. 397) queste limitazioni risultano nettamente contraddittorie.

Questo sguardo sintetico alla difficoltà dei momenti delle quantità di moto, ne mostra il significato decisamente sfavorevole per la ipotesi laplaciana, e nessuna via di superare realmente la difficoltà è stata intraveduta, nonostante qualche interessante tentativo (2).

Una ulteriore osservazione: la difficoltà di Phobos, il cui periodo di rivoluzione è circa 1/3 di quello della rotazione di Marte, è in genere messa in falsa luce, presentandola come una difficoltà a sè. Infatti questa anomalia è evidentemente da identificare con quella riferita del momento eccessivo dei corpi gravitanti rispetto a quello del corpo centrale rotante, e quindi non richiede alcuna spiegazione a parte; ed anzi costituisce la più evidente esemplificazione osservabile della difficoltà considerata. Di fronte alla ipotesi nebulare discussa, la rapida rivoluzione di Phobos non affaccia maggiori necessità esplicative della lenta rivoluzione di Nettuno o Plutone. Certo Marte può aver avuta la rotazione rallentata per le maree solari, ma questo od altri ricorsi (3) sono inutili, la difficoltà rimarrebbe, identificata con quella discussa per i planetari e solare, anche se Marte ruotasse molto più velocemente. Considerazioni simili valgono per l'anello interno di Saturno: la sua rivoluzione, di poco più rapida della rotazione del pianeta, non pone alcuna questione a parte.

(1) Qui viene riportato il limite di CRUDEL quantunque la dimostrazione relativa (« Rend. Acc. Lincei », serie V, vol. 19, 1910) sia data per estensioni a connessione semplice. D'altronde è indifferente considerare il limite di POINCARÉ  $\frac{\omega^2}{2\pi f}$  o quello di CRUDEL agli effetti delle presenti considerazioni.

(2) Ved. particolarmente V. NOBILE, *Sul valore di un argomento addotto contro la teoria cosmogonica di Laplace*. « M. S. A. I. », vol. XII, pag. 97.

(3) Ved. POINCARÉ, *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques*, pag. 66.

3. Le « *Leçons sur les Hypothèses Cosmogoniques* » di POINCARÉ contengono alla p. 23 un'affermazione erronea, il cui significato è stato rilevato dal prof. ARMELLINI <sup>(1)</sup>. Precisamente il POINCARÉ afferma che il suo teorema sopra ricordato dà « un limite inferiore alla densità dell'anello, ed a fortiori della nebulosa. Ora quando si prende per  $\omega$  la velocità angolare di Nettuno, si trova per  $\rho_e$  una cifra talmente grande, che in conseguenza la massa totale della nebulosa sarebbe molto superiore a quella del sole ». Invece seguendo il calcolo di ARMELLINI, la massa nebulare risulta inferiore a quella del sole (con la  $\rho_e$  minima). Come rileva l'ARMELLINI, se fosse stata valida l'affermazione riportata, il teorema di POINCARÉ e CRUDELÌ avrebbe significato, da sé solo, l'abbandono senz'altro della ipotesi di LAPLACE sotto la forma originaria: per avere la densità minima esterna confacente ad una condizione necessaria  $\left(\rho_e > \frac{\omega^2}{\pi f}\right)$  di stabilità degli anelli, il sistema solare avrebbe dovuto avere una massa assai superiore all'attuale.

I testi del POINCARÉ, oltre al pregio del valore concettuale, hanno quello della grande chiarezza; ora nel punto in discussione ed in altri ancora delle *Leçons* s. l. h. c., non è così. Sembra evidente un errore di redazione, ed il prof. ARMELLINI da quanto scrive nella seconda Nota sembra aderire a questo punto di vista. La conclusione riferita è errata, ed errato ancora è il suo presunto significato, e cioè che verrebbe dimostrata la necessità della condensazione centrale.

Poichè sembra difficile attribuire al POINCARÉ una caduta in simili errori <sup>(2)</sup>, si può domandare se è possibile ricostruire il suo pensiero dal testo redatto, erroneo e forse incompleto. In realtà la necessità della condensazione centrale della nebulosa è una questione indipendente, discussa indietro, e connessa al tipo di rottura della massa ed al momento d. q. d. m. osservato. Ora se alla necessità della condensazione centrale si aggiunge la condizione di una densità esterna avente almeno il valore  $\rho_e = \frac{\omega^2}{\pi f}$  per la formazione e stabilità di masse compatte separate, la conclusione del testo è perfettamente vera: se si prende per  $\omega$  la velocità angolare di Nettuno si trova per  $\rho_e$  una cifra talmente grande, che in conseguenza di essa la massa totale della nebulosa sarebbe molto superiore a quella

<sup>(1)</sup> « Rendic. Acc. Linc. » (fis. mat.), vol. XXIII, serie 6ª; ed « Atti R. Acc. d'Italia », Rendic. fis. mat., serie 7ª, vol. I.

<sup>(2)</sup> Che il pensiero di POINCARÉ non sia reso dal testo è anche evidente per questo: mentre la erronea e problematica conclusione sarebbe di grave peso contro la ipotesi di Laplace dal punto di vista teorico delle figure d'equilibrio, il testo non sembra rilevare chiaramente ciò. Del resto la nuova irrealistica difficoltà non era stata rilevata da altri cosmogonisti. Il JEANS (« MN », vol. 77, pag. 194) segue letteralmente il POINCARÉ, evita soltanto l'errore senza alcun rilievo.

del sole. Ma certo questa conclusione nel testo è presunta da una sola delle due premesse necessarie (teorema di POINCARÉ), inoltre apparentemente posta a dimostrare proprio la 2<sup>a</sup> premessa; quindi conservano il loro valore le osservazioni di ARMELLINI.

Una Nota di BELORIZKY sull'argomento è stata pubblicata dal *Journal des Observateurs* (vol. XX, n. 5). La Nota espone giustamente varie considerazioni critiche sulla ipotesi di LAPLACE; tuttavia dilungandosi nella critica dei rilievi dell'ARMELLINI non sembra porli in complesso nella loro giusta luce. Anzitutto riportando la conclusione erronea del testo la completa: « Si deve dunque abbandonare la ipotesi eventuale in cui non si avrebbe condensazione centrale ». E appresso: « la sola cosa cambiata è che in questo caso la considerazione della stabilità dell'anello non prova più la necessità della condensazione centrale ». Il significato dell'errore del testo non è qui giustamente prospettato dal BELORIZKY; non sarebbe il caso di simili irrilevanti osservazioni, ma a Nota in discussione è stata originata proprio dall'argomento in parola. A parte ciò, i rilievi di ARMELLINI non dovrebbero interpretarsi come una presunzione di salvare l'ipotesi di LAPLACE, e su questo proposito l'ARMELLINI è abbastanza esplicito alla fine della sua prima Nota citata. Del resto le difficoltà della ipotesi di LAPLACE sono convenientemente ricordate dal BELORIZKY.

4. Oltre alla rilevante difficoltà relativa ai momenti delle quantità di moto, l'ipotesi nebulare laplaciana ne presenta altre gravi, ma esse si trovano bene esposte in varie trattazioni sull'argomento, quindi non è qui il caso dilungarsi oltre i concetti discussi. Basterà ricordare ancora che in una nebulosa gassosa occorre tener conto della dissipazione esterna di materia per agitazione molecolare. A causa delle basse densità esterne della nebulosa originaria, il « libero percorso medio » delle molecole risulta assai grande, e non sembra possibile l'agglomeramento per gravità di masse come le planetarie. Una solidificazione subitanea eviterebbe la difficoltà permettendo ancora la coesione gravitazionale degli anelli nebulari e delle masse planetarie. Ma allora la solidificazione avrebbe dovuto anche preesistere alla separazione degli anelli, e si torna cioè ad un modello nebulare meteoritico o pulverulento, le cui difficoltà sono anche note.

Concludendo le brevi osservazioni esposte, è generale la convinzione che nonostante tentativi recenti di elucidare qualche aspetto particolare della ipotesi nebulare di LAPLACE, essa resti, di fronte alle conoscenze attuali, assai inadeguata a spiegare la formazione del sistema planetario.

I concetti particolari sui quali l'ipotesi si sviluppa in più punti, come la rotazione solidale della immensa estensione nebulare rarefatta, la formazione di anelli dotati di coesione gravitazionale, a intervalli successivi, da un modello ad evoluzione caratteristicamente graduale, ecc. appaiono privi di reale fondamento fisico.

**Astronomia (Astrofisica).** — *Lo Spettro continuo della corona solare* <sup>(1)</sup>. Nota di GUGLIELMO RIGHINI, presentata <sup>(2)</sup> da GIORGIO ABETTI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Durante l'eclisse totale di sole del 19 giugno 1936 il prof. ABETTI, capo della Missione Astronomica Italiana a Sara nel distretto di Orenburg (U.R.S.S.), riuscì ad ottenere due spettri della corona impiegando lo spettrocoronografo doppio, costituito da due strumenti simili portati da un unico asse equatoriale azionato da un motore a peso <sup>(3)</sup>. Uno dei due strumenti, che nel seguito indicheremo con la lettera *U*, era montato con parti ottiche in *uvio* per la fotografia della zona blu violetta, da  $\lambda 3400$  a  $\lambda 5000$  Å.; l'altro (strumento *V*) con parti ottiche in *flint* perchè destinato a riprendere la zona visibile, da  $\lambda 4000$  a  $\lambda 6500$  dello spettro della corona.

Gli spettrogrammi sono ben riusciti <sup>(4)</sup> ed ogni lastra è stata debitamente calibrata; su di essi è stato quindi possibile eseguire uno studio fotometrico sia dello spettro continuo che dello spettro di righe. Nel presente lavoro si riferiscono i risultati relativi allo spettro continuo, rimandando ad altra Nota quelli concernenti le righe di emissione.

Benchè lo spettrocoronografo sia stato ampiamente descritto, si crede opportuno per maggior chiarezza dare qui le principali caratteristiche comuni ai due strumenti che costituiscono il complesso, rimandando per ulteriori particolari alla Nota citata.

*Obiettivo principale:* apertura mm. 150; focale mm. 1500; rapporto  $f:10$ . Immagine del Sole sulla fenditura circa mm. 15.

*Spettrografo:* Collimatore: elemento di specchio parabolico fuori dell'asse, apertura mm. 80; focale mm. 600; rapporto  $f:7.5$ . Prismi: n. 2 di  $60^\circ$  faccie  $60 \times 90$  mm. Obiettivo: tripletto tipo Taylor apertura mm. 70; focale mm. 500; rapporto  $f:7.2$ .

Lo strumento *U* può dare uno spettro di circa mm. 37 fra  $\lambda 3500$  e  $\lambda 4500$  Å., il *V* invece è capace di dare uno spettro di mm. 50 fra  $\lambda 4500$

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nel R. Osservatorio Astrofisico di Arcetri-Firenze.

<sup>(2)</sup> Nell'Adunanza del 17 maggio 1940-XVIII.

<sup>(3)</sup> « Memorie della R. Accademia d'Italia », vol. IX, pag. 157, 1938.

<sup>(4)</sup> Loc. cit. pag. 214 e fig. 53.

e  $\lambda$  7000 Å. Nel progettare l'ottica degli spettrografi la dispersione è stata scelta in modo da indebolire sufficientemente lo spettro continuo della corona allo scopo di permettere lo studio delle righe, cercando però un giusto compromesso fra dispersione e luminosità. Ambedue gli strumenti sono provvisti di dispositivi per la rettifica in ascensione retta e declinazione in modo da rendere rigorosamente paralleli gli assi ottici, e inoltre di un microscopio a riflessione e debole ingrandimento, che permette la guida mediante l'osservazione dell'immagine del sole eclissato proiettata sulla superficie riflettente della fenditura.

Gli strumenti vennero accuratamente rettificati nei giorni precedenti alla eclissi e numerose prove di focamento furono eseguito sia con la luce del cielo che con un arco a *Fe*. La fenditura dei due spettrografi venne orientata in modo da essere tangente al lembo del sole nell'angolo di posizione del 2° contatto. La posa sulla corona fu eseguita puntando la fenditura a circa 0'.8 dal lembo Est del sole escludendo così tutta la cromosfera che come è noto raggiunge l'altezza media di 10'', e guidando poi mediante segni di riferimento stabiliti sul piano della fenditura stessa. Gli otturatori furono aperti al 10° secondo della totalità e chiusi al conto di 100, mentre la fine della totalità ebbe luogo al 118° secondo. Il pericolo di avere negli spettrogrammi righe di assorbimento e spettro continuo del sole direttamente o per effetto della luce diffusa si può quindi escludere, e solo nello spettro *U*, come si dirà in seguito, si sono avute le *H* e *K* del *Ca II* probabilmente per la presenza di una protuberanza in prossimità dell'angolo di posizione puntato. La larghezza della fenditura degli spettrografi fu mantenuta a mm. 0.10. Quale materiale sensibile abbiamo adoperato le lastre Cappelli-Ferrania  $9 \times 12$  cm., emulsione extra rapida ortocromatica (HD 600) per lo spettro violetto *U*, ed emulsione pancromatica extra rapida (HD 350) per lo spettro visibile *V*. Ambedue i tipi erano resi anti-alo per colorazione dorsale.

Le condizioni di osservazione furono le seguenti:

|                                               |                                                |          |
|-----------------------------------------------|------------------------------------------------|----------|
| Secondo contatto . . . . .                    | 4 <sup>h</sup> 17 <sup>m</sup> 33 <sup>s</sup> | T. M. G. |
| Terzo contatto . . . . .                      | 19 31                                          |          |
| Durata della totalità . . . . .               | 118 <sup>s</sup> .6                            |          |
| Angolo di posizione del 2° contatto . . . . . | 95° 6                                          |          |
| Altezza del sole sull'orizzonte . . . . .     | 37° 56'                                        |          |
| Angolo orario del Sole . . . . .              | 3 <sup>h</sup> 51 <sup>m</sup> 36 <sup>s</sup> | Est      |
| Inizio della posa . . . . .                   | 4 17 43                                        | T. M. G. |
| Fine della posa . . . . .                     | 19 13                                          |          |
| Durata della posa . . . . .                   | 90 <sup>s</sup>                                |          |

Stato del cielo: sereno, calma, veli all'orizzonte.



Lo spettro *U* si estende da 3380 Å a 5400 Å circa con una notevole diminuzione di annerimento nel verde azzurro dovuto alla minore sensibilità della emulsione; lo spettro *V* si estende invece da 4000 Å a 6700 Å con densità abbastanza costante. Ai lati dello spettro *U* si vede nella negativa un debole spettro di assorbimento che è da attribuirsi alla corona esterna. Infatti la lunghezza utile della fenditura era di circa 50 mm. e il diametro dell'immagine del sole eclissato di soli 15 mm., la fenditura tagliava quindi la corona in punti assai lontani dal bordo del sole appartenenti alla corona esterna. Questo spettro di assorbimento non è visibile nella lastra *V* causa la maggiore dispersione e la piccola sensibilità della emulsione fotografica.

Le differenze di densità che si riscontrano nel senso della larghezza degli spettri sono da attribuirsi alla diversa intensità nei punti corrispondenti della corona.

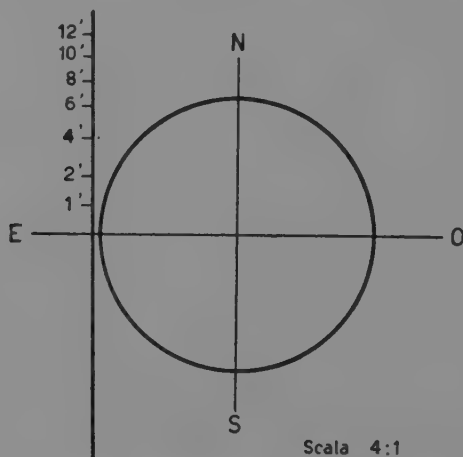


Fig. 1. — Posizione della fenditura rispetto al bordo solare.

Sovrapposto allo spettro continuo si nota pure il caratteristico spettro di righe della corona nel quale mancano totalmente le righe di origine cromosferica. Nello spettro *U* si vedono le due righe *H* e *K* del *Ca II* che sono evidentemente righe di protuberanza, e nello spettro *V* alle lunghezze d'onda 5890 Å e 6300 Å sono appena percettibili due bande di assorbimento; manca invece qualsiasi traccia di righe di emissione dell'idrogeno.

La parte non impressionata delle lastre è trasparente, ciò significa che l'intensità della luce diffusa dalle parti ottiche e dalla atmosfera era probabilmente inferiore alla soglia di sensibilità delle emulsioni fotografiche.

La posizione della fenditura relativamente al disco solare risulta dalla fig. 1: si sono pure indicate le distanze dal bordo del sole in primi di arco dei diversi punti della fenditura.



### *La calibrazione fotometrica.*

La calibrazione fotometrica delle lastre è stata eseguita a distanza di qualche ora della fine della totalità. Si erano previste tre serie di spettri di calibrazione per ogni strumento e precisamente:

- 1° spettri di una sorgente campione a temperatura nota;
- 2° spettri del cielo con filtro graduale platinato;
- 3° spettri di un arco a Fe con filtro graduale.

Le sorgenti campione di cui disponevamo erano due lampade Philips con filamento a nastro di tungsteno pervenuteci in dono dal laboratorio di Fisica di Utrecht (Olanda). La lampada n. 1002 aveva il bulbo cilindrico interamente di vetro e doveva servire per la zona visibile dello spettro; nell'altra lampada n. 250 il bulbo era pure in vetro ma di forma speciale atta a riflettere verso l'alto la radiazione emessa posteriormente dal filamento, e inoltre portava una finestra di vetro di quarzo a facce piane e parallele. La taratura relativa di queste lampade era stata eseguita pochi mesi prima nel laboratorio di Fisica della Università di Utrecht, e il loro certificato dava la relazione fra la intensità di corrente di alimentazione e la temperatura « vera » del centro del filamento.

Per ottenere gli spettri di calibrazione si è proiettato sulla fenditura dello spettrografo a mezzo di un obbiettivo Steinheil di 28 mm. di apertura utile e di 230 mm. di focale, l'immagine della parte centrale del filamento. L'obbiettivo era situato ad una distanza di 750 mm. dal piano della fenditura e il cono luminoso che ne usciva aveva una apertura relativa lineare di 1:27 circa, inferiore a quella del collimatore dello spettrografo. In tali condizioni tutto il flusso luminoso che attraversava la fenditura investiva il collimatore.

L'intensità della corrente di alimentazione delle lampade era controllata da un millivoltmetro Weston-Galileo in derivazione su di un ponte di resistenza nota (shunt), che permetteva la lettura al 0.05 ampère. Variando la corrente entro limiti stabiliti dalle prove preliminari; si sono ottenuti 10 spettri della lampada tutti con la medesima posa; come scala di riferimento per le lunghezze d'onda si sono fotografati due spettri della luce cielo allo zenit.

Una seconda serie di spettri di calibrazione è stata ottenuta illuminando un filtro graduale platinato posto sulla fenditura dello spettrografo con la luce del cielo allo zenit diffusa da uno schermo bianco inclinato di 45° sull'orizzonte. A contatto del filtro graduale era stato posto un doppietto acromatico di mm. 42 di apertura e di mm. 400 di focale allo scopo di ottenere un'immagine del diffusore nel piano dei prismi e garantire così l'uniforme illuminazione della fenditura.

Non fu possibile realizzare la terza serie di spettri di calibrazione con arco a Fe per la mancanza temporanea di energia elettrica a tensione

conveniente che veniva di solito fornita da una piccola centrale termoelettrica locale.

Per le lastre di calibrazione si impiegarono le gemelle di quelle adoperate per gli spetttri della corona; gli spetttri della lampada oltre che per determinare la curva di calibrazione delle lastre servirono alla correzione delle misure per la sensibilità della emulsione fotografica ed alla determinazione della *brillanza energetica in unità assolute* della corona.

TABELLA I.

*Lastre eseguite durante e dopo l'eclissi.*

| Lastra         | larghezza della fenditura | tempo di posa   | Sorgente                  | intensità di corrente<br>ampere |       |      |       |
|----------------|---------------------------|-----------------|---------------------------|---------------------------------|-------|------|-------|
| U <sub>1</sub> | 0.10                      | 90 <sup>s</sup> | Corona                    |                                 |       |      |       |
| U <sub>2</sub> | 0.10                      | 90              | Lampada N° 250            | 7.35                            | 7.55  | 7.80 | 8.10  |
|                |                           |                 |                           | 8.40                            | 8.80  | 9.42 | 10.00 |
|                |                           |                 |                           | 10.60                           | 11.22 |      |       |
| U <sub>3</sub> | 0.05                      | 90              | Luce del cielo allo zenit |                                 |       |      |       |
|                | 0.08                      | 90              |                           |                                 |       |      |       |
|                | 0.12                      | 90              | Filtro platinato          |                                 |       |      |       |
| V <sub>1</sub> | 0.10                      | 90              | Corona                    |                                 |       |      |       |
| V <sub>2</sub> | 0.10                      | 90              | Lampada N° 1002           | 7.5                             | 7.7   | 7.9  | 8.2   |
|                |                           |                 |                           | 8.5                             | 8.8   | 9.1  | 9.6   |
|                |                           |                 |                           | 10.2                            | 10.8  |      |       |
| V <sub>3</sub> | 0.04                      | 90              |                           |                                 |       |      |       |
|                | 0.07                      | 90              | Luce del cielo allo zenit |                                 |       |      |       |
|                | 0.10                      | 90              |                           |                                 |       |      |       |
|                | 0.12                      | 90              | Filtro graduale           |                                 |       |      |       |

Le tre lastre U e così pure le tre V sono state sviluppate simultaneamente in metol idrochinone per 5 minuti alla temperatura di circa 16 centigradi, fissate in fissaggio acido per 20 minuti e poi lavate con cura per oltre un'ora. Particolare attenzione si è posta perchè le lastre fossero riparate dalla polvere della steppa durante l'essicazione.

Le U sono riuscite bene; delle altre la V<sub>3</sub> è risultata sottoesposta causa l'accumularsi rapido di nubi temporalesche che disturbarono il

regolare svolgimento della posa. Però anche la sola lastra  $V_2$  con 10 spettri della lampada è sufficiente per la calibrazione della  $V_1$ .

### *Taratura del filtro graduale.*

Il filtro graduale adoperato per ottenere gli spettri di calibrazione con la luce diffusa del cielo è un  $K\ 58$  di ZEISS già altre volte impiegato per diverse ricerche alla torre solare di Arcetri <sup>(5)</sup>. Benchè fosse noto il fattore di trasmissione del deposito catodico di platino per alcune zone dello spettro, si è creduto opportuno determinarne l'intera curva spettrale per le lunghezze d'onda comprese fra 3400 Å e 6500 Å impiegando gli stessi spettrografi  $U$  e  $V$  e riproducendo le condizioni sperimentali tenute durante l'esecuzione degli spettri di calibrazione. Tale lavoro fu eseguito all'Osservatorio di Arcetri al ritorno della spedizione.

Il filtro graduale era situato sulla fenditura dello spettrografo a contatto col doppietto acromatico di apertura mm. 42 e focale mm. 400 ed illuminato dalla lampada campione n. 1002 o n. 250, a seconda dello strumento impiegato, posta a distanza conveniente dalla fenditura. Il doppietto, che in tal caso funzionava da lente di campo, dava un'immagine del filamento della lampada sulla prima faccia del prisma assicurando così la uniforme illuminazione del filtro graduale. Con tale dispositivo si otteneva uno spettro della lampada la cui densità nel senso normale alla dispersione era dipendente dal fattore di trasmissione del filtro graduale. Tolto il filtro si è proiettato invece sulla fenditura la parte centrale del filamento della lampada e variando opportunamente la corrente di alimentazione si sono ottenuti gli spettri di calibrazione.

Col filtro graduale sono stati eseguiti tre spettri corrispondenti ad altrettante correnti di alimentazione, per la calibrazione invece e sulla medesima lastra ne furono eseguiti dodici variando l'intensità della corrente. Lo spettro di una lampada al Neon o quello di una al Sodio serviva come scala di riferimento per le lunghezze d'onda.

Per avere una media sicura nei risultati furono eseguite quattro lastre con lo spettrografo  $U$ , ed altrettante col  $V$  mantenendo invariate le condizioni sperimentali (larghezza della fenditura, tempo di posa ecc.). Di queste si sono eseguiti i microfotogrammi col microfotometro registratore dell'Osservatorio di Arcetri, facendo scorrere la lastra in direzione normale alla dispersione e fotometrando a lunghezze d'onda equidistanti di 100 Å. Si è constatato che l'inclinazione delle curve di calibrazione, per il tipo di lastra impiegato e per le condizioni sperimentali realizzate non varia sensibilmente con la lunghezza d'onda. I risultati ottenuti

---

(5) Cfr. «Pubbl. Oss. Arcetri», fasc. 48, pag. 31, 1931 e fasc. 57, pag. 22, 1939.

facendo una media grafica dei punti osservati sono contenuti nella tabella II; da 3500 a 4000 Å essi sono relativi allo spettrografo *U*, da 4000 Å in poi sono invece determinati con lo spettrografo *V*.

TABELLA II.

*Fattore di trasmissione del filtro graduale.*

| $\lambda =$ | 0.35 $\mu$ | 0.36 $\mu$ | 0.38 $\mu$ | 0.40 $\mu$ | 0.42 $\mu$ | 0.44 $\mu$ | 0.46 $\mu$ | 0.48 $\mu$ | 0.50 $\mu$ |
|-------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| I           | 100        | 100        | 100        | 100        | 100        | 100        | 100        | 100        | 100        |
| II          | 72         | 64         | 65         | 72         | 76         | 76         | 76         | 75         | 74         |
| III         | 49         | 49         | 52         | 53         | 53         | 52         | 49         | 46         | 43         |
| IV          | 33         | 37         | 40         | 38         | 34         | 32         | 29         | 26         | 24         |
| V           | 23         | 26         | 30         | 25         | 20         | 18         | 17         | 14         | 12         |
| VI          | 15.5       | 18.0       | 19.0       | 17.0       | 14.0       | 12.0       | 10.5       | 9.4        | 8.8        |

| $\lambda =$ | 0.52 $\mu$ | 0.54 $\mu$ | 0.56 $\mu$ | 0.58 $\mu$ | 0.60 $\mu$ | 0.62 $\mu$ | 0.64 $\mu$ |  |  |
|-------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|--|--|
| I           | 100        | 100        | 100        | 100        | 100        | 100        | 100        |  |  |
| II          | 73         | 72         | 72         | 72         | 72         | 72         | 72         |  |  |
| III         | 42         | 45         | 45         | 45         | 45         | 45         | 45         |  |  |
| IV          | 24         | 26         | 28         | 29         | 29         | 28         | 28         |  |  |
| V           | 11.5       | 13.3       | 15.5       | 17.5       | 18.0       | 18.5       | 18.5       |  |  |
| VI          | 8.4        | 8.5        | 9.0        | 10.0       | 11.0       | 11.0       | 11.0       |  |  |

*Le curve di calibrazione.*

Delle lastre elencate in tabella I soltanto le  $U_2$ ,  $U_3$  e  $V_2$  furono impiegate per la costruzione delle curve di calibrazione, essendo la  $V_3$  risultata sottoposta ed inadatta allo scopo. Di queste furono eseguiti i microfotogrammi al microfotometro registratore facendole scorrere nel senso della dispersione e impiegando un rapporto di trasmissione 1 : 6; in tali condizioni l'intero spettro veniva registrato in circa cm. 40 di carta sensibile.

Negli spettri della luce del cielo le principali righe di assorbimento sono ben visibili ed individuabili, per gli spettri continui invece si sono fatte delle incisioni sulla gelatina a certe lunghezze d'onda stabilite per avere dei punti di riferimento; tali incisioni appaiono nel microfotogramma

come deboli righe di assorbimento. L'interpolazione per le lunghezze d'onda comprese fra i segni di riferimento è stata eseguita con l'aiuto della curva di dispersione degli spettrografi.

Una prima serie di microfotogrammi è stata eseguita con la prima fenditura del microfotometro aperta a mm. 0.20 e la seconda a mm. 0.15 in modo da avere una deviazione massima del galvanometro per la lastra trasparente di circa mm. 70; una seconda serie di microfotogrammi è stata registrata invece aprendo la I fenditura a mm. 0.50 e la II a mm. 0.30 con una deviazione massima del galvanometro di mm. 180 allo scopo di avere una curva di calibrazione per le forti densità fotografiche. Corrispondentemente a queste due serie di microfotogrammi di calibrazione sono state registrate due serie di microfotogrammi della corona nelle identiche condizioni strumentali delle precedenti.

La lunghezza della I fenditura è stata mantenuta a mm. 2, la sua immagine geometrica sulla lastra risulta quindi di  $0.16 \times 0.017$  mm. per la prima serie di microfotogrammi e di  $0.16 \times 0.042$  per la seconda.

La costruzione delle curve di calibrazione è stata fatta col solito metodo; per gli spettri del cielo presi col filtro graduale si sono scelti gruppi di righe di assorbimento intorno alle lunghezze d'onda seguenti: 0.35; 0.36; 0.37; 0.38; 0.39; 0.40; 0.41; 0.43; 0.45; 0.47; 0.49; 0.51; 0.53; 0.55; 0.57  $\mu$ . Letta la trasmissione al centro delle righe per ciascuna delle strisce dello spettro e portata in ordinate, con i logaritmi del fattore di trasmissione del filtro graduale in ascisse, si sono tracciati dei gruppi di curve di calibrazione per ognuna delle lunghezze d'onda indicate.

Per gli spettri continui le trasmissioni lette alle medesime lunghezze d'onda sui microfotogrammi di spettri relativi a diverse intensità di corrente, sono state portate in ordinate, mentre in ascisse si avevano i logaritmi delle intensità del flusso irradiato dalla lampada per quella data corrente. Questi ultimi valori si possono calcolare dalla formola:

$$[1] \quad c_1 \lambda^{-5} \varepsilon_{\lambda T} \left( e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1 \right)^{-1}$$

dove  $\varepsilon_{\lambda T}$  è il fattore spettrale di radiazione del tungsteno;  $T$  la temperatura vera del filamento data dal certificato di taratura delle lampade in funzione della intensità di corrente, e  $c_1$  e  $c_2$  le note costanti della legge di PLANCK.

Per la lastra U è stato possibile determinare le curve complete (scala delle ordinate da 10 a 100 di trasmissione) per le  $\lambda\lambda$  da 0.35  $\mu$  a 0.40  $\mu$  dalla prima serie di microfotogrammi; da  $\lambda$  0.40  $\mu$  in poi si sono determinate le curve per le forti densità dalla serie di microfotogrammi ottenuti con grande deviazione del galvanometro. Così pure per la lastra V<sub>2</sub> le curve di calibrazione complete sono relative alle lunghezze d'onda

0.40; 0.41; 0.43; 0.45; 0.47; 0.49;  $0.51\mu$ ; da  $0.51\mu$  fino a  $0.64\mu$  si è potuto ottenere solo la parte inferiore della curva (piccole trasmissioni).

Complessivamente per la calibrazione della lastra U si avevano a disposizione 15 curve complete ottenute dagli spettri del cielo, 6 pure complete dagli spettri continui, e 9 incomplete e relative solo alle forti densità (trasmissione da 15 a 0.5 %). Per la calibrazione della lastra V invece vi erano 7 curve complete e 6 incomplete.

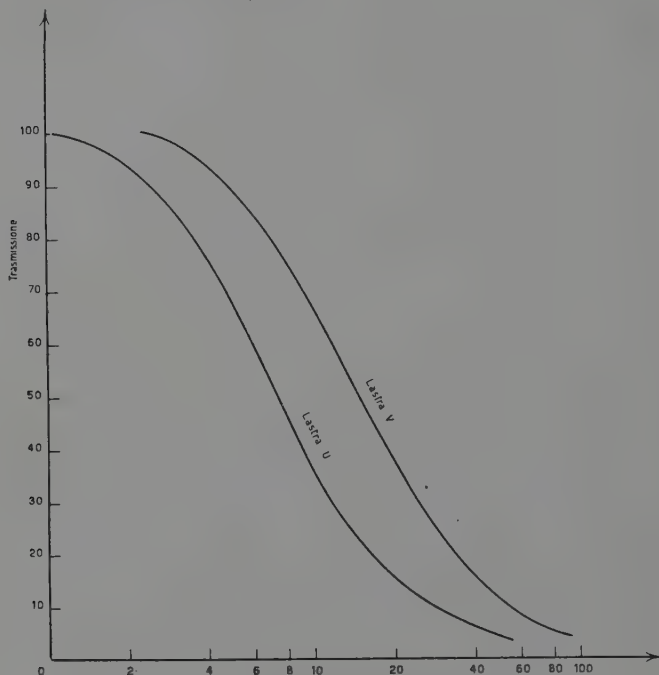


Fig. 2. — Curve medie di calibrazione.

L'inclinazione delle curve dedotte dagli spettri continui e dallo spettro del cielo è la medesima, perciò si sono fatte le medie grafiche dei punti delle due curve per ogni lunghezza d'onda. Per decidere se era lecito adoperare una curva di trasmissione unica per tutto lo spettro si è rilevato il coefficiente angolare  $k$  della parte rettilinea di ciascuna curva e lo si è riportato in un grafico nel quale si era posto in ascisse la lunghezza d'onda. La distribuzione di punti che si ottiene non mostra nessun andamento particolare con  $\lambda$ , cosicchè si è venuti nella conclusione di fare una media generale ed adottare una curva media per tutto lo spettro. Questa risulta

per la lastra U con un coefficiente angolare  $k = 0.53$ , e per la lastra V con un  $k = 0.51$ . Lo scostamento massimo dal valore medio si ha a  $\lambda$  4000 Å per la lastra U ed ammonta a 0.09, e alle  $\lambda\lambda$  4100 e 4500 Å per la lastra V con 0.04. Nel più sfavorevole dei casi la differenza di 0.09 in  $k$  può portare al massimo un errore del 6 % nella intensità, errore che è nell'ambito della precisione del processo fotometrico.

Le curve risultanti dalla media grafica complessiva sono riportate in fig. 2; si vede che la loro inclinazione è sensibilmente la medesima e questo benchè l'emulsione sia differente; pancromatica per la V ed ortocromatica per la U. Per le piccole trasmissioni le curve di calibrazione sono state costruite portando in ordinate il logaritmo della trasmissione, ed in ascisse sempre il logaritmo della intensità. La relazione è quasi lineare ed estende la calibrazione fino alla trasmissione 0.5 % con discreta precisione. Le curve per le piccole trasmissioni essendo dedotte dai microfotogrammi ottenuti con la fenditura larga, e grande deviazione del galvanometro, servono soltanto per ridurre i tracciati della corona registrati nelle identiche condizioni, poichè come si sa i valori della trasmissione fotografica dipendono in parte anche dalle condizioni strumentali dell'apparato registratore.

Nella lastra V le curve di calibrazione complete si arrestano a 5100 Å perchè da quella lunghezza d'onda in poi gli spettri continui della lampada sono risultati un po' sovraesposti; le misure sullo spettro della corona sono state invece eseguite anche oltre tale limite e ridotte con la curva di calibrazione media. Si è però avuto cura di constatare su lastre prese durante le prove, che anche nella zona 5100–6400 Å il coefficiente angolare delle curve di calibrazione rimane inalterato.

#### *Registrazione e riduzione dello spettro della corona.*

La registrazione fotometrica degli spettri della corona è stata pure eseguita al microfotometro termoelettrico disponendo lo spettro parallelo alla direzione del moto del carrello, ed eseguendo i tracciati ogni millimetro di altezza dello spettro con un rapporto di trasmissione 1/6. Per lo spettro U si sono eseguiti quindici di tali microfotogrammi, mentre per lo spettro V, che ha una minore estensione in altezza sono stati sufficienti nove microfotogrammi. Tutte queste registrazioni sono state ottenute con la prima fenditura del microfotometro a mm. 0.20; la seconda a 0.15 e con deviazione massima del galvanometro di circa mm. 70.

La densità degli spettri e specialmente di quello U varia rapidamente da punto a punto nel senso della larghezza, basta quindi un piccolo errore nella lettura dell'ordinata sulla scala verticale del portalastre per avere delle registrazioni notevolmente differenti. Per ovviare a questo inconveniente ed anche per estendere la registrazione alle parti centrali più dense dello spettro si sono eseguiti dei tracciati trasversalmente allo spettro



stesso, per mezzo dei quali si è potuto ritrovare la posizione esatta delle registrazioni longitudinali e stabilire, con l'aiuto della fig. 1, la distanza dal bordo solare dei punti fotometrati.

Le lunghezze d'onda corrispondenti alle registrazioni trasversali sono state individuate leggendo la scala verticale del microfotometro e prendendo le righe di emissione come riferimento. L'errore che si può commettere nella stima della posizione è al massimo di 0.25 mm. che corrisponde ad un errore da 2 a 20 Å in lunghezza d'onda a seconda della dispersione. Si sono eseguiti venticinque microfotogrammi trasversali per ciascun spettro con rapporto di trasmissione 1/4 e con le fenditure del microfotometro rispettivamente di mm. 0.20 e 0.15, avendo cura che le registrazioni fossero uniformemente distribuite su tutta la lunghezza dello spettro. Una seconda serie di otto microfotogrammi con fenditure a mm. 0.50 e 0.30 e con deviazione massima del galvanometro di mm. 180 è stata poi eseguita per tentare di ottenere le intensità delle parti più dense dello spettro *U*.

Le ordinate dei tracciati longitudinali e trasversali sono state rilevate ogni 5 millimetri di ascissa con un reticolo trasparente e trasformate in trasmissione dividendole per l'ordinata massima corrispondente alla lastra non impressionata. Mediante le curve di trasmissione medie si sono ottenute poi le intensità in unità arbitrarie. Si è constatato che non conviene prendere in considerazione i punti per i quali la trasmissione è inferiore al 5 %; anche se dedotte da microfotogrammi della seconda serie le intensità corrispondenti sono soggette a forti errori e non danno affidamento di sorta. Così pure si è constatato che le intensità della zona 5000–5500 Å dello spettro *U* sono molto imprecise, perchè l'immagine della corona non era in fuoco per questa zona dello spettro essendo l'obiettivo *U* corretto per l'aberrazione cromatica soltanto fra 3500 e 4500 Å. Le curve spettrali della lastra *U* si arrestano a 4900 Å.; non tutte poi sono complete perchè in alcune parti, come si è detto, lo spettro è sovraesposto.

Combinando convenientemente le intensità dedotte dai microfotogrammi longitudinali con quelle che si ottengono dai tracciati trasversali si sono determinate le curve spettrali per la zona 3430–4900 Å di quindici punti della corona che hanno dal bordo solare distanze variabili da 0.8 a 14', e per la zona 4000–6400 Å quelle di altri cinque punti che distano dal bordo solare da 0.8 a 4'. Tutte queste curve hanno una forma molto simile; un confronto accurato fra di esse è stato eseguito prendendo la meglio determinata come riferimento e misurando le differenze di intensità delle altre in tutto lo spettro. Dalle medie di queste differenze risulta che le curve spettrali portate in scala logaritmica risultano parallele, e quindi si può concludere che: *Lo spettro della corona non varia con l'altezza sul bordo solare, almeno entro le distanze 0.8 e 14'.*

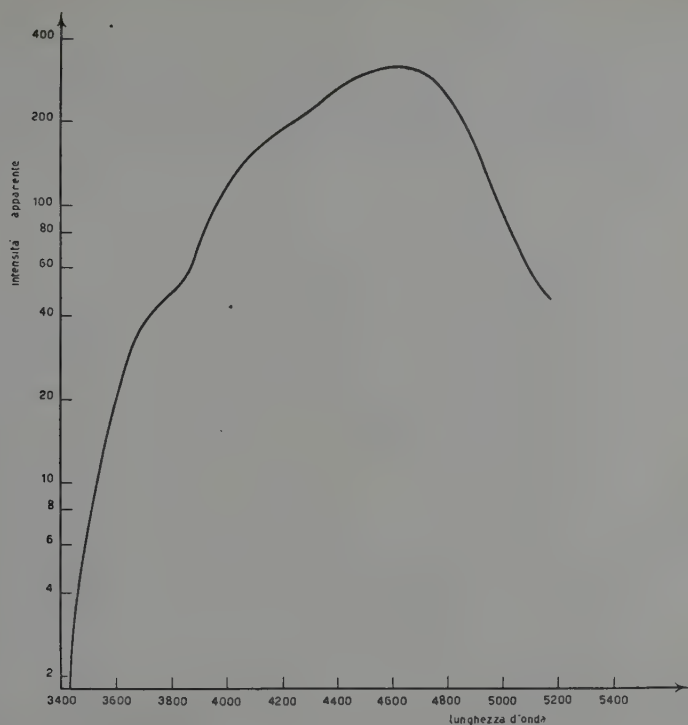


Fig. 3 a). - Curva spettrale della intensità apparente della corona. Spettro U.

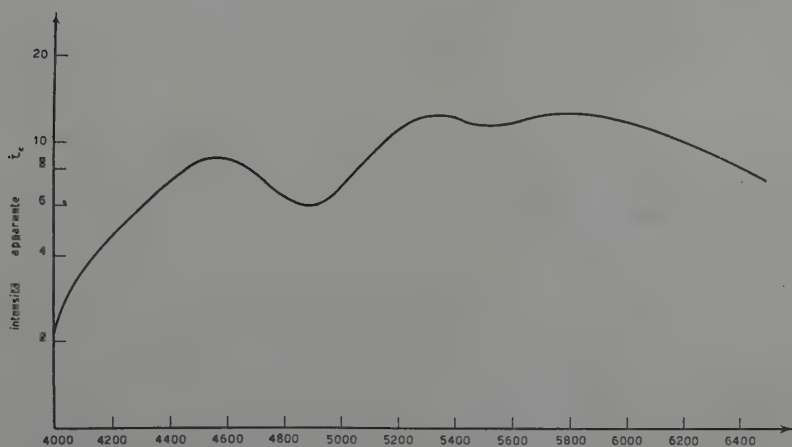


Fig. 3 b). - Curva spettrale della intensità apparente della corona. Spettro V.

Le curve spettrali determinate sono state quindi composte in una media grafica portandole a sovrapporsi mediante spostamento in ordinate (logaritmiche) alla curva del punto che dista 0.8 dal bordo solare. La curva media rappresenta la *distribuzione apparente della intensità nello spettro della corona*; le intensità sono espresse in unità arbitrarie.

Le figure 3 a) e 3 b) mostrano le curve spettrali medie per gli spettri  $U$  e  $V$ .

*Lo spettro di confronto della lampada.*

L'intensità dedotta dai tracciati per mezzo delle curve di calibrazione deve essere corretta per la differente sensibilità della emulsione fotografica e per l'assorbimento selettivo delle parti ottiche dello strumento. Per questo bisogna ricorrere agli spettri della lampada campione presi col medesimo strumento e con lo stesso tipo di lastra e per i quali è nota la curva spettrale del flusso irradiato dal filamento. Alimentando la lampada con una certa intensità di corrente non è possibile ottenere uno spettro il cui annerimento sia misurabile per tutte le lunghezze d'onda; in generale se la densità è conveniente nella zona violetta è troppo grande per la zona rossa, oppure è troppo debole nel violetto e giusta nel rosso, in modo che solo su di una parte dello spettro si possono eseguire delle misure fotometriche che diano affidamento. È stato perciò necessario scegliere fra gli spettri di calibrazione delle lastre  $U_2$  e  $V_2$  per ogni zona spettrale quelli più convenienti, riportandoli tutti come diremo ad un unico spettro di riferimento.

Se  $i(\lambda)$  è l'intensità dedotta dalla trasmissione e misurata in unità arbitrarie per una certa lunghezza d'onda dello spettro,  $I(\lambda, T)$  una quantità proporzionale al flusso irradiato dalla lampada a temperatura  $T$ ,  $s(\lambda)$  la sensibilità della lastra e  $d(\lambda)$  la dispersione dello spettrografo in  $\text{\AA}/\text{mm.}$ , si avrà:

$$[2] \quad i(\lambda) \sim I(\lambda, T) s(\lambda) d(\lambda).$$

Il rapporto delle intensità  $i(\lambda)$  dedotte da spettri corrispondenti a temperature  $T_0$  e  $T_1$  della lampada sarà:

$$\frac{i_1(\lambda)}{i_0(\lambda)} = \frac{I_1(\lambda, T_1)}{I_0(\lambda, T_0)}$$

e quindi determinato  $i_1$  si può trovare il corrispondente  $i_0$  moltiplicandolo per il rapporto dei flussi irradiati dalla lampada alle due temperature corrispondenti. Questo rapporto si può sempre calcolare per mezzo della [1] di pag. 8. Preso come spettro di riferimento quello ottenuto alimentando la lampada n. 250 con una corrente di 9.42 amp. ( $T = 2050 \text{ K}$ ) per la

lastra  $U_2$ , e quello corrispondente alla intensità di 8.5 amp. ( $T = 1790$  K) per la lampada n. 1002 e lastra  $V_2$ , si sono ridotte le intensità  $i(\lambda)$  dedotte dai microfotogrammi degli spettri di calibrazione nel modo ora detto.

Praticamente si è trovato che il procedimento grafico per computare  $I(\lambda, T_0)/I(\lambda, T)$  e per la riduzione delle  $i(\lambda)$  è il più rapido e conveniente. Infatti se si rappresenta graficamente la [1] portando  $\log I(\lambda, T)$

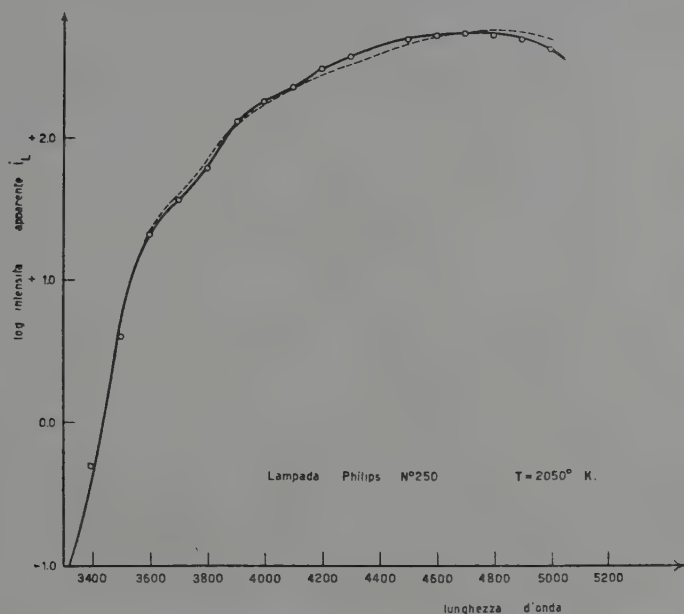


Fig. 4. - Curva spettrale della intensità apparente della lampada Philips n. 250. Temperatura 2050 K. Spettrografo  $U$ .

in ordinate e  $1/T$  in ascisse, si ottengono delle rette, che hanno come parametro  $\lambda$ , dalle quali si può ricavare immediatamente il rapporto  $I(\lambda, T_0)/I(\lambda, T)$ . Rappresentando pure graficamente la curva spettrale dell'intensità apparente con  $\log i(\lambda)$  in ordinate e  $\lambda$  in ascisse si vede che la riduzione in parola si fa mediante semplici operazioni grafiche. I risultati sono riportati nelle figure 4 e 5 dove in ordinate vi sono i log delle intensità (unità arbitrarie della scala della curva di calibrazione), e in ascisse le lunghezze d'onda.

Prima di eseguire la correzione delle intensità osservate nello spettro della corona per la sensibilità della lastra e per l'assorbimento selettivo degli spettrografi, bisogna tener conto del fatto che gli spettri di calibrazione sono stati presi formando l'immagine del filamento della lampada

sulla fenditura per mezzo di un obbiettivo Steinheil, mentre l'immagine della corona veniva formata sulla fenditura dei due spettrografi rispettivamente dagli obbiettivi *U* e *V*. La diversa natura dei vetri costituenti gli obbiettivi *U*, *V* e Steinheil può dar luogo ad un assorbimento selettivo, specie per quanto riguarda la parte violetta dello spettro e perciò è stato necessario determinare il fattore di trasmissione degli obbiettivi *U*, *V* e Steinheil, per correggere eventualmente i risultati ottenuti. Il dispositivo sperimentale è quello di fig. 6; *L* è la lampada campione, *O* è l'obbiettivo in esame ed *S* lo spettrografo. Posto in *O* l'obbiettivo Steinheil di mm. 28

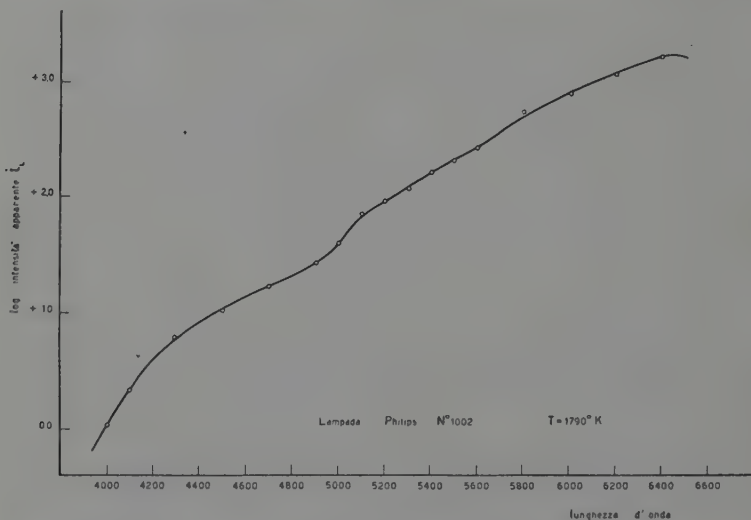


Fig. 5. - Curva spettrale della intensità apparente della lampada Philips n. 1002. Temperatura 1790 K. Spettrografo V.

di apertura alla distanza  $q = 514$  mm. si sono presi quattro spettri della lampada *L* tutti col medesimo tempo di posa e variando l'intensità della corrente di alimentazione. Tolto lo Steinheil e posto in *O* uno degli altri due obbiettivi (apertura utile mm. 145) si è aumentata la distanza  $q$  a mm. 3120 e con le medesime intensità di corrente si sono ottenuti altri quattro spettri della lampada sulla stessa lastra mantenendo inalterati tempo di posa (60") e larghezza della fenditura (mm. 0.30). In questo modo si sono ottenute due lastre, una per confrontare l'obbiettivo Steinheil con l'obbiettivo *U* impiegando la lampada n. 250 e lo spettrografo relativo *U*, l'altra per il confronto con l'obbiettivo *V* per mezzo dello spettrografo *V* e lampada n. 1002.

La calibrazione delle lastre è stata fatta prendendo uno spettro della lampada con il filtro graduale e lente di campo sulla fenditura. Registrando trasversalmente al microfotometro gli spettri presi col filtro graduale si è costruita una unica curva di calibrazione per tutto lo spettro e per ciascuna lastra; con questa sono state ridotte in intensità le trasmissioni lette sui microfotogrammi relativi agli spettri ottenuti con i due obbiettivi in esame. Per ogni lunghezza d'onda il rapporto delle intensità dedotte da due spettri ottenuti alimentando la lampada con la medesima corrente ci dà, a meno di un fattore costante, il rapporto dei *fattori di trasmissione monocromatici* dei due obbiettivi. La costante dipende unicamente dalle condizioni geometriche della esperienza.

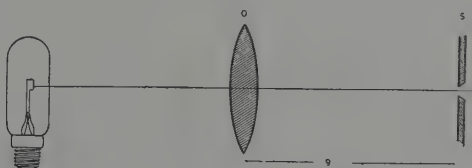


Fig. 6. - Schema dell'uso della lampada fotometrica.

Se  $\tau_s$  e  $\tau_0$  sono i fattori di trasmissione degli obbiettivi Steinheil ed  $U$ , per esempio, e  $D_s$  e  $D_0$ ; e  $q_s$  e  $q_0$  rispettivamente i diametri degli obbiettivi e le distanze obbiettivo spettrografo,  $N$  la *brillanza energetica* della lampada  $L$ , cioè il flusso per unità di superficie radiante ( $\text{cm}^2$ ), per unità di angolo solido (steradiane) e in direzione normale al filamento ( $\cos \theta = 1$ ), avremo che la brillanza energetica dell'immagine  $N'$  sarà nei due casi <sup>(6)</sup>:

$$[3] \quad N'_s = \tau_s N \quad N'_0 = \tau_0 N.$$

Ma il flusso energetico incidente sul collimatore è uguale al prodotto della brillanza energetica dell'immagine per l'angolo solido che ha per base l'obbiettivo  $O$  e il vertice nel centro della fenditura; si avrà quindi:

$$[4] \quad \varphi_s = N'_s \frac{\pi}{4} \left( \frac{D_s}{q_s} \right)^2 \quad \varphi_0 = N'_0 \frac{\pi}{4} \left( \frac{D_0}{q_0} \right)^2.$$

Dalle [3] e [4] si ricava subito

$$\frac{\tau_0}{\tau_s} = \left( \frac{q_0}{q_s} \right)^2 \cdot \left( \frac{D_s}{D_0} \right)^2 \cdot \frac{\varphi_0}{\varphi_s}.$$

<sup>(6)</sup> PERUCCA, *Fisica Sperimentale*, vol. II, p. 90, 1937.

Il rapporto dei flussi è uguale al rapporto delle intensità dedotte da due spettri corrispondenti alla medesima temperatura della lampada, e poichè  $D_0, q_0; D_s, q_s$  sono quantità note, dai rapporti di intensità misurati si deduce subito il rapporto dei fattori di trasmissione monocromatici.

Per l'obbiettivo  $V$  il rapporto dei fattori di trasmissione non si scosta dalla unità più degli errori sperimentali; per l'obbiettivo  $U$  si hanno invece i seguenti valori:

TABELLA III.

*Rapporto dei fattori di trasmissione per l'obbiettivo  $U$  e Steinheil.*

| $\lambda$ | $\tau_0/\tau_s$ | $\lambda$ | $\tau_0/\tau_s$ |
|-----------|-----------------|-----------|-----------------|
| 3460      | 0.95            | 3700      | 1.02            |
| 3500      | 1.10            | 3800      | 1.10            |
| 3550      | 1.06            | 3900      | 1.01            |
| 3560      | 0.97            | 4200      | 0.91            |
| 3575      | 0.98            | 4400      | 0.86            |
| 3600      | 1.09            | 4600      | 0.98            |
| 3650      | 1.06            | 4800      | 1.05            |

L'errore medio di ogni risultato si aggira su  $\pm 0.07$ ; con i dati della tabella si è costruita la figura 7. Come si vede la trasmissione dell'obbiettivo  $U$  è leggermente superiore di quella dello Steinheil fino a 4000 Å e inferiore invece da 4000 a 4700 Å. Il risultato è giustificato se si pensa che

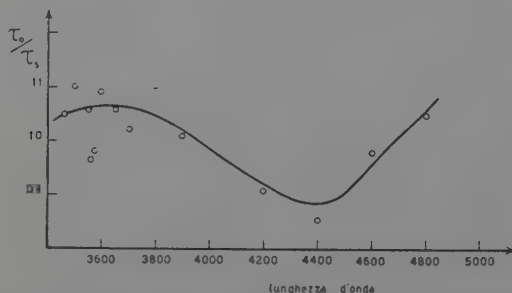


Fig. 7. - Rapporto dei fattori di trasmissione per l'obbiettivo  $U$  e l'obbiettivo Steinheil.



i vetri costituenti i due obbiettivi sono notevolmente differenti, e che inoltre i cammini ottici dei raggi nella massa del vetro sono alquanto diversi. Con i dati ricavati dalla fig. 7 si è corretta la fig. 4 (pag. 729); la curva punteggiata rappresenta appunto i valori corretti.

*Correzione delle osservazioni per l'assorbimento atmosferico.*

Per poter confrontare lo spettro della corona con quello della lampada è necessario liberare il primo dall'effetto selettivo dell'assorbimento atmosferico. Dalla teoria elementare si sa che la trasmissione dell'atmosfera è data dalla:

$$[5] \quad I/I_0 = e^{-b \sec z}$$

quando  $z$  distanza zenitale è minore di  $60^\circ$ . La  $b$  è funzione della lunghezza d'onda.

Determinazioni della curva spettrale dell'esponente  $b$  per il giorno dell'eclissi e per il luogo di osservazione sono state eseguite da GUTH e LINK <sup>(7)</sup> con misure di intensità sullo spettro del sole nella zona da 4700 a 6400 Å. Allo scopo di estrapolare i dati in questione per la parte violetta dello spettro, si sono rappresentati graficamente i valori di  $b$  contenuti nelle « Smithsonian Tables » <sup>(8)</sup> relativi a Monte Whitney, (4420 m.), Monte Wilson (1675 m.) e Washington (livello del mare) in funzione della lunghezza d'onda. I punti che riguardano Sara (U.R.S.S.) cadono fra le curve di Monte Wilson e Monte Whitney benchè l'altitudine sul livello del mare del nostro osservatorio sia solo di circa 500 m. Le curve spettrali dell'esponente  $b$  hanno un andamento sensibilmente parallelo; ed è perciò possibile estrapolare la nostra curva fino alla lunghezza d'onda di 3400 Å.

Poichè al momento dell'eclissi il sole aveva un altezza di  $37^\circ 56'$  si ha  $\sec z = 1.63$  e la [5] ci dà:

$$\log i_0 = \log i + 0.34 \times 1.63 b$$

dove  $i$  è l'intensità osservata e  $i_0$  è l'intensità ridotta alla massa d'aria zero. I valori di  $k = 0.434 \times 1.63 b$  sono raccolti nella tabella IV.

*La curva spettrale della brillantezza energetica della corona.*

Dalle intensità osservate negli spettri coronali possiamo ora dedurre la *brillantezza energetica specifica* della corona; cioè il flusso in erg per  $\text{cm}^2$ . per steradiante e per cm. di lunghezza d'onda.

<sup>(7)</sup> « Memoirs and Observations Czech Astron. Ass. », Prague, n. 5, pag. 8, 1937.

<sup>(8)</sup> « Smithsonian Physical Tables », pag. 608, Washington, 1933.

TABELLA IV.

*Fattore di riduzione per l'assorbimento atmosferico.*

| $\lambda$ | $k$  | $\lambda$ | $k$  |
|-----------|------|-----------|------|
| 3500      | 0.27 | 4600      | 0.10 |
| 3600      | 0.24 | 4800      | 0.08 |
| 3700      | 0.22 | 5000      | 0.07 |
| 3800      | 0.20 | 5200      | 0.06 |
| 3900      | 0.18 | 5400      | 0.06 |
| 4000      | 0.16 | 5600      | 0.05 |
| 4200      | 0.14 | 5800      | 0.05 |
| 4400      | 0.12 | 6000      | 0.05 |

Sia  $i_C(\lambda)$  l'intensità apparente della corona, cioè l'intensità misurata sullo spettro in unità arbitrarie, e  $i_L(\lambda)$  l'analoga grandezza relativa allo spettro della lampada a temperatura  $T$ . Il rapporto  $i_C/i_L$  come si vede dalla [2] è indipendente dalla sensibilità della lastra, dalla dispersione dello spettrografo e dall'assorbimento selettivo delle parti ottiche, e dipende unicamente dal rapporto delle brillanze energetiche, dalle condizioni geometriche dell'esperienza ed anche dall'assorbimento atmosferico. Per la correzione di quest'ultimo abbiamo visto al paragrafo precedente che basta aggiungere al log  $i_C$  la quantità  $k(\lambda)$  data dalla tabella IV. Le condizioni geometriche dell'esperienza sono, per lo spettro di confronto: obbiettivo Steinheil di superficie  $s$  posto a distanza  $q$  dalla fenditura; per la corona: obbiettivo  $U$  e  $V$  di superficie  $S$  posto a distanza  $f$  dalla fenditura. Se indichiamo con  $N_L$  e  $N_C$  rispettivamente la brillantezza energetica della lampada alla temperatura  $T$  e della corona, avremo che nel primo caso il flusso che passa attraverso alla fenditura di larghezza  $a = 0.10$  mm. e di altezza  $h = 1$  mm. è dato da:

$$\varphi_L = N_L \tau (s/q^2) a \cdot h$$

e nel secondo:

$$\varphi_C = N_C \tau (S/f^2) a \cdot h$$

dove  $\tau$  è il fattore di trasmissione dell'obbiettivo, comune ai due casi per la riduzione fatta a pag. 17,  $s$  ed  $S$  le superfici in  $\text{cm}^2$  dei due obbiettivi. Le intensità che si misurano negli spettri sono proporzionali a  $\varphi$  e quindi:

$$\frac{i_C}{i_L} = \frac{N_C}{N_L} \frac{S}{f^2} \frac{q^2}{s}$$

dove si suppone  $i_C$  già corretto per l'assorbimento atmosferico. I diametri degli obiettivi sono rispettivamente 145 e 28 mm.;  $f = 1500$  mm,  $q = = 750$  mm. e quindi si ha:

$$i_C/i_L = 6.70 N_C/N_L$$

ed anche:

$$[6 a] \quad N_C = 0.15 (i_C/i_L) N_L \quad (\text{spettro } U).$$

Il caso ora trattato corrisponde a quello dello spettro  $U$ ; nel prendere gli spettri di calibrazione per la lastra  $V$  si sono adottate delle condizioni geometriche leggermente differenti in quanto la distanza  $q$  è risultata di 790 mm., cosicchè si ha:

$$[6 b] \quad N_C = 0.134 (i_C/i_L) N_L \quad (\text{spettro } V).$$

TABELLA V.

*Spettro U - Lampada n. 250 alimentata con 9.42 amp.  $T = 2050$  K.*

| $\lambda$ | Correzione<br>ass. atmosfera<br>$k(\lambda)$ | Intensità appa-<br>rente lampada<br>— $\log i_L(\lambda)$ | $\log 0.15 N_L$ | Somma  |
|-----------|----------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|-----------------|--------|
| 3500      | + 0.27                                       | — 0.74                                                    | + 7.58          | + 7.11 |
| 3600      | 0.24                                         | 1.30                                                      | 7.75            | 6.69   |
| 3700      | 0.22                                         | 1.60                                                      | 7.93            | 6.55   |
| 3800      | 0.20                                         | 1.84                                                      | 8.08            | 6.44   |
| 3900      | 0.18                                         | 2.10                                                      | 8.22            | 6.30   |
| 4000      | 0.16                                         | 2.24                                                      | 8.36            | 6.28   |
| 4200      | 0.14                                         | 2.45                                                      | 8.61            | 6.30   |
| 4400      | 0.12                                         | 2.60                                                      | 8.85            | 6.37   |
| 4600      | 0.10                                         | 2.70                                                      | 9.04            | 6.44   |
| 4800      | 0.08                                         | 2.76                                                      | 9.22            | 6.54   |
| 5000      | + 0.07                                       | — 2.70                                                    | + 9.38          | + 6.65 |

La *brillanza energetica delle lampade*  $N_L$  si può determinare dalla legge di PLANCK moltiplicata per il fattore spettrale di radiazione  $\varepsilon_{\lambda T}$  relativo al tungsteno e per un coefficiente dedotto per via sperimentale <sup>(9)</sup>:

<sup>(9)</sup> R. DEAGLIO e G. RIGHINI, *Sulla taratura assoluta delle lampade ecc.* « Memorie della Soc. Astr. It. » (in corso di stampa).

$$N_L = 1.33 c_1 \lambda^{-5} \varepsilon_{\lambda T} (e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1)^{-1} \quad \text{lampada n. 1002}$$

$$N = 1.63 c_1 \lambda^{-5} \varepsilon_{\lambda T} (e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1)^{-1} \quad \text{lampada n. 250}$$

$$c_1 = 5.88 \cdot 10^{-6} \text{ erg } \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}} \quad ; \quad c_2 = 1.432 \quad ; \quad \lambda \text{ in cm. } \quad ; \quad T \text{ in gradi K.}$$

Per  $\varepsilon_{\lambda T}$  si sono impiegati i valori dati da HAMAKER<sup>(10)</sup> per diverse temperature. Le tabelle V e VI contengono i valori di  $k(\lambda)$ ,  $i_L$ ,  $N_L$  che hanno servito per dedurre la brillantezza energetica della corona.

TABELLA VI.

*Spettro V - Lampada n. 1002 alimentata con 8.50 amp. T = 1790 K.*

| $\lambda$ | Correzione<br>ass. atmosfera<br>$k(\lambda)$ | Intensità appa-<br>rente lampada<br>— $\log i_L(\lambda)$ | $\log 0.134 N_L$ | Somma  |
|-----------|----------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|------------------|--------|
| 4000      | + 0.16                                       | — 0.04                                                    | + 7.31           | + 7.43 |
| 4200      | 0.14                                         | 0.60                                                      | 7.62             | 7.16   |
| 4400      | 0.12                                         | 0.93                                                      | 7.91             | 7.10   |
| 4600      | 0.10                                         | 1.14                                                      | 8.15             | 7.11   |
| 4800      | 0.08                                         | 1.34                                                      | 8.36             | 7.10   |
| 5000      | 0.07                                         | 1.62                                                      | 8.55             | 7.00   |
| 5200      | 0.06                                         | 1.98                                                      | 8.72             | 6.80   |
| 5400      | 0.06                                         | 2.23                                                      | 8.90             | 6.73   |
| 5600      | 0.05                                         | 2.45                                                      | 9.06             | 6.66   |
| 5800      | 0.05                                         | 2.71                                                      | 9.19             | 6.53   |
| 6000      | 0.05                                         | 2.93                                                      | 9.30             | 6.42   |
| 6200      | 0.05                                         | 3.10                                                      | 9.42             | 6.37   |
| 6400      | + 0.05                                       | — 3.24                                                    | + 9.52           | + 6.33 |

Le intensità  $i_C$  sono state rilevate dalle curve medie date in fig. 3 a) e 3 b); aggiungendo al logaritmo di queste i valori contenuti nell'ultima colonna delle tabelle precedenti si ottengono secondo le [6] i valori della brillantezza energetica specifica della corona.

La figura 8 dà le curve spettrali della brillantezza energetica.

<sup>(10)</sup> H. HAMAKER, *Dissertazione*. Utrecht, 1934.

### Temperatura dal colore della corona.

Il confronto diretto fra le intensità apparenti della corona e della lampada ci permette ora di determinare la temperatura dal colore. Sappiamo infatti che la brillantezza energetica di un corpo nero è data dalla:

$$[7] \quad N = c_1 \lambda^{-5} e^{-\frac{c_2}{\lambda T}};$$

se la curva spettrale della corona si può approssimare con una isoterma del corpo nero in un certo intervallo di lunghezza d'onda, la sua brillantezza energetica sarà pure rappresentata da una eguaglianza analoga, a meno di

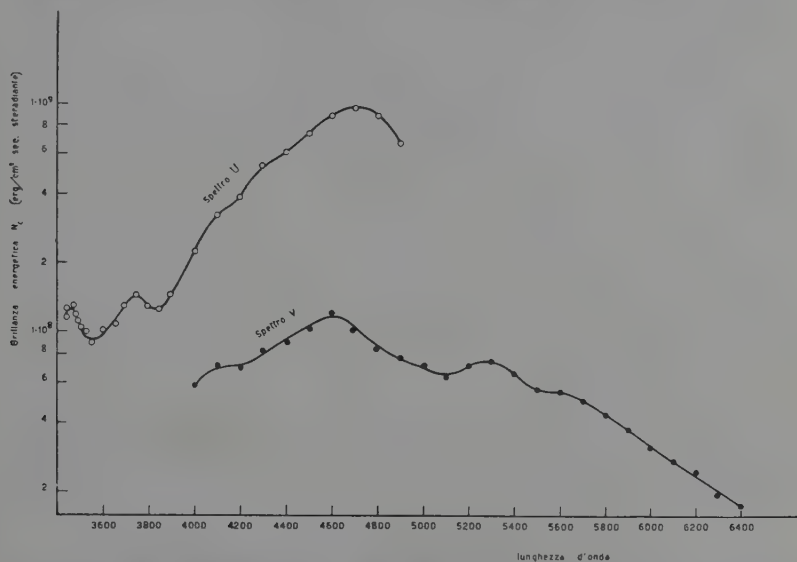


Fig. 8. — Brillantezza energetica della corona ( $\text{erg/cm}^2 \text{ sec. steradiane}$ ). Curva superiore: valori dallo spettro U. Curva inferiore: valori dedotti dallo spettro V.

un fattore costante, dove  $T$  sarà in tal caso un parametro chiamato temperatura dal colore. Prendendo i logaritmi e indicando con  $N_C$  e  $N_L$ ,  $T_C$  e  $T_L$  le grandezze brillantezza e temperatura per la corona e la lampada si avrà:

$$\log \frac{N_C}{N_L} = -0.434 \frac{c_2}{\lambda} \left( \frac{1}{T_C} - \frac{1}{T_L} \right).$$

Le intensità apparenti osservate e date nelle fig. 3 a), 3 b), 4 e 5 sono proporzionali ad  $N_C$  ed  $N_L$  per fattori che non dipendono da  $\lambda$ ; potremo quindi scrivere pure:

$$\log \frac{i_C}{i_L} = -0.434 \frac{c_2}{\lambda} \left( \frac{1}{T_C} - \frac{1}{T_L} \right)$$

dalla quale derivando rispetto a  $1/\lambda$  si ottiene:

$$[8] \quad \frac{\Delta \log i_C/i_L}{\Delta (1/\lambda)} = -0.434 c_2 \left( \frac{1}{T_C} - \frac{1}{T_L} \right).$$

Portiamo in ordinate il  $\log i_C/i_L$  e in ascisse  $1/\lambda$ , se esiste una temperatura dal colore si dovrà avere un diagramma lineare e il coefficiente angolare della retta sarà allora  $0.434 \left( \frac{c_2}{T_L} - \frac{c_2}{T_C} \right)$  ossia una quantità proporzionale alla differenza del *gradiente assoluto*  $\Phi = c_2/T$  dei due spettri. Evidentemente il massimo valore del coefficiente angolare sarà  $0.434 \Phi_L$  che corrisponderebbe al caso limite  $\Phi_C = 0$ . Dal valore del gradiente relativo

$$\Delta \Phi = \frac{c_2}{T_L} - \frac{c_2}{T_C}$$

si può quindi decidere se per una certa zona spettrale della corona esiste un parametro  $T$  che introdotto nella [7] rappresenti a meno di un fattore l'andamento della brillantezza energetica nella zona considerata.

È da notare che la temperatura  $T$  della lampada che figura nelle espressioni ora scritte è pure una temperatura dal colore, il nostro certificato di taratura ci dà invece la temperatura vera  $T_V$ . Fra queste due grandezze esiste la relazione:

$$A c_1 \lambda^{-5} e^{-\frac{c_2}{\lambda T}} = \epsilon_{\lambda T} c_1 \lambda^{-5} e^{-\frac{c_2}{\lambda T_V}}$$

dove  $A$  è un fattore costante indipendente da  $\lambda$  ed  $\epsilon_{\lambda T}$  è il fattore spettrale di radiazione del metallo costituente il filamento. Prendendo i logaritmi la precedente si può scrivere

$$\log \epsilon_{\lambda T} = \log A - 0.434 \frac{c_2}{\lambda} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_V} \right)$$

dalla quale si ha pure:

$$\frac{\Delta \log \epsilon_{\lambda T}}{\Delta (1/\lambda)} = -0.434 c_2 \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_V} \right);$$

la rappresentazione grafica di  $\log \epsilon_{\lambda T}$  con  $1/\lambda$  in ascisse è lineare e il coefficiente angolare della retta determina la differenza  $1/T - 1/T_V$ . In realtà poichè  $\epsilon_{\lambda T}$  risulta dall'esperienza, non si ha una sola retta ma una spezzata col vertice a  $4000 \text{ \AA}$ , ne segue che la temperatura dal colore del tungsteno non è costante per tutto lo spettro, come si vede dai seguenti risultati

|                        |                      |                      |
|------------------------|----------------------|----------------------|
| <i>Lampada n. 250</i>  | 3300–4000 Å          | 4000–6000 Å          |
| $T_V = 2050$           | $T = 2040 \text{ K}$ | $T = 2080 \text{ K}$ |
| <i>Lampada n. 1002</i> |                      |                      |
| $T_V = 1790$           |                      | $T = 1770$           |

Le differenze sono molto piccole e certamente inferiori all'errore che si commette nel determinare la temperatura della corona; perciò si può assumere la media dei due valori per tutto lo spettro. Avremo quindi:

Lampada n. 250 : Temperatura dal colore 2060 K ;  $1/T = 4.86 \cdot 10^{-4}$

Lampada n. 1002 : id. id. 1770 K ;  $1/T = 5.65 \cdot 10^{-4}$ .

Per avere un termine di confronto per le temperature sarebbe stato opportuno poter paragonare nelle medesime condizioni della corona lo spettro del sole con quello della lampada campione; mancando questa possibilità si è pensato di paragonare la curva spettrale del sole fuori dell'atmosfera con quella del flusso emesso dalla lampada campione. I valori relativi al centro del sole sono stati presi da PETTIT, <sup>(11)</sup> e da UNSÖLD <sup>(12)</sup>; in figura 9 a destra sono i risultati dello spettro *V* a sinistra quelli dello spettro *U*, le rette intere si riferiscono alla corona, quelle tratteggiate al sole.

TABELLA VII.

*Gradiente relativo e temperatura della corona e del Sole.*

| Zona spettrale | $\Phi$ lampada | $\Delta\Phi$ |      | $\Phi$  |      | T       |      |
|----------------|----------------|--------------|------|---------|------|---------|------|
|                |                | corona       | Sole | corona  | Sole | corona  | Sole |
| 3450 - 3900 A. | 6.98           | 4.84         | 5.30 | 2.14    | 1.68 | 6700    | 8550 |
| 3900 - 4550    | 6.98           | 0.79         | 3.98 | 6.19    | 3.00 | 2320    | 4780 |
| 4550 - 5150    | 8.10           | 7.38         | 5.45 | 0.72    | 2.65 | (22000) | 5400 |
| 5150 - 6400    | 8.10           | 9.24         | 5.45 | (-1.14) | 2.65 | —       | 5400 |

#### *Discussione dei risultati.*

Vediamo di chiarire prima di tutto le ragioni della differenza fra i risultati ottenuti dallo spettro *U* e quelli dallo spettro *V*. Come si vede dalla figura 8 la curva della brillantezza energetica dello spettro *V* giace tutta al di sotto di quella dello spettro *U* e per portare le due curve a coincidere bisogna aumentare le ordinate della prima di 0.85 nel logaritmo, ciò che corrisponde a moltiplicare la brillantezza energetica *V* per un fattore: 7.1. È da escludere che la diversità dello strumento adoperato possa aver in-

<sup>(11)</sup> « Ap. J. », 91, pag. 159, 1940.

<sup>(12)</sup> « Physik der Sternatmosphären », pag. 29, Springer, 1938.



trodotto un tale errore sistematico, perchè i valori della brillantezza sono stati ottenuti per confronto con lo spettro della lampada campione preso nelle identiche condizioni, e d'altronde la taratura delle lampade recentemente controllata <sup>(13)</sup> non può lasciar adito a dubbi ed introdurre un fattore di tale entità. Si può ammettere che i due spettri corrispondano a punti differenti della corona, e infatti durante l'esposizione la guida dello

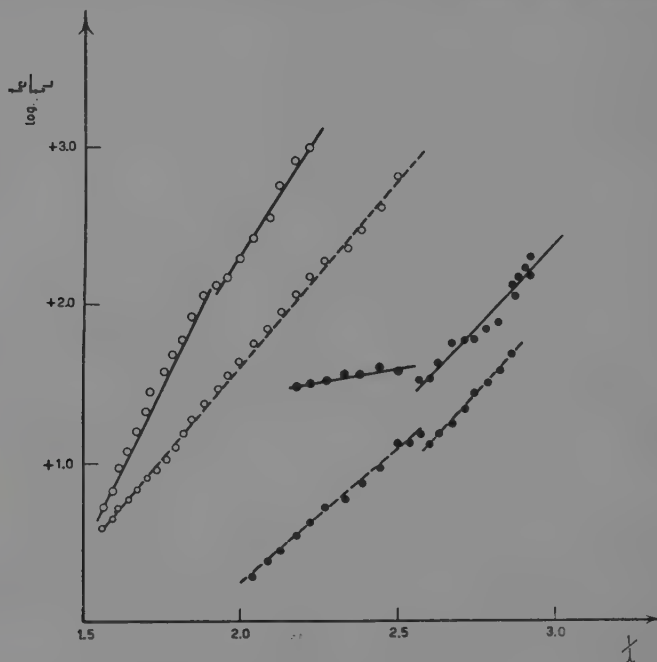


Fig. 9. — Rapporti dell'intensità della corona a quella della lampada.

strumento è stata effettuata guardando l'immagine della corona sulla superficie della fenditura dello spettrografo *U* e mantenendo la fenditura stessa puntata a circa 0.75 mm. dal lembo del sole; non è improbabile che per una piccola flessione strumentale o per l'errore residuo nella rettifica del parallelismo degli assi ottici dei due strumenti, la fenditura dello spettrografo *V* fosse puntata a distanza maggiore dal bordo del sole. Poichè la variazione di intensità della corona con la distanza dal bordo solare è molto rapida per la corona interna e secondo UNSÖLD <sup>(13)</sup> inversamente proporzionale ad una potenza molto elevata della distanza dal centro del Sole questo è sufficiente a spiegare il divario osservato.

(<sup>13</sup>) Loc. cit., pag. 441.

Trasportando parallelamente la curva  $V$  fino ad aumentare le ordinate di 0.85 in logaritmo possiamo ottenere la curva spettrale completa della brillantezza energetica. Bisogna tener presente però che l'obbiettivo  $U$  è acromatizzato fino a 4500 Å, e il  $V$  da 4580 a 7000 Å, e quindi i punti dello spettro  $U$  da 4500 Å in poi come pure quelli dello spettro  $V$  prima di 4580 Å hanno un peso molto limitato; nella media grafica che si è fatta non si sono presi perciò in considerazione i punti da 4000 a 4400 Å dello spettro  $V$  e quelli da 4700 a 4800 Å per lo spettro  $U$ . In figura 10 è data la curva spettrale complessiva della brillantezza energetica; per confronto si è pure riportata la curva relativa al centro del sole pubblicata recentemente da PETTIT<sup>(14)</sup>. Siccome i valori di questa sono dati in Watt per m<sup>2</sup> per 100 Å e rappresentano il flusso  $\pi F_\lambda$  per ogni m<sup>2</sup> fuori dell'atmosfera, per ridurli

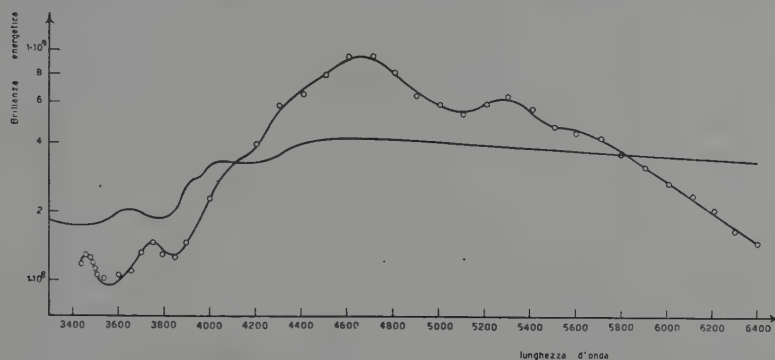


Fig. 10. — Brillanza energetica del Sole e della corona. La brillantezza energetica del Sole è moltiplicata per  $10^{-6}$ .

a brillantezza energetica è necessario moltiplicarli per il fattore  $1.47 \times 10^{13}$ . Infatti il flusso ricevuto dall'emisfero di raggio  $\rho$  = distanza terra-sole sarà  $2\pi\rho^2$  volte maggiore, e se espresso in erg per cm<sup>2</sup>, per sec e per cm di lunghezza d'onda sarà pure  $10^7 \times 10^{-4} \times 10^6 = 10^9$  volte maggiore. Quindi il flusso inviato sulla mezza sfera avente raggio  $\rho$  da tutta la superficie visibile del sole sarà  $2\pi\rho^2 \cdot 10^9 \times$  il valore dato da PETTIT. Se vogliamo il flusso per cm<sup>2</sup> della superficie solare dovremo dividere per  $2\pi R^2$  e quindi il fattore diventa  $\frac{10^9}{(R/\rho)^2}$ ; per avere la brillantezza energetica  $F_\lambda$  del sole dovremo ancora dividere per  $\pi$  e quindi il fattore diventa  $1.47 \times 10^{13}$ .

Nella tabella seguente è data la brillantezza energetica della corona  $N_C$  alla distanza 0.8 dal bordo del Sole e quella del centro del sole  $F_\lambda$ .

(14) PETTIT, loc. cit.

TABELLA VIII.

*Brillanza energetica della corona  $N_C$  a 0'.8 dal bordo solare e brillanza energetica del centro del sole  $F_\lambda$  (erg/cm<sup>2</sup> sec. steradiante).*

| $\lambda$ | $N_C \cdot 10^{-8}$ | $F_\lambda \cdot 10^{-14}$ | $\lambda$ | $N_C \cdot 10^{-8}$ | $F_\lambda \cdot 10^{-14}$ |
|-----------|---------------------|----------------------------|-----------|---------------------|----------------------------|
| 3450      | 1.15                | 1.70                       | 4800      | 8.00                | 4.10                       |
| 3500      | 1.10                | 1.75                       | 4900      | 6.80                | 4.00                       |
| 3550      | 0.94                | 1.85                       | 5000      | 5.90                | 3.95                       |
| 3600      | 1.00                | 1.95                       | 5100      | 5.40                | 3.90                       |
| 3650      | 1.10                | 2.00                       | 5200      | 5.80                | 3.85                       |
| 3700      | 1.30                | 1.95                       | 5300      | 6.10                | 3.80                       |
| 3750      | 1.45                | 1.85                       | 5400      | 5.50                | 3.70                       |
| 3800      | 1.32                | 1.85                       | 5500      | 4.70                | 3.65                       |
| 3850      | 1.27                | 2.00                       | 5600      | 4.50                | 3.60                       |
| 3900      | 1.45                | 2.60                       | 5700      | 4.10                | 3.55                       |
| 4000      | 2.25                | 3.20                       | 5800      | 3.60                | 3.50                       |
| 4100      | 3.18                | 3.20                       | 5900      | 3.30                | 3.50                       |
| 4200      | 3.80                | 3.25                       | 6000      | 2.70                | 3.40                       |
| 4300      | 5.20                | 3.50                       | 6100      | 2.30                | 3.35                       |
| 4400      | 6.60                | 3.90                       | 6200      | 1.95                | 3.35                       |
| 4500      | 7.80                | 4.05                       | 6300      | 1.70                | 3.25                       |
| 4600      | 9.00                | 4.10                       | 6400      | 1.45                | 3.20                       |
| 4700      | 9.30                | 4.10                       |           |                     |                            |

Dalla figura 10 risulta che la curva spettrale della corona presenta alcune particolarità localizzate a certe lunghezze d'onda. Già nella figura 3 a) si può vedere fra 3650 e 4000 Å un singolare abbassamento della curva spettrale dell'intensità apparente, che deve essere in parte prodotto da un effetto strumentale poichè si ritrova anche nella curva spettrale della intensità apparente della lampada in fig. 4. Tale « assorbimento » già constatato da GROTRIAN<sup>(15)</sup> nello spettro del sole e della corona, dà luogo a due distinte « componenti » quando l'intensità sia liberata dagli effetti

(15) GROTRIAN W., « Zsf. f. Aphys. », B. 3, pag. 199, 1931.

selettivi della sensibilità e dell'assorbimento strumentale. In tutto lo spettro della corona si notano le seguenti depressioni:

$$\lambda 3550; \quad \lambda 3850; \quad \lambda 4200; \quad \lambda 5100; \quad \lambda 5500.$$

Mentre le depressioni a 3850 e 4200 Å sono strettamente connesse alle analoghe nello spettro del centro del sole, nulla si può dire circa le altre. È probabile che la depressione a 3550 Å abbia la medesima origine di quella immediatamente seguente; delle altre due solo la seconda è visibile anche nella curva spettrale dell'intensità apparente (fig. 3 b).

GROTRIAN nel lavoro citato confronta lo spettro della corona con quello del centro del sole ottenuto nelle medesime condizioni, e giunge alla conclusione che la curva spettrale della corona è indipendente dalla altezza sul bordo solare, e che essa coincide sempre con quella del centro del sole con l'errore di  $\pm 0.1$  grandezza. Il primo di questi risultati è identico a quello da noi trovato a pag. 11; infatti avevamo constatato che le curve spettrali dei diversi punti della corona, rappresentata con ordinate logaritmiche, sono parallele e quindi identiche e sovrapponibili mediante spostamento in ordinate.

Il confronto delle curve spettrali di fig. 10, che si noti bene sono ottenute con strumenti e metodi differenti, ci mostra come nel complesso non si possa concludere come il GROTRIAN per quanto riguarda la distribuzione spettrale del sole e della corona. È vero che spostando opportunamente l'una delle due curve si può arrivare a far sì che gli scarti rispetto all'altra non superino  $\pm 0.5$  gr., ma tale valore è sempre troppo forte anche tenuto conto della diversità dei metodi e strumenti. Una certa analogia fra le due curve si riscontra nella zona violetta; per la rimanente zona spettrale invece le due curve sono molto diverse. Questo risulta ben chiaro dalla fig. 9 e dalla relativa tabella VII che danno la temperatura dal colore della corona e del Sole. Si vede che nel violetto tra 3450 e 3900 Å sole e corona hanno una temperatura assai vicina; fra 3900 e 4550 Å invece differiscono alquanto. Da questa ultima lunghezza d'onda in poi non esiste una temperatura dal colore per la corona poichè il gradiente fra 4550 e 5150 Å è eccezionalmente piccolo, e da 5150 Å in poi non ha una reale significato fisico. Si può concludere che la curva spettrale del sole e della corona, pur essendo assai simili, hanno delle differenze particolari per le quali sarebbe assai difficile affermare la loro completa identità.

Così per esempio il rapporto blu violetto è molto maggiore per la corona che per il sole, mentre è dello stesso ordine di grandezza il rapporto giallo blu. Soprattutto importante è il fatto che mentre la curva spettrale del sole si può rappresentare assai bene fra 3900 e 6400 Å con quella di un corpo nero che nel nostro sistema ha una temperatura di 5000 K circa, la curva spettrale della corona invece solo nel violetto e nel blu può

essere rappresentata come un corpo nero di temperatura 6700 e 2300 K, scostandosi molto invece nelle parti rimanenti dello spettro.

La brillantezza energetica della corona è stata determinata anche da PANNEKOEK e DOORN <sup>(16)</sup> nell'eclissi del 29 giugno 1927 mediante una camera fotografica e un prisma obbiettivo a liquido. I risultati degli AA. non sono molto precisi, sia perchè lo spettro era riuscito sovraesposto, sia per le numerose correzioni richieste dal procedimento. Possiamo tuttavia fare un confronto fra i dati di PANNEKOEK e DOORN e i nostri tenendo conto delle differenti condizioni geometriche e strumentali.

A pag. 31 della loro Memoria gli AA. dànno l'energia ricevuta da 1 mm.<sup>2</sup> della lastra per 1 Å di lunghezza d'onda. La camera fotografica aveva 6 cm. di apertura e 27 cm. di distanza focale, l'angolo solido del flusso incidente sulla lastra era quindi  $\omega = 0.0388$  ster.; la brillantezza energetica si ottiene quindi dividendo per  $\omega$ , per la superficie in cm<sup>2</sup> e moltiplicando per 10<sup>8</sup> per ridurre a cm. di lunghezza d'onda. Il fattore di trasformazione risulta allora  $2.58 \cdot 10^{11}$ . Bisogna ancor tener conto che i risultati di PANNEKOEK e DOORN si riferiscono ad un punto che dista dal centro del Sole 1.42 volte il raggio solare; i nostri invece ad un punto che ha dal centro distanza 1.06. Il rapporto dell'intensità della corona per due punti così situati è secondo BAUMBACH <sup>(17)</sup> circa 12, il fattore complessivo per trasformare i dati degli AA. a brillantezza energetica, relativa ad un punto che dista 1.06 dal centro del Sole è:

$$3.1 \times 10^{12}$$

TABELLA IX.

*Confronto della brillantezza energetica della corona con quella determinata da PANNEKOEK e DOORN.*

| $\lambda$ | $N_C$             |                   | Rapporto | $\lambda$ | $N_C$             |                   | Rapporto |
|-----------|-------------------|-------------------|----------|-----------|-------------------|-------------------|----------|
|           | Pa.-Do.           | Ri.               |          |           | Pa.-Do.           | Ri.               |          |
| 3920      | $7.30 \cdot 10^8$ | $1.59 \cdot 10^8$ | 4.6      | 4790      | $19.2 \cdot 10^8$ | $9.30 \cdot 10^8$ | 2.06     |
| 4000      | 21.8              | 2.25              | 9.7      | 5210      | 18.0              | 5.80              | 3.10     |
| 4150      | 24.2              | 3.50              | 6.9      | 5500      | 16.1              | 4.70              | 3.43     |
| 4400      | 28.8              | 6.60              | 4.35     | 6030      | 18.0              | 2.55              | 7.00     |

<sup>(16)</sup> « Verhandelingen der K. Akademie Amsterdam », vol. XIV, n. 2.

<sup>(17)</sup> UNSÖLD, « Physik der Sternatmosphären », pag. 440.

Dato l'ordine di esattezza delle misure di questo genere l'accordo si può ritenere soddisfacente.

Integrando la curva della brillantezza specifica costruita con la tabella VII si ha la brillantezza energetica integrale, cioè l'energia emessa da un  $\text{cm}^2$  della superficie della corona (distanza dal centro del sole 1.06 raggi solari) per secondo e per steradiante, nella zona spettrale 3450-6400 Å.

*Corona*: Brillantezza energetica integrale  $\Sigma_c = 1.32_4 \cdot 10^4 \text{ erg/cm}^2 \text{ sec. ster.}$

*Sole* (centro): Brillantezza energetica integrale  $\Sigma_\odot = 1.06 \cdot 10^{10}$

$$\frac{\Sigma_c}{\Sigma_\odot} = 1.25 \cdot 10^{-6}.$$

Per il medesimo punto della corona BAUMBACH <sup>(17)</sup> dà 1.95, mentre si avrebbe 1.29 per un punto che dista 1.10 dal centro del Sole.

---

**Fisica.** — *Sulla scissione dell'uranio con neutroni veloci.* Nota di MARIO AGENO, EDOARDO AMALDI, DARIA BOCCIARELLI, GIULIO CESARE TRABACCHI, presentata <sup>(1)</sup> da GIULIO CESARE TRABACCHI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

In un precedente lavoro <sup>(2)</sup> abbiamo esposto i risultati di alcune misure intese a confrontare la sezione d'urto media per scissione dell'uranio, quale si ottiene usando neutroni veloci provenienti da diverse reazioni nucleari. Siamo così riusciti a mostrare che, entro gli errori di misura, ossia entro circa 8 %, la sezione d'urto media per i neutroni delle reazioni  $D + D$ ,  $D + Be$ ,  $D + B$  sembra essere costante. Questo risultato ci sembra costituire una prova sperimentale del fatto previsto teoricamente da BOHR e WHEELER <sup>(3)</sup>, che la sezione d'urto dell'uranio per il fenomeno di scissione deve rimanere praticamente costante per energie del neutrone superiori a 0,7 MV.

Una analoga misura eseguita con i neutroni del  $D + Li$  ci ha dato una sezione d'urto circa 1,4 volte maggiore. Per quanto la differenza osservata con i neutroni del  $D + Li$ , rispetto a quella ottenuta con le sorgenti di neutroni sopra nominate, sia assai superiore all'errore da cui sono affette le singole misure, abbiamo ritenuto opportuno ripetere un confronto degli effetti prodotti sull'uranio dai neutroni del  $D + Be$  e del  $D + Li$ , facendo uso di una tecnica diversa.

Infatti potrebbe venire il sospetto che il procedimento usato nelle misure esposte nella Nota precedente, dia risultati affetti da un errore sistematico dovuto al non tener conto in modo sufficiente dell'anisotropia con cui i neutroni vengono emessi nelle diverse reazioni nucleari.

Ci siamo quindi preoccupati di usare una tecnica in cui si tenesse conto in modo completo sia della anisotropia dei neutroni veloci che della assai minore anisotropia dei neutroni lenti.

---

<sup>(1)</sup> Nell'Adunanza del 17 maggio 1940-XVIII.

<sup>(2)</sup> M. AGENO, E. AMALDI, D. BOCCIARELLI, B. N. CACCIAPUOTI, G. C. TRABACCHI, « Atti Acc. d'Italia ».

<sup>(3)</sup> N. BOHR, J. A. WHEELER, « Phys. Rev. », 56, 426 (1939).



Premettiamo che i risultati così ottenuti confermano il fatto precedentemente osservato, ossia che la sezione d'urto dei neutroni della  $D + Li$  aventi uno spettro estendentesi da 0 fino a 15 MV <sup>(4)</sup>, è circa 1,4 volte maggiore di quella  $D + Be$  (0 — 4,6 MV) <sup>(5)</sup>.

Come abbiamo osservato nella Nota precedente per determinare la sezione d'urto media, in misura relativa, basta misurare il rapporto fra il numero di scissioni che si osservano in uno strato di uranio, anche spesso, di forma sferica, col centro nel punto della targhetta colpita dai deutoni, al numero totale dei neutroni, incidenti. Come si è fatto notare più volte la necessità di far misure su tutto l'angolo solido è imposta dalla anisotropia con cui i neutroni sono emessi in diverse reazioni.

Faremo uso in questo lavoro di alcuni dati già pubblicati nella tabella II del lavoro precedentemente citato; e precisamente del numero  $n_U$  di scissioni osservare in un minuto nella camera a  $U_3O_8$  posta a cm. 5,7 dal centro della targhetta, in una direzione a  $90^\circ$  con la direzione dei neutroni incidenti <sup>(1)</sup>. Tali dati sono riportati nella terza colonna nella tabella I. Nella seconda colonna della stessa tabella riportiamo i corrispondenti valori dell'attività  $a$  di una lastra di Rh di  $cm^2$   $5 \times 5,5$  e  $gr/cm^2$  0,36 di spessore quale si ottiene sostituendo questo rivelatore allo strato di uranio e immergendo il tutto in un cilindro di acqua di cm. 25 di altezza e cm. 28 di diametro.

Per tener conto in modo completo della anisotropia con cui i neutroni veloci vengono emessi nelle diverse reazioni nucleari abbiamo montato la stessa camera a uranio su di un braccio in modo da poterla far girare attorno ad un'asse giacente nel piano della targhetta. La distanza dello strato di  $U_3O_8$  dall'asse di rotazione era di cm. 11. È stato così possibile misurare sia nel caso del Li che del Be il numero  $I(\theta)$  di scissioni che si osservano nella nostra camera ad U in un dato tempo, in funzione dell'angolo  $\theta$  fra la direzione dei deutoni incidenti e la direzione dei neutroni osservati. Le misure, che sono state eseguite di  $22^\circ$  e  $1/2$  in  $22^\circ$  e  $1/2$  da  $0^\circ$  fino a  $135^\circ$ , verranno riportate e discusse altrove.

Consideriamo il rapporto

$$[1] \quad s = \bar{I}/I(90^\circ)$$

del valor medio ottenuto dando il peso  $\sin \theta$  alla misura  $I(\theta)$ , alla misura eseguita a  $90^\circ$ . È questo evidentemente il fattore per cui bisogna moltiplicare il numero di scissioni osservate a  $90^\circ$  con la direzione dei deutoni

---

<sup>(4)</sup> T. W. BONNER, W. M. BRUBAKER, «Phys. Rev.», **47**, 973 (1935); **48**, 742 (1935); W. E. STEPHENS, «Phys. Rev.», **53**, 223 (1938).

<sup>(5)</sup> T. W. BONNER, W. M. BRUBAKER, «Phys. Rev.», **50**, 308 (1936).

<sup>(6)</sup> Loc. cit. <sup>(2)</sup> a pag.

incidenti per avere il numero medio, rispetto all'angolo, delle scissioni provocate dai neutroni in esame. I valori del rapporto  $s$  sono dati nella quarta colonna della tabella I; la quantità  $\frac{n_u s}{a}$  data nella quinta colonna, è evidentemente proporzionale al numero di scissioni osservato in media su tutto l'angolo solido, diviso per l'attività del Rh.

TABELLA I.

| Reazione       | $a$           | $n_U$       | $s$             | $n_u s/a$         |
|----------------|---------------|-------------|-----------------|-------------------|
| Be + D 0,85 MV | $2217 \pm 23$ | $580 \pm 7$ | $1,04 \pm 0,03$ | $0,272 \pm 0,009$ |
| Li + D 0,75 MV | $1627 \pm 30$ | $660 \pm 8$ | $0,98 \pm 0,03$ | $0,398 \pm 0,015$ |
| Li + D 0,60 MV | $780 \pm 6$   | $310 \pm 5$ | $0,98 \pm 0,03$ | $0,390 \pm 0,014$ |

Per misurare il numero totale dei neutroni emessi dalla sorgente ci siamo anche questa volta serviti del metodo di rallentare i neutroni a mezzo di un sostanza idrogenata (acqua) di volume sufficientemente grande, e di misurarli a mezzo della radioattività provocata dai neutroni lenti. Mentre però nel precedente lavoro su questo argomento ci siamo serviti di una lastra di rodio che veniva posta a diverse distanze dalla targhetta, in avanti oppure a  $90^\circ$  con la direzione dei deutoni incidenti, abbiamo preferito, allo scopo di ottenere una grandezza proporzionale alla densità dei neutroni lenti, integrata su tutto il volume della sostanza idrogenata, sciogliere entro l'acqua stessa il sale di un elemento che divenga radioattivo sotto l'azione dei neutroni lenti. Se dopo un certo tempo di irraggiamento, si mescola la soluzione e si misura l'attività di una sua porzione, questa è evidentemente proporzionale al numero totale dei neutroni emessi, essendosi evidentemente automaticamente mediato sia rispetto alla distanza dalla targhetta che rispetto all'angolo.

A tale scopo abbiamo disciolto in 100 litri di acqua kg. 30 di  $MgCl_2$  ed abbiamo disposto questa soluzione, in forma di un cilindro di cm. 50 di altezza e cm. 50 di diametro, in modo che la targhetta venisse a trovarsi nel suo centro. Tale soluzione veniva irradiata per 40 minuti in modo da attivare il periodo di 37 minuti del cloro. Durante l'irraggiamento la soluzione veniva continuamente rimescolata soffiando, a mezzo di una pompa, dell'aria in prossimità del fondo del recipiente. Finito l'irraggiamento un recipiente di vetro a pareti sottili, avente la forma di un cilindro cavo della capacità di cc. 20 veniva riempito di soluzione e infilato su di un contatore di vetro a pareti sottili di mm. 20 di diametro; veniva così

determinato il numero totale degli impulsi registrati dal consatore in 40 minuti di misura, contati a partire da tre minuti dopo la fine dell'irraggiamento. Abbiamo sempre mantenuto costante sia il tempo di irraggiamento che quello di misura per evitare di introdurre errori dovuti alla presenza, nella nostra soluzione, di altri elementi radioattivi, per esempio il magnesio, che si attivano con diversi periodi. Questa precauzione era particolarmente resa necessaria dal fatto che il cloruro di magnesio da noi usato era un prodotto commerciale contenente varie impurità, fra cui una certa quantità di potassio. L'effetto di zero del contatore veniva quindi sempre misurato ponendo, attorno al contatore, il suddetto recipiente di vetro ripieno di soluzione non irradiata; in queste condizioni si avevano circa 63 impulsi al minuto. I numeri d'impulsi  $i$  dati nella seconda colonna della tabella II sono già corretti per l'effetto di zero ( $\sim 62 \times 40$ ).

TABELLA II.

| Reazione | $i$    | $b$            | $i/b$         | $\sim \sigma$   | $\sigma_{Li}/\sigma_{Be}$ |                   |
|----------|--------|----------------|---------------|-----------------|---------------------------|-------------------|
| $1^a$ {  | Be + D | $8312 \pm 116$ | $408 \pm 11$  | $20,4 \pm 0,6$  | 133                       | { $1,37 \pm 0,09$ |
|          | Li + D | $6063 \pm 107$ | $280 \pm 6$   | $21,6 \pm 0,6$  | 182                       |                   |
| $2^a$ {  | Be + D | $8247 \pm 115$ | $388 \pm 6$   | $21,2 \pm 0,5$  | 128                       | { $1,49 \pm 0,09$ |
|          | Li + D | $5197 \pm 100$ | $252 \pm 3$   | $20,6 \pm 0,5$  | 191                       |                   |
| $3^a$ {  | Be + D | $7474 \pm 112$ | $1430 \pm 30$ | $5,23 \pm 0,01$ | 520                       | { $1,34 \pm 0,08$ |
|          | Li + D | $8128 \pm 114$ | $1440 \pm 30$ | $5,65 \pm 0,01$ | 697                       |                   |
|          |        |                |               |                 | $1,40 \pm 0,05$           |                   |

Al doppio scopo di assicurarsi della costanza di emissione di neutroni da parte del tubo, durante i 40 minuti di irraggiamento, e di poter confrontare i risultati ottenuti con la D + Li e la D + Be, veniva misurata a intervalli di 5 minuti l'attività di una lastra di rodio irradiata per un minuto in una posizione fissa rispetto alla targhetta, entro la soluzione di  $MgCl_2$ .

Nella terza colonna della tabella II è dato il valore medio  $b$  delle misure eseguite con la solita lastra di rodio in questo modo. Mentre però nelle due coppie di misure I e II (vedi tabella II) il rodio veniva posto a cm. 13,2 dalla targhetta in una direzione a  $90^\circ$  rispetto alla direzione dei deutoni incidenti, nella terza coppia di misure il rodio era stato posto

nella stessa direzione ma a soli cm. 5,7 dalla targhetta. I risultati ottenuti nelle esperienze I e II si possono confrontare con il risultato della III esperienza, dato che, come risulta dalle nostre curve che danno attività del rodio A ( $r$ ) in funzione della distanza, il rapporto  $A(5,7)/A(13,2)$  risulta lo stesso nel caso della  $D + Li$  e della  $D + Be$ ; abbiamo anche controllato che questo rapporto non viene alterato dalla presenza del sale.

Nella quarta colonna della tabella II è dato il rapporto  $i/b$  dei dati delle colonne seconda e terza, ossia dell'attività media della soluzione all'attività del rodio.

È ora evidente che il rapporto dei dati della quarta colonna della tabella I ai dati della quarta colonna della tabella II è proporzionale alla sezione d'urto media per il processo di scissione per i neutroni usati; tali dati sono riportati nella quinta colonna della tabella II, mentre nella sesta colonna sono dati i rapporti dei risultati ottenuti con i neutroni del Li e del Be per le due coppie di misure. Si trova dunque, prendendo la media dei tre valori ottenuti, che la sezione media dei neutroni del Li è 1,4 volte maggiore della sezione d'urto media dei neutroni del Be. Questo risultato sembra dunque confermare pienamente il risultato ottenuto nel precedente lavoro con una diversa tecnica.

Abbiamo tentato di eseguire con la stessa tecnica una misura con i neutroni del  $D + D$  (targhetta di  $Zr + D_2$ ) ma l'attivazione della soluzione era troppo debole per poter dare risultati attendibili.

D'altra parte l'aver confermato nel caso delle reazioni  $D + Be$  e  $D + Li$ , con una tecnica assai diversa, i risultati ottenuti nel precedente lavoro, ci sembra costituire una prova della correttezza delle misure là esposte.

In conclusione ci sembra di poter affermare che la sezione d'urto per la scissione dell' $U^{238}$  è, in media, costante per i neutroni delle reazioni  $D + D$ ,  $D + Be$  e  $D + B$ , mentre per i neutroni della reazione  $D + Li$  è circa 1,4 volte maggiore.

Siamo grati al prof. BOHR per averci suggerito, in una comunicazione privata, la seguente spiegazione dell'aumento subito dalla sezione d'urto del fenomeno di scissione dell'uranio per elevate energie dei neutroni incidenti.

Come è stato mostrato da BOHR e WHEELER la sezione d'urto del fenomeno di scissione dell' $U^{238}$  è circa  $1/5$  della sezione d'urto per la formazione, sotto l'azione dei neutroni incidenti, del nucleo composto  $U^{239}$ ; per questo sono infatti possibili due processi: la scissione e l'evaporazione di un neutrone; questo secondo processo è circa quattro volte più probabile della scissione. Ora purché il nucleo  $U^{239}$  sia sufficientemente eccitato è possibile che, dopo l'evaporazione di un neutrone, il nucleo residuo  $U^{238}$  abbia ancora un'energia superiore alla corrispondente energia critica per

la scissione. Infatti dato che l'uranio  $U^{238}$  è un nucleo contenente un numero pari sia di protoni che di neutroni, ci si deve aspettare che ad esso corrisponda un'energia critica per la scissione minore di quella necessaria per l'emissione di un neutrone; in altri termini il caso dell' $U^{238}$  è simile a quello dell' $U^{235}$ .

Si comprende da tutto ciò che usando neutroni di energia sufficientemente elevata, la sezione d'urto del fenomeno di scissione aumenti, in quanto oltre alla scissione per così dire diretta dell' $U^{239}$  diventa possibile, da un certo punto in poi, la scissione dell' $U^{238}$  ottenuto in seguito all'evaporazione di un neutrone dall' $U^{239}$ . Per neutroni di energia sufficientemente elevata si avrebbe quindi, dato che presumibilmente circa metà dei nuclei  $U^{238}$  eccitati si scinderebbero e metà darebbero luogo a ulteriore evaporazione di un neutrone, che la sezione d'urto totale per la scissione (diretta dell' $U^{239}$  + mediata dell' $U^{238}$ ) è circa tre volte maggiore della sezione d'urto che si ha per neutroni di alcuni milioni di volt di energia.

Se in seguito all'evaporazione del neutrone il nucleo  $U^{238}$  venisse lasciato sempre egualmente eccitato, ci si dovrebbe attendere anche per questo fenomeno un'energia critica  $E_f$  al di sotto della quale il fenomeno non potrebbe avvenire, mentre al di sopra di  $E_f$  la sezione d'urto relativa a questo processo dovrebbe rimanere costante. In realtà l' $U^{238}$  viene lasciato, in seguito all'evaporazione di un neutrone, in diversi stati di eccitazione, i quali peraltro sono distribuiti su di un intervallo di pochi milioni di volt. Ci sembra quindi che si possa grossolanamente cercare di rappresentare l'andamento della sezione d'urto come sopra abbiamo detto, e cercare di valutare, servendoci del nostro dato sperimentale, l'energia critica  $E_f$ .

Detta  $\alpha$  la percentuale di neutroni dello spettro del  $D + Li$  aventi energia superiore ad  $E_f$  si ha infatti

$$\sigma(1 - \alpha) + 3\sigma\alpha = 2,4\sigma$$

da cui

$$\alpha = 0,20$$

che confrontato con i dati dello spettro del  $D + Li$ , darebbe  $E_f \sim 11$  MV.

L'elevato valore dell'energia critica  $E_f$  giustifica il fatto da noi precedentemente osservato che la sezione d'urto con i neutroni della  $D + D$  è circa eguale a quella ottenuta nella reazione  $D + B$ .

**Chimica.** — *Spettro Raman degli esteri metilici degli acidi 2 e 3-piridincarbonici.* Nota di ADRIANO BETTI, presentata <sup>(1)</sup> dall'Accademico GIAN BATTISTA BONINO.

Gli spettri RAMAN dell'acido benzoico e di altri acidi benzoici sostituiti, e dei rispettivi esteri sono già noti specialmente attraverso i lavori di BONINO e collaboratori <sup>(2)</sup>, di KOHLRAUSCH e collaboratori <sup>(3)</sup> e di MATSUNO e HAN <sup>(4)</sup>.

Mancavano completamente nella bibliografia ricerche analoghe su gli acidi piridincarbonici. L'interesse e il significato che gli acidi piridincarbonici e i loro derivati hanno assunto sia in chimica biologica che in farmacologia può consigliare ad approfondire le ricerche chimico-fisiche sulla loro costituzione molecolare. D'altra parte mentre non mancano studi moderni che chiariscono la costituzione molecolare del benzene e dei suoi derivati, la costituzione dei composti di natura piridinica è ancora poco studiata sotto un punto di vista chimico-fisico moderno.

Anche i contributi sperimentali per un tale studio, attraverso alla conoscenza degli spettri molecolari, sono invero piuttosto rari.

Ho perciò preparato e studiato gli spettri RAMAN degli esteri metilici degli acidi 2 e 3-piridincarbonici e mi propongo in ulteriori Note di studiare in modo sistematico sotto questo punto di vista altri derivati piridinici.

#### PARTE SPERIMENTALE.

*Estere metilico dell'acido 2-piridincarbonico (acido picolinico).* — Ho preparato l'estere secondo il metodo di ENGLER <sup>(5)</sup> da alcool metilico e dall'acido picolinico in presenza di HCl gassoso p. e. 7–8 mm/Hg 109°–110°.

Ho, prima dell'esterificazione, purificato l'acido picolinico attraverso il suo sale di rame <sup>(6)</sup> ottenendo, dopo cristallizzazione da benzolo, un composto bianchissimo dal p. f. 135°–136°.

<sup>(1)</sup> Nell'Adunanza del 17 maggio 1940—XVIII.

<sup>(2)</sup> BONINO—R. MANZONI ANSIDEI, « Mem. R. Acc. Sc. Bologna », seduta del 27 maggio 1934.

<sup>(3)</sup> KOHLRAUSCH e STROCKMAIR, « Mh. Chem. », 66, 316 (1935); PONGRATZ, SEKA, « Mh. Chem. », 66, 307 (1935).

<sup>(4)</sup> MATSUNO e HAN, « Bull. Chem. Soc. Japan », 8, 333 (1933).

<sup>(5)</sup> « Ber. », 27, 1784 (1894).

<sup>(6)</sup> PINNER, « Ber. », 33, 1225 (1900); LEY e FICKEN, « Ber. », 50, 1123 (1917).



*Estere metilico dell'acido 3-piridincarbonico (acido nicotinic).* — Ho preparato col metodo di ENGLER questo estere p. f. 38° — p. e. 204° 760 mm/Hg. La ultima purificazione dei 2 esteri è stata fatta per distillazione frazionata nel vuoto.

Gli spettri RAMAN sono stati eseguiti sulle sostanze allo stato liquido (l'estere metilico dell'acido 3-picolinico o nicotinic che è solido alla temperatura ordinaria è stato mantenuto allo stato di fusione per mezzo di un riscaldatore elettrico). Lo spettrografo che ho usato è uno spettrografo della ditta Zeiss a tre prismi di luminosità  $f = 1/5$  con camera di formato  $6 \frac{1}{2}$  per 9. Per l'illuminazione della sostanza ho usato una lampada a specchio ellittico applicando il metodo dei filtri complementari <sup>(7)</sup> ed impiegando il filtro di vetro C<sub>3</sub> (435,8) di Zeiss e una soluzione diluitissima di cromato di potassio. Le sostanze contenute in tubetti RAMAN della capacità di circa 1 cc. erano saldati alla lampada nel vuoto.

*Estere metilico dell'acido 2-piridincarbonico (acido picolinico).*  $\Delta\nu$ : 3071 (5 dif); 3017 (1 dif); 2956 (4); 2905 (1); 2847 (1/2); 1742 (6), 1721 (5); 1611 (1/2); 1583 (9); 1569 (9); 1467 (1); 1440 (2); 1307 (4); 1280 (3); 1244 (3); 1192 (0); 1151 (1); 1127 (1); 1086 (1); 1043 (8); 993 (10); 966 (1/2); 828 (4); 696 (1); 618 (4); 401 (0); 358 (2 dif); 215 (2 dif); 170 (1/2); 136 (4 dif).

*Estere metilico dell'acido 3-picolinico (acido nicotinic).*  $\Delta\nu$ : 3067 (2 dif); 2958 (2); 1726 (3); 1588 (8); 1449 (1/2); 1282 (3); 1226 (1); 1192 (2); 1034 (8) 1024 (1); 824 (1); 698 (1); 618 (1); 357 (1); 214 (2 dif); 165 (1 dif); 129 (1 dif).

#### DISCUSSIONE DEI RISULTATI.

Lo spettro RAMAN della piridina e dei suoi derivati è noto specialmente attraverso le recenti ricerche di MANZONI ANSIDEI <sup>(8)</sup>.

Ricerche sulla piridina e sull' $\alpha$  e  $\beta$  picolina sono anche state eseguite da diversi AA. <sup>(9)</sup>, <sup>(10)</sup>, <sup>(11)</sup>, <sup>(12)</sup>, <sup>(13)</sup>.

Queste ricerche precedenti però si riferivano quasi esclusivamente a metil, dimetil e trimetilpiridine. Fanno eccezione una ricerca di MANZONI

<sup>(7)</sup> ANANTHAKRISHNAN, « Proc. Ind. Acc. Sc. », 5, 76 (1937); R. MANZONI ANSIDEI, « Atti R. Acc. Italia », I, n. 10 (1940); M. ROLLA, « Gaz. Chim. It. », 69, 781 (1939).

<sup>(8)</sup> R. MANZONI ANSIDEI, « Boll. Scient. Chim. Ind. Bologna », I, n. 5 (1940).

<sup>(9)</sup> BONINO-R. MANZONI ANSIDEI, « Mem. Acc. Sc. Bologna », IX, gennaio 1933-34.

<sup>(10)</sup> KOHLRAUSCH - PONGRATZ - SEKA, « Mhon. », 70, 213 (1937).

<sup>(11)</sup> OKUBO - HAMADA, « Soc. Rep. Tohoku Un. », 18, 601 (1929).

<sup>(12)</sup> JAKTAR, « Ind. J. Phys. », 10, 23 (1936).

<sup>(13)</sup> Vedi nota <sup>(8)</sup>.



sulla 5-nitro-2-cloropiridina ed una di MURRAY e ANDREWS sulla 2-cloropiridina <sup>(14)</sup>.

KOHLRAUSCH <sup>(15)</sup> rilevava già la grande analogia esistente tra lo spettro RAMAN della piridina e quello del benzolo e considerava, come nel benzolo, poco probabile anche per la piridina una formula Kekuleiana a doppi legami localizzati. Le ricerche di MANZONI su piridine sostituite e su cloridrati della piridina <sup>(16)</sup> ed omologhi, mettono però in evidenza dei fatti che potrebbero far supporre in questi derivati una localizzazione della nuvola di carica antisimmetrica al piano di simmetria della molecola in veri e propri legami localizzati.

L'osservazione dei risultati da me ottenuti sugli esteri degli acidi piridincarbonici rileva innanzi tutto come lo spettro dell'acido 2-piridincarbonico abbia un numero di righe nettamente superiore a quello dell'estere dell'acido 3-piridincarbonico. Questa differenza del numero delle righe dei due spettri non si può spiegare invocando difficoltà sperimentali nell'ottenere lo spettro dell'acido 3-piridincarbonico perchè gli spettri dei 2 esteri sono in pratica ottenibili con eguale facilità. Così la grande purezza dei due campioni studiati permette di concludere che alcune righe dello spettro dell'estere picolinico e che mancano nello spettro del 3-derivato siano da attribuire a oscillazioni molecolari presentate soltanto da quest'ultimo.

E cioè mentre lo spettro dell'estere dell'acido nicotinico mostra nella zona 1560-1600  $\text{cm}^{-1}$  soltanto una riga Raman intensa, lo spettro del derivato  $\alpha$  ne mostra due nettissime ed intense. L'estere dell'acido 2-piridincarbonico mostra pure raddoppiata la riga a 1449  $\text{cm}^{-1}$  data pure dall'estere dell'acido nicotinico e che molto verosimilmente è da attribuirsi al gruppo metilico.

Per ciò che riguarda le righe nucleari piridiniche è assai interessante osservare come l'estere dell'acido 3-picolinico non mostri la intensa riga dovuta alla pulsazione del nucleo piridinico a 990  $\text{cm}^{-1}$  circa, riga che è mostrata intensa dagli spettri RAMAN della piridina e di tutte le piridine sostituite eccezion fatte da quello della 5-nitro-2-cloropiridina. Le precedenti ricerche di MANZONI hanno mostrato però che questa caratteristica riga nucleare scompare pure negli spettri Raman delle piridine salificate (cloridrati di piridina ed omologhi).

In questo caso la scomparsa della detta riga è indice di forti perturbazioni nella struttura elettronica del nucleo piridinico.

La mancanza di questa riga nello spettro dell'estere metilico dell'acido nicotinico può perciò aprire la via ad ulteriori indagini sulle dif-

<sup>(14)</sup> ANDREWS - MURRAY, « J. Chem. Phys. », *I*, 406 (1933).

<sup>(15)</sup> KOHLRAUSCH, « Zeit. Phys. Chem. », *B*, 30, 314 (1935).

<sup>(16)</sup> R. MANZONI ANSIDEI, « Boll. Scient. Chim. Ind. », Bologna, *I*, n. 5 (1940).

ferenze di struttura elettronica del nucleo piridinico nei due esteri studiati.

Nell'estere metilico dell'acido 2-picolinico compare poi una riga intensa a  $1307\text{ cm}^{-1}$  in una zona dello spettro cioè dove i derivati piridinici mono e bisostituiti non presentano righe notevoli.

Ma un altro fatto che attira fortemente l'attenzione dell'osservatore è quello di trovare nello spettro RAMAN dell'estere metilico dell'acido 2-picolinico due intense righe RAMAN riferibili al gruppo  $\text{C}=\text{O}$  del carbossile esterificato. Mentre una di queste righe a  $1721\text{ cm}^{-1}$  corrisponde con l'unica riga del  $\text{C}=\text{O}$  a  $1726\text{ cm}^{-1}$  mostrata dall'estere dell'acido nicotinico e coincide nella sua posizione con riga del  $\text{C}=\text{O}$  presentata dagli esteri metilici ed etilici dell'acido benzoico e degli acidi benzoici sostituiti <sup>(16)</sup>, l'altra riga cade a  $1742\text{ cm}^{-1}$  e cioè in una posizione che non è affatto caratteristica per il  $\text{C}=\text{O}$  etero coniugato a nuclei aromatici, ma corrisponde piuttosto al  $\text{C}=\text{O}$  di alcuni esteri prettamente alifatici (per es. estere metilico dell'acido acetico, estere propilico dell'acido propionico; estere etilico dell'acido butirrico ecc.).

L'osservazione quindi degli spettri RAMAN degli esteri metilici dei due acidi piridincarbonici studiati rivelerebbe nette differenze sia a carico del nucleo piridinico sia a carico del carbossile esterificato a seconda che la sostituzione di quest'ultimo gruppo sia fatta in  $\alpha$  o in  $\beta$ .

Le analogie chimiche che si possono porre tra i derivati monosostituiti della piridina e i bisostituiti del benzolo, considerando l'azoto piridinico come un sostituyente orientante in meta, potrebbero apparire come una direttrice di lavoro per la prosecuzione di questa ricerca: però un primo esame degli spettri RAMAN dei due esteri studiati mostra come l'analogia non sia direttamente ed immediatamente applicabile ad una facile interpretazione dei fenomeni osservati.

Ringrazio il prof. R. MANZONI ANSIDEI per i consigli e l'interesse addimostratomi nell'esecuzione di questo lavoro.

---

<sup>(17)</sup> Vedi nota <sup>(2)</sup> <sup>(3)</sup>.

**Chimica.** — *Contributi sperimentali al problema della «chelazione».* — XIII. *Spettri Raman di soluzioni di aldeide salicilica* <sup>(1)</sup>. Nota di MARIO ROLLA, presentata <sup>(2)</sup> dall'Accademico GIAN BATTISTA BONINO.

In precedenti lavori BONINO e collaboratori (1) hanno pubblicato i risultati di una prima serie di esperienze, sugli spettri Raman di ossialdeidi aromatiche, diacetilresorcine ecc. In base a questi risultati veniva discussa la probabilità di chiusura di un anello «chelato» con legame a ponte di idrogeno. I risultati di queste ricerche, che stanno in relazione con il presente lavoro, si possono così riassumere:

a) Per l'aldeide salicilica il fenomeno di «chelazione» è particolarmente evidente; la frequenza caratteristica del CO aldeidico risulta abbassata in maniera notevole. Non altrettanto si verifica per altre aldeidi aromatiche sostituite in posizione orto per es. con Cl, CH<sub>3</sub>.

b) Nelle aldeidi meta e paraossisostituite lo spostamento della frequenza del CO aldeidico verso le minori frequenze è più piccolo che non nel derivato orto. Particolarmente la frequenza del derivato meta è anche meno spostata di quella del derivato para (sempre s'intende rispetto allo spostamento osservato nella orto-ossibenzaldeide).

c) L'aldeide ortoossibenzoica mostra, e con forte intensità, una riga a 1320 cm<sup>-1</sup>. Tale riga non appare nello spettro della meta e della paraossibenzaldeide, ed è caratteristica in alcuni spettri Raman di sostanze a nuclei condensati aventi un anello eterociclico, chiuso con un atomo di ossigeno.

Questi risultati erano favorevoli all'ipotesi di un effetto chelativo intramolecolare per l'aldeide orto, mentre per la para e per la meta aldeide erano da supporre degli effetti di natura intermolecolare più che intramolecolare, effetti questi più sensibili nella para che non nella metaossibenzaldeide.

Le aldeidi surricordate furono studiate quasi contemporaneamente da KOHLRAUSCH e KAHOVEC (2), i quali eseguirono lo spettro Raman delle

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica-Fisica ed Elettrochimica della R. Università di Bologna.

<sup>(2)</sup> Nell'Adunanza del 17 maggio 1940-XVIII.

tre ossialdeidi benzoiche isomere allo stato omogeneo fuso, a differenza di BONINO e collaboratori i quali avevano eseguito gli spettri in soluzioni alcooliche. In linea generale gli spettri Raman dei due A.A. sono confrontabili, cionondimeno appaiono delle differenze fra gli spettri osservati nelle due condizioni suddette di esperienza. Tali differenze sono di spiccato interesse per quanto verrò esponendo. Riporto gli spettri Raman delle tre aldeidi eseguiti nelle condizioni accennate, limitandomi però a riprodurre di essi spettri quella zona che più particolarmente ci interessa, cioè la zona dove appaiono le righe caratteristiche del CO.

TABELLA I.

| o-ossibenzaldeide          |                                | m-ossibenzaldeide                         |                                           | p-ossibenzaldeide                         |                                           |
|----------------------------|--------------------------------|-------------------------------------------|-------------------------------------------|-------------------------------------------|-------------------------------------------|
| Bonino<br>(liquido)<br>(1) | Kohlrausch<br>(liquido)<br>(2) | Bonino<br>(in soluz.<br>alcoolica)<br>(1) | Kohlrausch<br>(allo stato<br>fuso)<br>(2) | Bonino<br>(in soluz.<br>alcoolica)<br>(1) | Kohlrausch<br>(allo stato<br>fuso)<br>(2) |
| 1575 (4)                   | 1575 (4)                       | 1277 (4d)                                 | 1274 (4)                                  | 1462 (0)                                  | 1440 (3)                                  |
| 1616 (3)                   | 1616 (3)                       | 1311 (0)                                  | —                                         | 1586 (4)                                  | 1573 (8)                                  |
| 1642 (4)                   | 1642 (4)                       | 1599 (4d)                                 | 1606 (5)                                  | 1601 (6)                                  | 1596 (12)                                 |
| 1661 (5)                   | 1661 (6)                       | 1688 (5d)                                 | 1679 (5d)                                 | 1678 (5d)                                 | 1668 (7d)                                 |
| 3068 (3d)                  | 3068 (0)                       | 3065 (2d)                                 | —                                         | —                                         | —                                         |

Se prendiamo in considerazione la riga normalmente attribuita al CO coniugato ad un nucleo benzenico, che nella benzaldeide appare a  $1696\text{ cm}^{-1}$ , il paragone di questi spettri ci porta alle seguenti conclusioni:

a) per l'ortossibenzaldeide studiata dai due A.A. nelle stesse condizioni, la riga del CO coincide nei due spettri. La frequenza del CO nelle aldeidi meta e paraossibenzoiche rilevata da KOHLRAUSCH per le aldeidi fuse, sono più basse delle corrispondenti righe negli spettri ottenuti da BONINO per le aldeidi in soluzione. Questa depressione è di nove numeri d'onda per la meta e di 10 per la paraossibenzaldeide.

b) La riga del CO per le aldeidi meta e para, negli spettri eseguiti allo stato omogeneo si è tanto abbassata da raggiungere nel p- derivato quasi il valore trovato per la ortoossialdeide (1). Per la m-aldeide questo

(1) Recenti misure di REITZ (*"Z. Phys. Chem."* B. 46, 181), sullo spettro RAMAN della paraossibenzaldeide allo stato di polvere cristallina, mostrano che la riga C = O nel cristallo è ancora più spostata verso le minori frequenze che allo stato fuso.

fatto, benchè in minore entità, è ancora evidente. Si deve dunque ritenere che allo stato fuso per la meta e paraossialdeide esistono dei fatti che interessano in modo particolare il gruppo CO, fatti che diminuiscono in maniera notevole non appena diluiamo convenientemente la sostanza e cioè allontaniamo in media le molecole.

Questi fenomeni chelativi sono pertanto di natura intermolecolare e non intramolecolare. In questo ultimo caso, infatti, i fenomeni risulterebbero sensibilmente indipendenti dalla concentrazione e quindi dalla distanza media reciproca tra molecola e molecola.

c) Per l'aldeide ortoossibenzoica, sulla scorta dei soli spettri fino ora conosciuti, non si è in grado di giudicare, per lo meno in maniera indiscutibile ed inequivocabile, se la depressione della riga caratteristica del CO sia attribuibile esclusivamente a fenomeni di natura intramolecolare o se intervengono anche fenomeni di natura intermolecolare, mancando nella bibliografia dati relativi a spettri Raman dell'aldeide ortoossibenzoica in soluzione.

Ho ritenuto pertanto opportuno eseguire gli spettri Raman dell'aldeide ortoossibenzoica in solventi diversi e a diverse concentrazioni, onde vedere se spettroscopicamente era possibile mettere in evidenza, anche per l'ortoossildide, supponibili azioni di natura intermolecolare.

I solventi scelti erano metanolo, tetracloruro di carbonio, cicloesano e benzolo, e cioè solventi polari e non polari, sia di natura alifatica che aromatica. Per ogni solvente fu eseguita una serie di 4 spettri su soluzioni a diversa concentrazione, da un minimo di 10 ad un massimo di 90 % gr. mol. di aldeide.

La disposizione sperimentale era quella riportata in precedenti lavori (3). Riporto nelle tabelle II, III, IV e V i risultati sperimentali.

TABELLA II.

| Metanolo<br>(4) | ortoossibenzaldeide in metanolo |                         |                           |                         | ortoossiben-<br>zaldeide<br>pura<br>(1) |
|-----------------|---------------------------------|-------------------------|---------------------------|-------------------------|-----------------------------------------|
|                 | 10 %                            | 50 %                    | 68,2 %                    | 90 %                    |                                         |
| —               | 3070 (2 dif)                    | 3068 (3 dif)            | 3066 (2 dif)              | 3064 (3 dif)            | 3068 (3 dif)                            |
| —               | —                               | 3023 ( $1\frac{1}{2}$ ) | 3019 (0)                  | 3025 ( $1\frac{1}{2}$ ) | 3020 (0)                                |
| 2980 (2 dif)    | 2978 (1 dif)                    | —                       | —                         | —                       | —                                       |
| 2944 (4 dif)    | 2946 (2 dif)                    | 2944 (2 dif)            | 2954 ( $1\frac{1}{2}$ )   | —                       | —                                       |
| 2833 (5 dif)    | 2835 (3 dif)                    | 2837 (2 dif)            | 2842 (1 dif)              | —                       | —                                       |
| —               | 1661 (6 dif)                    | 1661 (7 dif)            | 1661 (6 dif)              | 1659 (7 dif)            | 1661 (6 dif)                            |
| —               | 1642 (3)                        | 1641 (5)                | 1640 (5)                  | 1641 (5)                | 1642 (4)                                |
| —               | 1618 (4)                        | 1617 (3)                | 1618 (3)                  | 1617 (4)                | 1616 (3)                                |
| —               | 1577 (3)                        | 1576 (5)                | 1577 (7)                  | 1576 (6)                | 1575 (4)                                |
| 1454 (4 dif)    | 1458 (6)                        | 1456 (7)                | 1456 (8)                  | 1455 (8)                | 1456 (7)                                |
| —               | —                               | 1382 (1)                | 1384 (1)                  | 1382 ( $1\frac{1}{2}$ ) | 1386 (1)                                |
| 1360 (0)        | —                               | 1351 (1)                | 1354 (1)                  | 1352 ( $1\frac{1}{2}$ ) | 1359 ( $1\frac{1}{2}$ )                 |
| —               | 1321 (5)                        | 1320 (6)                | 1320 (4)                  | 1320 (7)                | 1320 (5)                                |
| —               | 1276 ( $1\frac{1}{2}$ )         | 1278 (2)                | 1276 ( $1\frac{1}{2}$ )   | 1276 (2)                | 1275 (1)                                |
| —               | 1228 (7)                        | 1225 (7)                | 1227 (8)                  | 1227 (8)                | 1223 (7)                                |
| 1166 (1 dif)    | 1155 (3)                        | 1151 (5)                | 1151 (4)                  | 1151 (5)                | 1147 (4)                                |
| 1109 (1 dif)    | 1116 ( $1\frac{1}{2}$ )         | 1114 (2)                | 1116 (1)                  | 1114 (2)                | 1112 (1)                                |
| —               | —                               | —                       | —                         | 1079 ( $1\frac{1}{2}$ ) | —                                       |
| 1032 (6 dif)    | 1031 (7)                        | 1029 (5)                | 1031 (6)                  | 1029 (6)                | 1024 (5)                                |
| —               | —                               | 887 (1)                 | 884 ( $1\frac{1}{2}$ )    | 881 ( $1\frac{1}{2}$ )  | 885 (1)                                 |
| —               | —                               | 856 ( $1\frac{1}{2}$ )  | 863 (0)                   | 866 ( $1\frac{1}{2}$ )  | 867 (0)                                 |
| —               | (811) (0) ?                     | 811 ( $1\frac{1}{2}$ )  | 809 ( $1\frac{1}{2}$ )    | 807 (0) ?               | —                                       |
| —               | 769 (6)                         | 769 (5)                 | 766 (8)                   | 768 (8)                 | 767 (8)                                 |
| —               | —                               | 721 ( $1\frac{1}{2}$ )  | 726 (0)                   | 728 ( $1\frac{1}{2}$ )  | 731 ( $1\frac{1}{2}$ )                  |
| —               | 670 ( $1\frac{1}{2}$ )          | 666 (1)                 | 662 (1)                   | 668 (1)                 | 663 (1)                                 |
| —               | 636 ( $1\frac{1}{2}$ )          | 633 ( $1\frac{1}{2}$ )  | 632 ( $1\frac{1}{2}$ )    | —                       | —                                       |
| —               | 561 (3)                         | 562 (4)                 | 562 (4)                   | 563 (4)                 | 561 (4)                                 |
| —               | —                               | —                       | 540 (0)                   | 540 (0)                 | 537 (0)                                 |
| —               | 453 (3)                         | 453 (5)                 | 454 (5)                   | 453 (5)                 | 449 (5)                                 |
| —               | 413 ( $1\frac{1}{2}$ )          | 412 (2)                 | 411 ( $1\frac{1}{2}$ )    | 412 (4)                 | 409 (2)                                 |
| —               | —                               | 296 (1 dif)             | 298 (1)                   | 297 (1 dif)             | 298 (1)                                 |
| —               | 268 ( $1\frac{1}{2}$ )          | 266 (2 dif)             | 266 (2 dif)               | 268 (2 dif)             | 265 (3)                                 |
| —               | —                               | 221 (1 dif)             | 220 ( $1\frac{1}{2}$ )    | 219 (1 dif)             | 213 ( $1\frac{1}{2}$ )                  |
| —               | 152 ( $1\frac{1}{2}$ )          | 152 (2 dif)             | 153 ( $2\frac{1}{2}$ dif) | 155 (2 dif)             | 149 (5 dif)                             |

TABELLA III.

| Benzolo<br>(5) | ortoossibenzaldeide in Benzolo |                         |                              |                              | ortoossiben-<br>zaldeide<br>pura (1) |
|----------------|--------------------------------|-------------------------|------------------------------|------------------------------|--------------------------------------|
|                | 10 %                           | 50 %                    | 75 %                         | 90 %                         |                                      |
| 3063 (12)      | 3066 (4)                       | 3066 (3 dif)            | 3066 (2 dif)                 | 3064 (2 dif)                 | 3068 (3 dif)                         |
| 3049 (8)       | 3053 (2 dif)                   | —                       | —                            | —                            | —                                    |
| —              | —                              | —                       | 3025 ( $1\frac{1}{2}$ )      | 3021 (0)                     | 3020 (0)                             |
| 2949 (4)       | 2954 (1)                       | 2956 (0)                | 2950 (0)                     | —                            | —                                    |
| —              | 1660 (4)                       | 1660 (6)                | 1660 (6)                     | 1663 (6)                     | 1661 (6 dif)                         |
| —              | 1640 (2)                       | 1641 (5)                | 1641 (5)                     | 1641 (5)                     | 1642 (4)                             |
| —              | 1618 ( $1\frac{1}{2}$ )        | 1617 (4)                | 1618 (4)                     | 1614 (4)                     | 1616 (3)                             |
| 1606 (8)       | 1600 (1)                       | —                       | —                            | —                            | —                                    |
| 1585 (12)      | 1583 (5)                       | 1578 (7)                | 1578 (5)                     | 1573 (8)                     | 1575 (4)                             |
| 1480 (0)       | —                              | —                       | —                            | —                            | —                                    |
| —              | 1458 (5)                       | 1458 (8)                | 1456 (8)                     | 1455 (9)                     | 1456 (7)                             |
| —              | —                              | 1382 ( $1\frac{1}{2}$ ) | 1382 (1)                     | 1381 ( $1\frac{1}{2}$ )      | 1386 (1)                             |
| —              | —                              | 1347 ( $1\frac{1}{2}$ ) | 1358 ( $1\frac{1}{2}$ )      | 1347 ( $1\frac{1}{2}$ )      | 1359 ( $1\frac{1}{2}$ )              |
| —              | 1320 (3)                       | 1320 (6)                | 1321 (7)                     | 1318 (8)                     | 1320 (5)                             |
| —              | 1281 ( $1\frac{1}{2}$ )        | 1280 (1)                | 1278 ( $1\frac{1}{2}$ )      | 1276 (2)                     | 1275 (1)                             |
| —              | 1229 (4)                       | 1227 (8)                | 1228 (9)                     | 1225 (9)                     | 1223 (7)                             |
| 1176 (4 dif)   | 1177 (4)                       | 1174 (1)                | 1174 (1)                     | —                            | —                                    |
| —              | 1151 (1)                       | 1150 (3)                | 1150 (5)                     | 1148 (5)                     | 1147 (4)                             |
| —              | —                              | 1116 (1)                | 1116 (2)                     | 1112 (1)                     | 1112 (1)                             |
| —              | —                              | 1076 ( $1\frac{1}{2}$ ) | 1077 (0)                     | 1072 (0)                     | —                                    |
| 1034 (1)       | 1029 (2)                       | 1029 (7)                | 1029 (7)                     | 1028 (5)                     | 1024 (5)                             |
| 992 (15)       | 993 (10)                       | 991 (9)                 | 993 (7)                      | 990 ( $1\frac{1}{2}$ )       | —                                    |
| 984 (2)        | —                              | —                       | —                            | —                            | —                                    |
| —              | 890 ( $1\frac{1}{2}$ )         | 880 ( $1\frac{1}{2}$ )  | 883 ( $1\frac{1}{2}$ )       | 881 ( $1\frac{1}{2}$ )       | 885 (1)                              |
| 849 (4 dif)    | 852 ( $1\frac{1}{2}$ )         | 852 ( $1\frac{1}{2}$ )  | 854 (0)                      | 862 (0)                      | 867 (0)                              |
| —              | 768 (2)                        | 766 (9)                 | 768 (9)                      | 765 (8)                      | 767 (8)                              |
| —              | —                              | 719 (0 dif) (f ?)       | 723 ( $1\frac{1}{2}$ ) (f ?) | 715 ( $1\frac{1}{2}$ ) (f ?) | 731 ( $1\frac{1}{2}$ )               |
| 692 (1)        | —                              | —                       | —                            | —                            | —                                    |
| —              | —                              | 665 (1)                 | 665 (1)                      | 664 (1)                      | 663 (1)                              |
| 606 (8)        | 606 (2)                        | 606 (2)                 | 606 (1)                      | 606 ( $1\frac{1}{2}$ )       | —                                    |
| —              | 563 (1)                        | 562 (5)                 | 562 (5)                      | 559 (4)                      | 561 (4)                              |
| —              | —                              | —                       | 539 ( $1\frac{1}{2}$ )       | 535 (0)                      | 537 (0)                              |
| —              | 455 ( $1\frac{1}{2}$ )         | 451 (6)                 | 454 (7)                      | 451 (4)                      | 449 (5)                              |
| 400 (1 dif)    | 413 ( $1\frac{1}{2}$ )         | 410 (3)                 | 412 (3)                      | 410 (2)                      | 409 (2)                              |
| —              | —                              | 296 (1 dif)             | 298 (1)                      | 296 (1)                      | 298 (1)                              |
| —              | 268 (1)                        | 266 (2 dif)             | 269 (2 dif)                  | 266 (2)                      | 265 (3)                              |
| —              | —                              | 219 (1 dif)             | 219 (1)                      | 215 ( $1\frac{1}{2}$ )       | 213 ( $1\frac{1}{2}$ )               |
| —              | 156 (1)                        | 152 (2 dif)             | 155 (2)                      | 151 (2)                      | 149 (5 dif)                          |



TABELLA IV.

| Cicloesano<br>(6) | ortoossibenzaldeide in cicloesano |                         |                         |                         | ortoossiben-<br>zaldeide<br>pura (1) |
|-------------------|-----------------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|--------------------------------------|
|                   | 10 %                              | 50 %                    | 75 %                    | 90 %                    |                                      |
| —                 | 3070 (0)                          | —                       | 3062 (2)                | 3064 (2)                | 3068 (3 dif)                         |
| —                 | —                                 | —                       | 3025 ( $1\frac{1}{2}$ ) | 3023 ( $1\frac{1}{2}$ ) | 3020 (0)                             |
| 2935 (10)         | 2940 (3)                          | 2938 (2)                | 2938 (2)                | 2944 ( $1\frac{1}{2}$ ) | —                                    |
| 2920 (10)         | 2923 (3)                          | 2925 (2)                | 2923 (2)                | —                       | —                                    |
| 2882 (1)          | 2888 ( $1\frac{1}{2}$ )           | —                       | —                       | —                       | —                                    |
| 2850 (10)         | 2854 (5)                          | 2854 (3)                | 2850 (2)                | 2852 (1)                | —                                    |
| —                 | 1665 (2)                          | 1658 (4)                | 1663 (5)                | 1661 (4)                | 1661 (6 dif)                         |
| —                 | 1641 ( $1\frac{1}{2}$ )           | 1642 (3)                | 1640 (4)                | 1646 (3)                | 1642 (4)                             |
| —                 | 1622 (0)                          | 1618 (3)                | 1615 (2)                | 1617 (2)                | 1616 (3)                             |
| —                 | 1580 (1)                          | 1578 (4)                | 1578 (4)                | 1578 (4)                | 1575 (4)                             |
| —                 | 1461 (3)                          | 1460 (8)                | 1464 (7)                | 1458 (7)                | 1456 (7)                             |
| 1443 (10 dif)     | 1443 (3)                          | —                       | —                       | —                       | —                                    |
| —                 | 1381 ( $1\frac{1}{2}$ )           | 1382 ( $1\frac{1}{2}$ ) | 1382 ( $1\frac{1}{2}$ ) | 1384 ( $1\frac{1}{2}$ ) | 1386 (1)                             |
| —                 | —                                 | —                       | —                       | 1357 ( $1\frac{1}{2}$ ) | 1359 ( $1\frac{1}{2}$ )              |
| 1344 (2)          | 1338 ( $1\frac{1}{2}$ )           | —                       | 1348 ( $1\frac{1}{2}$ ) | —                       | —                                    |
| —                 | 1323 (1)                          | 1320 (3)                | 1320 (8)                | 1320 (6)                | 1320 (5)                             |
| —                 | —                                 | 1282 (1)                | 1280 ( $1\frac{1}{2}$ ) | 1273 ( $1\frac{1}{2}$ ) | 1275 (1)                             |
| 1264 (8)          | 1267 (2)                          | 1265 (1)                | —                       | —                       | —                                    |
| —                 | 1231 (2)                          | 1228 (4)                | 1227 (7)                | 1228 (6)                | 1223 (7)                             |
| 1156 (4)          | 1155 ( $1\frac{1}{2}$ )           | 1150 (2)                | 1150 (6)                | 1151 (3)                | 1147 (4)                             |
| —                 | —                                 | 1117 (1)                | 1114 ( $1\frac{1}{2}$ ) | 1116 (1)                | 1112 (1)                             |
| 1028 (8)          | 1029 (3)                          | 1029 (3)                | 1029 (7)                | 1029 (7)                | 1024 (5)                             |
| —                 | —                                 | —                       | 883 ( $1\frac{1}{2}$ )  | 883 ( $1\frac{1}{2}$ )  | 885 (1)                              |
| —                 | —                                 | —                       | —                       | —                       | 867 (0)                              |
| 802 (4)           | 804 (6)                           | 802 (3)                 | 799 (2)                 | 801 (1)                 | —                                    |
| —                 | 771 (3)                           | 769 (6)                 | 768 (7)                 | 769 (6)                 | 767 (8)                              |
| —                 | —                                 | —                       | 715 (0) (f ?)           | 722 (0) (f ?)           | 731 ( $1\frac{1}{2}$ )               |
| —                 | —                                 | 669 (1)                 | 668 (1)                 | 668 (1)                 | 663 (1)                              |
| —                 | 563 ( $1\frac{1}{2}$ )            | 563 (3)                 | 562 (6)                 | 562 (2)                 | 561 (4)                              |
| —                 | —                                 | —                       | —                       | —                       | 537 (0)                              |
| —                 | 455 (1)                           | 454 ( $3\frac{1}{2}$ )  | 450 (7)                 | 454 (3)                 | 449 (5)                              |
| 423 (3)           | 427 ( $1\frac{1}{2}$ )            | —                       | 423 ( $1\frac{1}{2}$ )  | —                       | —                                    |
| —                 | 413 ( $1\frac{1}{2}$ )            | 413 ( $1\frac{1}{2}$ )  | 410 (2)                 | 412 (1)                 | 409 (2)                              |
| 380 (2)           | —                                 | —                       | —                       | —                       | —                                    |
| —                 | —                                 | 302 ( $1\frac{1}{2}$ )  | 296 (1)                 | 297 (1)                 | 298 (1)                              |
| —                 | 268 (1)                           | 269 (2 dif)             | 266 (2)                 | 266 (2 dif)             | 265 (3)                              |
| —                 | —                                 | 225 ( $1\frac{1}{2}$ )  | 220 (1)                 | 220 (1)                 | 213 ( $1\frac{1}{2}$ )               |
| —                 | 152 (1)                           | 153 (2)                 | 153 (2)                 | 155 (2 dif)             | 149 (5 dif)                          |

TABELLA V.

| Tetraclo-<br>ruro di<br>carbonio (7) | ortoossibenzalbeide in tetracloruro di carbonio |                |                  |                | ortoossiben-<br>zalbeide<br>pura (1) |
|--------------------------------------|-------------------------------------------------|----------------|------------------|----------------|--------------------------------------|
|                                      | 10 %                                            | 50 %           | 75 %             | 90 %           |                                      |
| —                                    | 3068 (0)                                        | 3070 (2)       | 3066 (2 dif)     | 3066 (3 dif)   | 3068 (3 dif)                         |
| —                                    | —                                               | —              | 3020 (0)         | 3020 (00)      | 3020 (0)                             |
| —                                    | 1664 (2)                                        | 1662 (4)       | 1661 (6)         | 1661 (4)       | 1661 (6 dif)                         |
| —                                    | 1642 ( $1/2$ )                                  | 1645 (3)       | 1642 (5)         | 1642 (3)       | 1642 (4)                             |
| —                                    | 1620 ( $1/2$ )                                  | 1618 (2)       | 1615 (3)         | 1617 (2)       | 1616 (3)                             |
| —                                    | 1580 (1)                                        | 1578 (5)       | 1578 (6)         | 1577 (4)       | 1575 (4)                             |
| 1539 (0)                             | —                                               | —              | —                | —              | —                                    |
| —                                    | 1460 (3)                                        | 1458 (7)       | 1443 (7)         | 1458 (8)       | 1456 (7)                             |
| —                                    | —                                               | 1384 ( $1/2$ ) | 1382 ( $1/2$ )   | 1386 ( $1/2$ ) | 1386 (1)                             |
| —                                    | —                                               | —              | —                | 1354 ( $1/2$ ) | 1359 ( $1/2$ )                       |
| —                                    | 1321 (2)                                        | 1321 (6)       | 1321 (6)         | 1323 (6)       | 1320 (5)                             |
| —                                    | 1280 ( $1/2$ )                                  | 1280 (1)       | 1276 (1)         | 1271 (1)       | 1275 (1)                             |
| —                                    | 1228 (3)                                        | 1229 (7)       | 1227 (7)         | 1227 (7)       | 1223 (7)                             |
| —                                    | 1151 (2)                                        | 1152 (3)       | 1152 (4)         | 1151 (4)       | 1147 (4)                             |
| —                                    | 1114 ( $1/2$ )                                  | 1115 (1)       | 1114 ( $1/2$ )   | 1114 (1)       | 1112 (1)                             |
| —                                    | —                                               | —              | 1077 (0) ?       | —              | —                                    |
| —                                    | 1031 ( $1 1/2$ )                                | 1029 (7)       | 1029 (7)         | 1029 (7)       | 1024 (5)                             |
| —                                    | —                                               | 884 ( $1/2$ )  | 886 (1)          | 881 ( $1/2$ )  | 885 (1)                              |
| —                                    | —                                               | —              | —                | 862 ( $1/2$ )  | 867 (0)                              |
| 791 (2)                              | 787 ( $1/2$ dif)                                | 794 ( $1/2$ )  | —                | —              | —                                    |
| 760 (2)                              | 769 ( $1 1/2$ dif)                              | 769 (7)        | 768 (8)          | 766 (10)       | 767 (8)                              |
| —                                    | —                                               | —              | —                | 730 ( $1/2$ )  | 731 ( $1/2$ )                        |
| —                                    | —                                               | 668 (1)        | 666 (1)          | 668 (1)        | 663 (1)                              |
| —                                    | 563 ( $1/2$ )                                   | 563 (4)        | 562 (3)          | 563 (7)        | 561 (4)                              |
| —                                    | —                                               | —              | —                | 540 ( $1/2$ )  | 537 (0)                              |
| 459 (10)                             | 460 (5)                                         | 455 (9)        | 455 (7)          | 454 (7)        | 449 (5)                              |
| —                                    | —                                               | 412 (2)        | 412 (2)          | 413 (2)        | 409 (2)                              |
| 314 (3)                              | 316 (4)                                         | 315 (3 dif)    | 315 (2 dif)      | 316 (1 dif)    | —                                    |
| —                                    | —                                               | 299 (3 dif)    | 300 ( $1/2$ dif) | 298 (1 dif)    | 298 (1)                              |
| —                                    | 265 (1)                                         | 268 (2 dif)    | 269 (3 dif)      | 268 (3 dif)    | 265 (3)                              |
| 218 (3)                              | 221 (3)                                         | 221 (4 dif)    | 220 (3 dif)      | 216 (2 dif)    | 213 ( $1/2$ )                        |
| —                                    | 152 ( $1/2$ )                                   | 150 (6 dif)    | 153 (3 dif)      | 156 (3 dif)    | 149 (5 dif)                          |

La osservazione dei miei spettri mostra che tutte le righe Raman che compaiono nello spettro Raman dell'aldeide ortoossibenzonica allo stato omogeneo liquido, sono riscontrate allo stato di soluzione, insieme con le frequenze attribuite ai rispettivi solventi. Si osserva la comparsa di qualche riga non riscontrata prima dagli altri Autori: così ho accertato la presenza di due righe Raman a  $537$  e  $3020\text{ cm}^{-1}$  per l'orto-ossibenzaldeide pura, righe queste che si riscontrano sovente anche negli spettri di questa sostanza allo stato di soluzione. Allo stato di soluzione compare con una certa frequenza una riga a  $1080\text{ cm}^{-1}$  circa, che non mi è stato possibile rilevare nello spettro dell'aldeide allo stato omogeneo liquido. Le soluzioni in metanolo sono poi le uniche a presentare due righe a  $810$  e  $630\text{ cm}^{-1}$  circa, anche queste non riscontrate nello spettro dell'aldeide allo stato omogeneo liquido. In definitiva si può affermare che variazioni notevoli di concentrazioni non influiscono in modo particolare sullo spettro, che risulta così del tutto indipendente da essa.

In tutti i numerosi spettri Raman eseguiti sia sulla sostanza pura, che su soluzioni alcoliche, benzeniche ecc. la riga del CO aldeidico per l'aldeide ortoossibenzonica è sempre risultata a  $1661$  circa (anche la riga a  $1640\text{ cm}^{-1}$  è rimasta in posizione inalterata) dimostrando così che le azioni chelative per questa aldeide debbano senz'altro ritenersi di natura intramolecolare ovvero che, qualora esistano delle azioni intermolecolari, queste sarebbero di natura e di intensità tali da non poter essere rilevate in spettro Raman.

Altre ricerche continuano su questo speciale argomento.

Ringrazio il prof. BONINO per l'interesse dimostrato al presente lavoro.

#### BIBLIOGRAFIA.

- (1) G. B. BONINO, R. MANZONI-ANSIDEI, M. ROLLA, « Ric. Scient. », serie II, anno VIII, vol. III, n. 5-6, nota I, II, III, IV, V (1937), « Rend. Acc. Lincei », XXVIII, 259 (1939).
- (2) KAHOVEC e KOHLRAUSCH, « Z. f. Phys. Chem. », B 38, 119 (1939).
- (3) M. ROLLA, « Gazz. Chim. Ital. », 69, 779 (1939).
- (4) LANDOLT-BÖRNSTEIN, « Phys. Chem. Tabellen » Eg. III b, 1036.
- (5) LANDOLT-BÖRNSTEIN, « Phys. Chem. Tabellen » Eg. III b, 978.
- (6) LANDOLT-BÖRNSTEIN, « Phys. Chem. Tabellen » Eg. III b, 956.
- (7) LANDOLT-BÖRNSTEIN, « Phys. Chem. Tabellen » Eg. III b, 986.

**Chimica.** — *Contributi sperimentali al problema della «chelazione».* — XIV. *Sul potenziale polarografico di riduzione delle aldeidi ossi e metossi benzoiche.* Nota di GIUSEPPE SCARAMELLI, presentata <sup>(1)</sup> dall'Accademico GIAN BATTISTA BONINO.

Precedenti ricerche eseguite in questo Istituto (1) sul cosiddetto fenomeno di «chelazione» nelle aldeidi ossi e metossi benzoiche hanno prevalentemente studiato il problema sulla base dell'indagine Raman-spettrografica.

In questo lavoro si riferisce su ulteriori indagini eseguite sullo stesso argomento mediante lo studio del comportamento polarografico delle aldeidi sopra riportate.

Poichè il fenomeno di «chelazione» influisce direttamente sulle proprietà chimiche e fisiche del gruppo carbonilico, è logico pensare che anche il comportamento elettrochimico e polarografico venga ad esserne influenzato.

Una variazione del potenziale polarografico di riduzione nelle ossi benzaldeidi può anche in parte essere attribuita ad effetti di sostituzione che rendono più difficile una immediata interpretazione del risultato polarografico nei riguardi del fenomeno di «chelazione». E infatti esperienze di SEMERANO e di CHISINI (2) e di WINKEL e PROSKE (3) hanno già messo in chiaro che sostituenti di natura elettronegativa, indipendentemente da ogni fenomeno di «chelazione», portano a variazioni notevoli del potenziale di riduzione del gruppo carbonilico delle benzaldeidi.

Perciò il confronto fra i potenziali polarografici di riduzione di una serie di aldeidi ossi benzoiche e quelli delle corrispondenti metossi aldeidi può verosimilmente permetterci di rilevare dei dati atti a favorire una migliore valutazione dell'influenza di azioni chelative in concomitanza con effetti di sostituzione all'anello aromatico.

Appunto a questo scopo ho studiato la riduzione polarografica delle aldeidi seguenti: 2-ossi-benzaldeide, 2-metossi-benzaldeide, 3-ossi-benzaldeide, 3-metossi-benzaldeide, 4-ossi-benzaldeide, 4-metossi-benzaldeide.

---

(<sup>1</sup>) Nell'Adunanza del 17 maggio 1940-XVIII.

Le esperienze vennero eseguite su soluzioni N 10 di  $\text{NH}_4\text{Cl}$  in alcool etilico al 50 % in peso. Il tempo di gocciolamento era di 4", l'ossigeno veniva scacciato per gorgogliamento di idrogeno, la sensibilità del galvanometro era di 1/100 dalla massima, la temperatura di 18°. I potenziali di riduzione vennero ricavati dai polarogrammi seguendo le regole date da SEMERANO (4) e sono riferiti all'elettrodo a calomelano normale. Per il calcolo del potenziale di riduzione molare ci si servì dei risultati ottenuti in sei esperienze per ogni composto e si considerò il processo di riduzione come monovalente. Le concentrazioni in aldeidi delle soluzioni sulle quali si eseguirono le misure variano da  $1,0 \cdot 10^{-3}$  a  $5,0 \cdot 10^{-3}$  molari.








I risultati ottenuti sono riassunti nella tabella che segue.

Di alcune delle ossi e metossi aldeidi benzoiche in essa riportate si conoscevano già i potenziali polarografici di riduzione per merito dei lavori di SEMERANO e CHISINI (2) e di ADKINS e COX (6) sulle aldeidi, 2-ossi, 4-ossi e 4-metossi benzoiche e di WINKEL e PROSKE (3) sulle aldeidi 2-ossi, 3-ossi e 4-ossi benzoiche. Le condizioni sperimentali nelle quali i citati autori eseguirono le determinazioni erano però diverse fra loro sicchè i loro dati non erano confrontabili. Nel lavoro presente si sono eseguite le misure nelle stesse condizioni sperimentali nelle quali avevano operato SEMERANO e CHISINI trovando per i composti esaminati da questi autori dei valori dei potenziali di riduzione praticamente coincidenti.

Considerando anzitutto nella tabella i valori dei potenziali delle aldeidi orto-, meta- e para-ossi-benzoiche rispetto a quello della aldeide benzoica si può dire che il passaggio da benzaldeide ad aldeide orto-, meta- o para-ossi-benzoica porta come conseguenza ad uno spostamento verso potenziali più negativi del potenziale di riduzione del gruppo  $\text{C} = \text{O}$  dell'aldeide. Tale spostamento è minimo per la meta-ossibenzaldeide (26 m. v.), intermedio per la orto-ossi-benzaldeide (56 m. v.), massimo per la para-ossi-benzaldeide (141 m. v.).

Sostituendo l'idrogeno fenico con un gruppo metilico si osserva per l'orto e il meta derivato che il potenziale di riduzione, se pur di poco, diventa più positivo di quello della aldeide benzoica. Questo comportamento è analogo a quello che si riscontra nei casi di semplice sostituzione di gruppi elettronegativi nella molecola della benzaldeide (ad esempio nelle cloro benzaldeidi) (2)).

Inoltre l'esame della tabella permette di notare come il passaggio da orto-metossi ad orto-ossibenzaldeide porti ad uno spostamento del potenziale di riduzione verso potenziali più negativi di 68 m. v. e come ad uno spostamento nello stesso senso, ma minore (42 m. v.), porti l'analogo passaggio da meta metossi a meta ossi benzaldeide. I fenomeni chelativi dunque portano ad uno spostamento dei potenziali di riduzione del gruppo aldeidico verso potenziali più negativi.

| Composto                                                                                                          | Purificazione<br>e costanti fisiche                                 | Potenziale di<br>riduzione alla<br>conc. molare | Differenze dal<br>poten. di rid.<br>della<br>benzaldeide | Differenza<br>fra i pot. di<br>rid. delle ossi<br>e metossi al-<br>deidi corri-<br>spondenti |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|
| Benzaldeide<br>                  |                                                                     | — 1,054 v.                                      | —                                                        | —                                                                                            |
| 2-ossi-benzal-<br>deide<br>      | Distillata ripetuta-<br>mente nel vuoto<br>P. E. 196° a 760<br>m/m. | — 1,110 v.                                      | — 0,056 v.                                               | 0,068 v.                                                                                     |
| 2-metossi-ben-<br>zaldeide<br>   | Distillata nel vuoto<br>P. F. 37,5°-38,5°                           | — 1,042 v.                                      | + 0,012 v.                                               |                                                                                              |
| 3-ossi-benzal-<br>deide<br>      | Distillata nel vuoto<br>P. F. 108°.                                 | — 1,080 v.                                      | — 0,026 v.                                               | 0,042 v.                                                                                     |
| 3-metossi-ben-<br>zaldeide<br>  | Distillata nel vuoto<br>P. E. 230°.                                 | — 1,038 v.                                      | + 0,016 v.                                               |                                                                                              |
| 4-ossi-benzal-<br>deide<br>    | Distillata nel vuoto<br>P. F. 115°.                                 | — 1,195 v.                                      | — 0,141 v.                                               | 0,043 v.                                                                                     |
| 4-metossi-ben-<br>zaldeide<br> | Distillata nel vuoto<br>P. E. 247°.                                 | — 1,152 v.                                      | — 0,098 v.                                               |                                                                                              |

\* Per la benzaldeide si è preso il valore del potenziale molare di riduzione determinato, nelle medesime condizioni sperimentali, da Semerano e Chisini (2) e da Bonino e Scaramelli (5).

Per il derivato para la discussione è meno semplice poichè in questo caso anche il metossi derivato mostra di avere un potenziale di riduzione sensibilmente più negativo (98 m. v.) di quello della benzaldeide. Non vi è quindi accordo con quanto si verifica allorchè si ha un puro effetto di sostituzione di un gruppo elettronegativo in posizione para nella benzaldeide e viene perciò da domandarsi se nella para metossi benzaldeide possano dirsi del tutto assenti effetti di natura chelativa sul gruppo  $C=O$ , effetti che in questo caso dovrebbero ritenersi a carico del gruppo  $CH_3$ .

Tuttavia anche in questo caso il passaggio dal metossi all'ossi derivato porta ad uno spostamento (43 m. v.) nel potenziale di riduzione verso valori più negativi.

In conclusione si hanno, considerando unicamente le differenze fra metossi ed ossi derivati corrispondenti, delle differenze nei potenziali di riduzione massime fra i derivati orto e minori fra i derivati meta e para. L'entità di queste differenze trova un riscontro negli spostamenti che la riga Raman caratteristica del gruppo  $C=O$  subisce per il passaggio da orto, meta e para metossi benzaldeidi alle corrispondenti orto, meta, e para ossi benzaldeidi poichè anche questi spostamenti sono massimi per i derivati orto e minori, e circa dello stesso ordine, per i derivati meta e para.

Altre ricerche sono in corso su diossi benzaldeidi e su loro metossi e dimetossi derivati onde portare qualche altro contributo allo studio polarografico del fenomeno di «chelazione» in questi composti.

L'Autore ringrazia vivamente il prof. G. B. BONINO per l'interesse addimostrato a questa ricerca.

#### BIBLIOGRAFIA.

- (1) G. B. BONINO e R. MANZONI-ANSIDEI, « Ric. Scient. », 3, II, nn. 3,4 (1937); G. B. BONINO e R. MANZONI-ANSIDEI, « R. Acc. Lincei », 28, 259 (1938); R. MANZONI-ANSIDEI, « Boll. Fac. Chim. Ind. Bologna », I, n. 3 (1940); R. MANZONI-ANSIDEI e T. STORTO, « Atti X Congr. Int. Chimica », Roma (1938); R. MANZONI-ANSIDEI, « Atti R. Accad. d'Italia », I, n. 9 (1940).
  - (2) G. SEMERANO e A. CHISINI, « Gaz. Chim. It. », 63, 802 (1933).
  - (3) A. WINKEL e G. PROSKE, B. 69, 1917 (1936).
  - (4) G. SEMERANO, « Gaz. Chim. It. », 62, 518 (1932).
  - (5) G. B. BONINO e G. SCARAMELLI, « Ric. Scient. », A. VI, vol. II, nn. 3-4.
-



**Chimica.** — *Contributi sperimentali al problema della «chelazione».* — XV. *Sul potenziale polarografico di riduzione di alcuni ossi-acetofenoni* <sup>(1)</sup>. Nota di GIUSEPPE SCARAMELLI, presentata <sup>(2)</sup> dall'Accademico GIAN BATTISTA BONINO.

In un precedente lavoro <sup>(3)</sup> sono stati esaminati i potenziali polarografici di riduzione delle aldeidi-orto, meta e para ossi e metossi benzoiche e si è potuti giungere alla conclusione che nel passaggio da benzaldeide ad orto, meta e para ossi benzaldeidi il potenziale di riduzione del gruppo  $C = O$  si sposta verso potenziali più negativi. Tale spostamento è di 56 m. v. per l'orto ossi benzaldeide, di 26 m. v. per la meta ossi benzaldeide e di 141 m. v. per la para ossi benzaldeide. In questa Nota si riferisce invece sulle esperienze eseguite per determinare i potenziali polarografici di riduzione dei composti seguenti: Acetofenone, 2-ossi-acetofenone, 3-ossi-acetofenone, 4-ossi-acetofenone 2-4-dioossi-acetofenone. Queste misure permettono di studiare sotto il punto di vista polarografico il fenomeno di «chelazione» negli ossi chetoni aromatici.

Le determinazioni sono state eseguite nelle seguenti condizioni: Elettrolito base costituito da una soluzione N/10 di  $NH_4Cl$  in alcool al 50 % in peso; eliminazione dell'ossigeno per mezzo di gorgogliamento di idrogeno; sensibilità del galvanometro 1/100 dalla massima, tempo di gocciolamento 4"; temperatura 18°.

I potenziali polarografici di riduzione, tutti determinati alla concentrazione  $2,5 \cdot 10^{-3}$  molare, sono riferiti all'elettrodo a calomelano normale e sono letti sulle curve polarografiche usando il metodo proposto da Semerano <sup>(4)</sup>.

La tabella seguente riassume i risultati ottenuti nelle esperienze.






---

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Bologna.

<sup>(2)</sup> Nell'Adunanza del 17 maggio 1940-XVIII.

<sup>(3)</sup> G. SCARAMELLI, «Atti Acc. d'Italia» (in corso di stampa).

<sup>(4)</sup> G. SEMERANO, «Gaz. Chim. It.» 62, 518 (1932).

| Composto                                                                                                                                                | Purificazione<br>e costanti fisiche                     | Potenziale<br>di riduzione<br>alla concentrazione<br>$2,5 \cdot 10^{-3}$ molare | Differenza<br>dal pot. di rid.<br>dell'acetofenone |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| Acetofenone<br>$\text{H}_3\text{C}-\text{C}=\text{O}$<br>              | Distillato ripetutamente P. E. 202° a 760 m/m           | — 1,388 v.                                                                      | —                                                  |
| 2-ossi-acetofenone<br>$\text{H}_3\text{C}-\text{C}=\text{O}$<br>       | Distillato ripetutamente nel vuoto. P.E. 216° a 760 m/m | — 1,457 v.                                                                      | — 0,069 v.                                         |
| 3-ossi-acetofenone<br>$\text{H}_3\text{C}-\text{C}=\text{O}$<br>       | Distillato ripetutamente nel vuoto P. F. 97°            | — 1,417 v.                                                                      | — 0,029 v.                                         |
| 4-ossi-acetofenone<br>$\text{H}_3\text{C}-\text{C}=\text{O}$<br>       | Distillato ripetutamente nel vuoto P. F. 107°           | — 1,544 v.                                                                      | — 0,156 v.                                         |
| 2-4-diossi-acetofenone<br>$\text{H}_3\text{C}-\text{C}=\text{O}$<br> | Distillato ripetutamente nel vuoto P. F. 145°           | — 1,601 v.                                                                      | — 0,213 v.                                         |

Il potenziale di riduzione dell'acetofenone era noto attraverso alle determinazioni di parecchi autori <sup>(1)</sup>; però le condizioni sperimentali nelle quali erano state fatte tali determinazioni sono leggermente diverse da

<sup>(1)</sup> ADKINS e COX, « J. Am. Chem. Soc. », 60, 1151 (1938); SHIKATA e TACHI, « Mem. Coll. Agr. Kyoto Imp. Univ. », 8, 1 (1930); WINKEL e PROSKE, B. 69, 693 (1936); SCARAMELLI, « Boll. Fac. Chim. Ind. Bologna », I, 49 (1940).

quelle usate in questo lavoro. Perciò onde poter avere dei dati paragonabili con quelli forniti dagli ossi acetofenoni qui esaminati ho ripetuto anche le determinazioni sull'acetofenone. La stessa cosa è stata fatta per il para ossi acetofenone, composto per il quale esistevano le misure di ADKINS e COX <sup>(1)</sup>.

La tabella sopra riportata mostra come il passaggio da acetofenone ad orto, meta e para ossiacetofenone porti ad uno spostamento nel potenziale di riduzione del gruppo chetonico verso potenziali più negativi similmente a quanto avviene nel passaggio da benzaldeide ad orto, meta e para ossi benzaldeide per il gruppo carbonilico della benzaldeide. Anche l'entità degli spostamenti sono molto simili a quelle trovate nel caso delle ossibenzaldeidi. Se ne può quindi concludere che il modo di influire sul potenziale di riduzione del gruppo  $C=O$  degli ossidrili fenici sostituiti nelle varie posizioni del nucleo benzenico è analogo nelle ossi benzaldeidi e negli ossi acetofenoni.

Infine l'introduzione in posizione orto e in posizione para di due gruppi fenici sposta considerevolmente il potenziale di riduzione del gruppo chetonico verso potenziali più negativi; tale spostamento è un po' minore della somma dei rispettivi spostamenti che si verificano per i passaggi da acetofenone ad orto e para ossi acetofenone. Altre ricerche sono in corso su alcune diacetilresorcine particolarmente interessanti dal punto di vista dello studio dei fenomeni di «chelazione». L'Autore ringrazia vivamente il prof. G. B. BONINO per l'interesse addimosttrato a questa ricerca.

---

(<sup>1</sup>) ADKINS e COX, loc. cit.

**Chimica (Enzimologia).** — *Sulla specificità dell' $\alpha$  glucosidasi e su di un nuovo caso di « fermentazione diretta » del maltosio* <sup>(1)</sup>. Nota di CLAUDIO ANTONIANI e TOMMASO CASTELLI, presentata <sup>(2)</sup> da ANGELO MENOZZI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Il WEIDENHAGEN (1) ha di recente emesso una sua interessante teoria, che per quanto non in perfetto accordo con tutti i risultati sperimentali, certamente semplifica e anche chiarisce di molto il concetto di specificità nel campo delle azioni carboidrasiche (2). Al concetto generale di FISCHER di una specificità assoluta tra enzima e substrato, implicante una affinità integrale tra struttura chimica dell'enzima e struttura chimica del substrato, viene sostituito dal WEIDENHAGEN un concetto di specificità relativa, per cui sarebbe semplicemente richiesta una affinità chimica tra enzima e struttura glicosidica del substrato. Conformemente a questa concezione, l'idrolisi dei bisaccaridi tipo maltosio, nei quali soltanto una molecola di zucchero è legata glicosidicamente, sarebbe opera di un solo enzima; l'idrolisi invece dei bisaccaridi tipo saccarosio, risultanti dall'unione di due zuccheri diversi, entrambi legati glicosidicamente, sarebbe determinata, o, meglio, determinabile, da due distinte individualità enzimatiche.

Data la struttura del saccarosio:  $\alpha$ -1-glucosido (1,5)-2- $\beta$ -fruttoside (2,5), la sua idrolisi enzimatica sarebbe possibile sia per opera della  $\beta$ -h-fruttosidasi, agente sul legame  $\beta$ -fruttosidico, che per opera della  $\alpha$ -glucosidasi, agente sul legame  $\alpha$ -glucosidico. Dal che evidentemente deriva che mentre un enzima idrolizzante il saccarosio può essere inattivo sul maltosio, un enzima che viceversa idrolizzi il maltosio *deve* idrolizzare anche il saccarosio.

Per quanto concerne la individualità della  $\beta$ -h-fruttosidasi sono noti (3) oltre una ventina di lieviti sporigeni e una diecina di asporigeni capaci di fermentare il saccarosio e non il maltosio. Tutti questi microrganismi debbono, almeno sino ad oggi, essere considerati come altrettante

---

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nell'Istituto di Industrie Agrarie della R. Università di Perugia.

<sup>(2)</sup> Nell'Adunanza del 17 maggio 1940-XVIII.

sedì di attività  $\beta$ -h-fruttosidasi pure. La  $\beta$ -h-fruttosidasi è del resto tra gli enzimi meglio caratterizzati anche dal punto di vista della sua natura chimica, grazie soprattutto ai lavori del MYRBACK (4), ed il fatto della sua esistenza come individualità enzimatica a sè stante costituisce a tutt'oggi la prova più sicura della struttura  $\beta$ -glicosidica del saccarosio.

Per quanto concerne la individualità della  $\alpha$ -glucosidasi, e, in particolare, la estensibilità della sua azione idrolitica anche al saccarosio, secondo che è postulata dalla teoria del WEIDENHAGEN, la questione non è altrettanto nettamente definita. Sotto questo aspetto è tra l'altro particolarmente degno di nota il fatto, sin qui non rilevato nella sua vera importanza dagli enzimologi, della esistenza di alcuni lieviti *capaci di fermentare il maltosio e non il saccarosio*. Così è, ad esempio, dell'*Endomycopsis capsularis*, dello *Schizosaccharomyces octosporus* e della *Nadsonia fulvescens* (5), ai quali è da aggiungersi un altro blastomicete di recente segnalato e descritto dal CASTELLI (6), il *Saccharomyces italicus*.

Come è da interpretarsi questo comportamento? Esso apre all'indagine una questione di indubbio interesse, sia dal punto di vista della specificità di azione enzimatica nel campo delle carboidrasi, sia dal punto di vista strettamente zimologico. Il problema è di stabilire se in questi speciali casi di attività fermentative manifeste pel maltosio e non estensibili al saccarosio, si tratti effettivamente di processi normali di *fermentazione indiretta*, cioè subordinata alla preventiva idrolisi del bisaccaride, oppure di processi di *fermentazione diretta* decorrenti sul maltosio come tale, conformemente alla possibilità dimostrata da tempo dal WILLSTÄTTER (7).

È evidente che solo nel primo caso, qualora cioè si tratti di fermentazioni indirette precedute dall'azione idrolitica, si avrebbe un comportamento in contrasto con la teoria della specificità relativa del WEIDENHAGEN. La duplicità di azione della  $\alpha$ -glucosidasi verrebbe in tal caso a mancare e si avrebbe per contro una prova dell'esistenza di una *maltasi* come individualità specifica. Ma qualora viceversa dovesse emergere che la fermentazione del maltosio rappresenta in questi casi un processo di fermentazione diretta nel senso indicato dal WILLSTÄTTER, è ovvio che ogni ragione di antitesi con la teoria del WEIDENHAGEN verrebbe a cadere, non essendo di fatto in giuoco alcuna attività idrolitica in collegamento col fatto fermentativo.

Secondo i termini in cui fu ora esposta, la questione è stata da noi risolta nei riguardi del comportamento del *Saccharomyces italicus*. Le esperienze comparative di fermentazione e di idrolisi da noi eseguite su questo blastomicete ci hanno inequivocabilmente dimostrato che la fermentazione del maltosio da parte di *Sacch. italicus* rappresenta un nuovo esempio di fermentazione diretta nel senso di WILLSTÄTTER: la fermentazione ha luogo senza che il maltosio sia preventivamente idrolizzato. Le

varie prove di idrolisi da noi istituite hanno dato costantemente risultato negativo, ragione per cui il *Sacch. italicus*, pur fermentando attivamente il maltosio, è da ritenersi praticamente privo di  $\alpha$ -glucosidasi.

E in base a questi rilievi sperimentali si può affermare che il comportamento fermentativo del *Sacch. italicus*, positivo per il maltosio e negativo per il saccarosio, e come tale apparentemente in contrasto con la teoria della specificità relativa dell' $\alpha$ -glucosidasi sostenuta dal Weidenhagen, non è di fatto in antitesi con la teoria stessa. Sarà interessante studiare sotto questo aspetto anche l'attività degli altri lieviti per cui è segnalato un analogo comportamento fermentativo.

#### PARTE SPERIMENTALE.

Sia per le esperienze di idrolisi che per la prova di fermentazione venne utilizzato lo stesso preparato di *Sacch. italicus*, cresciuto su piastre all'agar-malto, accuratamente separato dal substrato di coltura, lavato con acqua (per centrifugazione) sino a scomparsa della reazione dello zucchero e infine parzialmente asciugato su carta bibula.

Nella prova di fermentazione il microrganismo venne direttamente impiegato come tale, quale lo si ottenne dopo i trattamenti sopra descritti. Nelle prove di idrolisi si impiegò il preparato ottenuto per trattamento del lievito di cui sopra con estere acetico, come più oltre sarà descritto.

#### I. Prova di fermentazione.

##### *Composizione del substrato.*

- gr. 1,0 maltosio
- » 0,55 preparato fresco di *Sacch. italicus*
- » 0,25  $\text{KH}_2\text{PO}_4$
- » 0,025  $\text{MgSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$
- » 0,010  $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$
- » 0,25 peptone
- cc. 20  $\text{H}_2\text{O}$

Temperatura di fermentazione: 30° C.

Per quanto concerne la tecnica sperimentale ci siamo strettamente attenuti a quanto indicato da R. WILLSTÄTTER e W. STEIBELT (8) nel resoconto delle loro prime esperienze sulla fermentazione diretta del maltosio. Anche la misura della percentuale di zucchero fermentata venne eseguita secondo le modalità da essi indicate, desumendola cioè dalla quantità di  $\text{CO}_2$  svolta e riportata col calcolo a temperatura e pressione normali.

## 2. Prove di idrolisi.

L'estrazione della  $\alpha$ -glucosidasi venne eseguita secondo il metodo di R. WILLSTÄTTER e W. STEBELT modificato da WILLSTÄTTER e BAMANN (9), cioè per trattamento della massa fresca di *Sacch. italicus* con estere acetico: gr. 5,5 di lievito addizionato di cc. 0,5 di estere acetico. Agitazione durante 15', quindi aggiunta di cc. 10  $H_2O$  e neutralizzazione accurata con  $NH_4OH$  N/10 (cc. 4,9). Infine completamento del volume a 25 cc. con  $H_2O$ .

## Composizione del substrato.

gr. 1,0 maltosio  
cc. 2,5 preparato enzimatico, pari a gr. 0,55 di preparato fresco di *Sacch. italicus*.  
gr. 0,024  $Na_2HPO_4$   
gr. 0,018  $KH_2PO_4$   
cc. 17,5  $H_2O$   
3 gocce toluolo.

Temperatura di idrolisi: 30° C.

L'andamento dell'idrolisi venne seguito misurando l'incremento di riduzione per il Fehling secondo il metodo di LEHMAN-MAQUENNE (10).

## 3. Andamento comparativo della fermentazione e dell'idrolisi.

| Tempi               | Idrolisi | Fermentazione |
|---------------------|----------|---------------|
| 4 <sup>h</sup> 30'  | nulla    | 5,0 %         |
| 8 <sup>h</sup> 30'  | nulla    | 13,0 »        |
| 12 <sup>h</sup>     | nulla    | 26,0 »        |
| 22 <sup>h</sup> 30' | nulla    | 60,5 »        |
| 26 <sup>h</sup>     | nulla    | 68,5 »        |

La prova di idrolisi venne ripetuta anche in presenza di maggior quantità di preparato enzimatico, come segue:

gr. 2,5 maltosio  
» 0,120  $Na_2HPO_4$   
» 0,090  $KH_2PO_4$   
cc. 15 preparato enzimatico, pari a gr. 3,3 di preparato fresco di *Sacch. italicus*.  
cc. 35  $H_2O$   
cc. 1 toluolo.

Anche in queste condizioni l'idrolisi era nulla dopo 96 ore di permanenza in termostato a 30° C.



## BIBLIOGRAFIA.

- (1) « Zeitschr. Ver. Dtsch. Zuckerind. », 80, 12, 1930.
  - (2) C. ANTONIANI, *Osservazioni sulla  $\beta$ -glucosidasi del « Sorghum saccharatum »* (Questi « Rendiconti », serie II, vol. LXVIII, fasc. VI-X, 1935-XIII).
  - (3) N. M. STELLING-DEKKER. *Die Sporogenen Hefen*, Amsterdam, 1931.
  - J. LODDER, *Die Anaskosporogenen Hefen*, Amsterdam, 1931.
  - (4) T. BERSIN, *Lehrbuch der Enzymologie*, 60, 1938.
  - (5) N. M. STELLING-DEKKER e J. LODDER, op. cit.
  - (6) « Archiv. für Mikrobiologie », 9, 4, 1938.
  - (7) R. WILLSTÄTTER e W. STEIBELT, « H. S. Zeitschr. f. Physiol. Chem. », 15, 211, 1921.
  - (8) Loc. cit.
  - (9) « H. S. Zeitschr. f. Physiol. Chem. », 151, 242, 1926.
  - (10) « Bull. Soc. Chim. », 3, 19-20, 1898; « Arch. Hygiène », 30, 267, 1897.
-

**Geologia (Pedologia).** — *Su alcuni terreni gialli in provincia di Grosseto.* Nota di CESARE LIPPI-BONCAMBI, presentata <sup>(1)</sup> dall'Accademico FRANCESCO GIORDANI.

Per portare un altro contributo allo studio sistematico dei tipi pedologici italiani e soprattutto a quello della *terra gialla*, la cui formazione nell'Italia Centrale dovrebbe teoricamente essere molto diffusa, ho preso in esame la zona tra il lago di Bolsena ed Orbetello e precisamente la zona ad oriente di Manciano, ove per lungo tratto, seguendo la nazionale, affiora un terreno di color giallo intenso.

La famiglia delle *terre gialle* è un gruppo di terreni ancor poco studiati nella loro pedogenesi, sebbene siano noti attraverso le loro caratteristiche più salienti, messe in evidenza dagli studi del GLINKA, LANG, HARRAS-SOWITZ, AKIMTZEV, MARBUT, BLANCK e COMEL <sup>(2)</sup>.

Soltanto quest'ultimo Autore nel suo lavoro *Le terre gialle del Friuli* del 1933, ha potuto ben delimitare le *terre gialle tipiche* da quelle cosiddette di *transizione* e dalle altre forme *accidentali*.

Credo pertanto che le osservazioni, che sto per riportare, contribuiscano alla conoscenza del tipo pedologico *terra gialla* in senso indiretto. Le terre di colore giallo assai diffuse nel grossetano sono invece riferibili alle forme *accidentali*, dovute più che al costituirsi di microclimi (come facilmente si verifica nel Carso) al fatto di derivare da substrati litologici di colore giallastro.

Queste terre sono estesamente sviluppate sulla formazione del Pliocene marino, costituita da ghiaie, conglomerati e sabbie con intercalazioni di argille. I campioni presi in esame sono stati prelevati nelle località, ove il colore giallo sembrava più intenso, e precisamente lungo la nazionale a km. 8, 7  $\frac{1}{2}$  e 6 prima del paese di Manciano per chi proviene da Pitigliano, cioè sotto *Poggio Piazza dei Tori*, a *Pod. Vecchio*, ed in altra curva della strada, sotto *M. Nero*, tutti a quota di circa 250-300 metri sul livello del mare.

---

<sup>(1)</sup> Nell'adunanza del 17 maggio 1940-XVIII.

<sup>(2)</sup> A. COMEL, *Le terre gialle del Friuli*. « Boll. della Soc. Geol. It. », vol. LII, 1933, fasc. 2.

Tali affioramenti sono distribuiti più precisamente in corrispondenza delle sabbie giallastre, e si sviluppano con le loro manifestazioni più tipiche, ove queste sono più o meno cementate da calcare, anziché da argilla. Si notano perciò soprattutto sulle dolci ondulazioni delle colline di Poggio Seiadatte, Poggio Finocchiare, Poggio Piazza dei Tori, M. Nero, Poggio Cerchiajo, dove la facies arenacea o addirittura sabbiosa del Pliocene trova il suo massimo sviluppo. Da qui, questi terreni gialli si spingono a Nord e a Sud, ove la loro distribuzione è legata a substrati litologici analoghi, mentre ad Est e ad Ovest la loro comparsa è solo sporadica e legata alla presenza di svariate lave, tra cui diverse di color giallo e soprattutto al *tufo giallo a pomieine gialle* che dà luogo in superficie ad uno sfaticcio, pur esso coltivato, di tal colore.

Di mano in mano che ci si allontana dalle località indicate, l'arenaria sabbioso-calcareo diviene meno calcarea, oppure presenta delle intercalazioni più marnose, o addirittura argillose.

Corrispondentemente questi terreni gialli perdono i loro caratteri e possono considerarsi termini di transizione alle *terre brune*, che rappresentano il tipo predominante nell'Italia Centrale, oppure passano a quelle terre gialle ora ricordate, quando il Pliocene cessa a contatto delle rocce vulcaniche così diffuse in quella regione.

Il clima del territorio in esame è piuttosto umido in confronto alle regioni circostanti: Orbetello 668, Pitigliano 876, Valentano 1058, Bolsena 529 mm. di precipitazione annuale media <sup>(1)</sup> e 12°-15° C. di temperatura media.

È da notare inoltre che queste colline plioceniche, su cui si presentano diffusi i terreni presi in istudio, hanno una maggiore elevazione di circa 200-250 metri rispetto alle altre formazioni geologiche delimitanti; quindi, per quanto non abbiamo i dati climatici riferentisi ad esse, è verosimile che le precipitazioni siano maggiori di quelle ora riportate e la temperatura un po' inferiore alla media regionale.

Inoltre i sedimenti arenacei sabbioso-calcarei determinano una morfologia un po' frastagliata a causa dell'erosione progressiva operata da torrentelli sul substrato roccioso, che si altera con grande facilità dando luogo a terreni abbastanza permeabili.

La costituzione geo-litologica del substrato favorisce dunque, nell'ambiente pedologico, una notevole umidità, per cui il fattore pluviometrico del LANG non può applicarsi molto bene in questo caso, ove, più che gli agenti climatici intervengono quelli litologici; ad ogni modo, volendolo calcolare, si hanno dei quozienti intorno al 60 od appena superiori; cioè siamo nella zona di transizione tra le *terre gialle* e le *terre brune*.

---

<sup>(1)</sup> F. EREDIA, *Le precipitazioni atmosferiche nell'Italia nel decennio 1921-1930*, Roma, 1934.

È questa infatti una regione il cui microclima, e soprattutto l'ambiente, favorisce per cause fisiche un aumento notevole di umidità relativamente alle zone circostanti, per cui il *regen factor* potrebbe scendere anche sotto il 60, come dovrebbe essere per il tipo pedologico *terra gialla*.

Un profilo tipico della terra presa in esame, cioè una successione vera e propria di orizzonti, non esiste, data anche l'instabilità del terreno in queste zone collinose, per cui è difficile incontrare un profilo maturo. Pur tuttavia, alcune osservazioni m'hanno permesso di constatare la scarsità dell'humus e che, mentre negli orizzonti superficiali si ha una progressiva diminuzione di carbonati tanto da confermare l'impressione di terre *gialle tipiche* che si riceve ad un rapido esame, non si ha affatto il caratteristico depauperamento delle sostanze colloidali in superficie con la tendenza all'accumulo in profondità, fenomeno necessario per potersi ascrivere un terreno al gruppo podsolico.

La totale assenza o quasi dell'humus, in contrasto con il rigoglioso sviluppo della vegetazione erbacea delle coltivazioni agrarie, trova la sua legittima spiegazione nei processi naturali della rapida decomposizione delle spoglie organiche.

Il fenomeno della non avvenuta eluviazione delle particelle più fini in profondità, che poteva forse essere anche favorita da questioni meccaniche per la porosità del substrato, si spiega con una causa chimica dovuta alla reazione alcalina.

Il pH infatti è superiore all'8, tanto negli orizzonti superficiali quanto in quelli sottostanti, più compatti, che possono considerarsi *roccia-madre* di questi terreni.

L'analisi meccanica ci mostra una predominanza di terra fina sullo scheletro assai scarso, che è costituito da frammenti angolosi di ciottolotti quarzosi residui del dissolvimento delle arenarie, ghiaie e sabbie plioceniche. La parte inferiore ad 1 mm., cioè la terra fina, è costituita quasi interamente dalle frazioni sabbiose, e per la parte minima da quelle argilliformi con percentuali talmente basse, che in un campione, levigato col Nöbel, la parte colloidale si mostrò ridotta a soli gr. 1 sui 20 di terreno preso in esame.

L'analisi microscopica mette in evidenza la stretta relazione tra il terreno agrario e la roccia-madre sottostante, ossia un contenuto mineralogico del tutto simile qualitativamente, e spesso anche quantitativamente, in: quarzo, limonite, ematite, calcite, augite, mica ed altri silicati ferro-magnesiaci. Soprattutto notevole è la percentuale dei ciottolotti di quarzo e dei cristalli di calcite, ricoperti da abbondante patina gialla di sesquiossido di ferro più o meno idrato, che impedisce spesso il loro riconoscimento.

Assai significanti sono i risultati dell'analisi chimica, qui sotto riportati, i quali rivelano che non ci troviamo di fronte a *terre gialle tipiche*, ma soltanto *accidentali*, e che si tratta di terreni *litocromici* secondo il termine

adottato da DEL VILLAR, di colore giallo perchè tale è il colore della roccia-madre. Quindi il colore non è di origine climatica, ma è dovuto agli elementi della sabbia gialla del substrato.

|                                                           | Campione n. 1             |                 | Campione n. 2             | Campione n. 3.            |
|-----------------------------------------------------------|---------------------------|-----------------|---------------------------|---------------------------|
|                                                           | Orizzonte<br>superficiale | Roccia<br>madre | Orizzonte<br>superficiale | Orizzonte<br>superficiale |
| SiO <sub>2</sub> ‰ . . . . .                              | 44.90                     | 36.20           | 43.54                     | 41.14                     |
| Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> » . . . . .                | 8.29                      | 7.01            | 7.09                      | —                         |
| Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub> » . . . . .                | 14.05                     | 15.33           | 11.50                     | 10.61                     |
| CaO » . . . . .                                           | 20.19                     | 28.72           | 18.40                     | 13.24                     |
| P <sub>2</sub> O <sub>5</sub> » . . . . .                 | 0.06                      | 0.06            | 0.13                      | 0.17                      |
| H <sub>2</sub> O igr. . . . .                             | 1.50                      | 1.46            | 2.24                      | 2.12                      |
| CO <sub>2</sub> . . . . .                                 | 26.00                     | 39.00           | 22.00                     | 25.00                     |
| Perdita a fuoco (de-<br>tratta l'H <sub>2</sub> O igr.) . | 16.50                     | 21.24           | 16.06                     | 15.68                     |
| pH . . . . .                                              | 8,1                       | 8.1             | 8.                        | 8.1                       |

Il pH denota trattarsi di terreni non decalcificati; in tale ambiente non può esservi verificato alcun accenno alla podsolizzazione, quindi non siamo nel caso delle *terre gialle*. In queste, il dilavamento dei carbonati e di tutte le basi in genere, deve essere notevole; inoltre gli Autori sono concordi nel riconoscer vi un contenuto in silice piuttosto elevato, per lo meno superiore al 60 %; anzi lo stesso Lang si serve di questa caratteristica per fissare la sua distinzione tra *terre gialle*, *terre rosse* e *lateriti*. Le prime spetterebbero ai climi più umidi e freschi, le seconde a quelli mediterranei e le ultime ai tropicali. Questi tre gruppi, pur avendo in comune la scarsenza di humus ed il rapporto tra l'allumina ed il sesquiossido di ferro, differirebbero, sempre secondo il Lang, per un contenuto gradualmente decrescente della silice per effetto delle condizioni climatiche.

L'unica simiglianza alle *terre gialle tipiche*, oltre al colore, può essere quella della totale assenza o grande scarsenza di sostanza organica. In quanto al rapporto totale Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> : Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub> esso non si avvicina a 2 : 1 come dovrebbe essere, ma piuttosto all'inverso, cioè a 1 : 2 infatti è notevole la quantità dei composti ferrosi (e questo ci spiega il perchè del colore giallo intenso), mentre è limitata la percentuale in allumina, come del resto si verifica in tutte le terre brune che s'incontrano nella zona climatica del Grossetano.

La quantità di silice è assai scarsa rientrando nelle percentuali che si notano nelle *terre rosse* e risentendo molto l'influenza della composi-

zione originaria della roccia madre, specialmente nel profilo esaminato, in cui il substrato arenaceo è talmente calcareo da essere costituito per i 4/10 da carbonati, e cioè in quantità leggermente superiore alla silice, suo elemento costituente.

La percentuale di  $\text{SiO}_2$  da 36.20 % nella roccia madre è salita a 44.90 % nell'orizzonte superiore; questo leggero aumento va inteso in senso relativo e non pedogenetico, inquantochè i carbonati dal 39 % di  $\text{CO}_2$  sono discesi contemporaneamente al 26 %.

Se poniamo in relazione i dati della silice con le corrispondenti somme dei sesquiossidi di alluminio e ferro, si osserva che la composizione del complesso argilloso tende verso un valore 2 del rapporto.  $\frac{\text{SiO}_2}{\text{Al}_2\text{O}_3 + \text{Fe}_2\text{O}_3}$ , analogamente a quanto accade per le *terre brune* (nell'ambiente climatico delle quali trovansi i terreni gialli da me studiati); ciò costituisce nel fenomeno della desilicizzazione uno stadio intermedio tra quello del gruppo delle *terre brune* e quello dei *terreni rossi*. V'è da notare anche che il rapporto silice: sesquiossidi rimane costante nel profilo esaminato.

Ora, avendo presente che proprio quei terreni, le cui frazioni argillose hanno il rapporto  $\frac{\text{SiO}_2}{\text{Al}_2\text{O}_3 + \text{Fe}_2\text{O}_3} < 2$ , sono generalmente riconoscibili per il colore giallo o rosso dovuto alla presenza di idrossidi di ferro ed anche di alluminio allo stato libero, dobbiamo senz'altro riconoscere che trattasi nel caso preso in esame di *terre gialle accidentali*. Queste infatti, come ho sopra ricordato, si trovano per lo più nelle stesse condizioni ambientali delle *terre brune* con esse confinanti.

La notevole quantità di calce in tutti i quattro campioni analizzati viene confermata dal pH superiore ad 8. La lisciviazione non è avvenuta, o leggerissima, come può riscontrarsi nel tipo delle *terre brune*.

Le percentuali di fosforo (controllate con il metodo LORENZ) sono normali per i terreni agrari, ma assai inferiori a quelle dei terreni di colore rosso e giallo, tipo *ferretti*, da me osservati precedentemente <sup>(1)</sup> sui conglomerati, ma anche su talune sabbie giallastre del Pliocene marino dell'altipiano di Città della Pieve.

La notevole effervescenza al calcimetro di SCHLEIBER, che ci mostra le elevate percentuali in carbonati, riquadra perfettamente con l'alto valore riscontrato della calce e ci spiega i valori della perdita a fuoco.

Il colore del terreno è, come sempre, in connessione col fattore umidità poichè è questo ad influire sul vario stato d'idratazione del complesso silico-ferro-alluminico; perciò il colore giallo che si riscontra è dovuto alle forme più idrate e ciò accade per l'ambiente più umido rispetto alle zone

<sup>(1)</sup> C. LIPPI-BONCAMBI, *Su alcune terre di colore rosso dell'altipiano pievese (Umbria)*. « Boll. Soc. Geol. Ital. », vol. LVII-1938, fasc. 3.

contermini. Conosciamo, per esperienza, come i substrati arenacei dell'Italia centrale favoriscano la formazione delle *terre gialle* alle loro pendici per la permeabilità e per la ripidità dei declivi che permettono un rapido smaltimento delle acque piovane. Infatti, ai piedi di tali declivi, ne risulta favorito il grado di umidità, per cui i silicati ferrosi subiscono processi di ossidazione più avanzati.

Concludendo, dal disfacimento delle arenarie e delle sabbie giallastre del Pliocene si sono formati questi terreni prevalentemente sabbiosi e molto calcarei di colore giallo intenso, che però non possono essere riferiti al tipo pedologico *terra gialla* non essendo terreni climatici, come ho cercato di dimostrare, ma semplicemente originatisi dallo sfacelo delle arenarie calcaree, che vanno a mano a mano disgregandosi in detriti grossolani, poi in sabbie cementate, indi in granuli silicei costituenti i terreni agrari presi in istudio.

Questi terreni così diffusi in provincia di Grosseto, sono da considerarsi dei *terreni litocromici*, che mantengono il colore della roccia-madre, da cui si sono originati.

---



**Patologia.** — *Acido nicotinico e maidismo sperimentale della cavia* <sup>(1)</sup>. Nota di GIOVANNI GIORGIO e ONOFRIO SOLIMINI, presentata <sup>(2)</sup> da CARMELO CIACCIO, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

L'identificazione della vitamina antipellagrosa (fattore P. P. del complesso vitaminico B<sub>2</sub>) con l'acido nicotinico (o la sua amide) rappresenta un'acquisizione recente solo di qualche anno e di grande importanza pratica e teorica. Il merito di questa scoperta va indubbiamente attribuito ad ELVEHJEM, MADDEM, STRONG e WOOLLEY <sup>(3)</sup>: questi AA. avendo osservato che gli estratti epatici efficaci nella cura della *black-tongue* (lingua nera) dei cani (affezione analoga alla pellagra umana) contenevano notevoli quantità dell'amide dell'acido nicotinico, pensarono di curare la sindrome pellagrosa canina mediante la semplice somministrazione di acido nicotinico puro o della sua amide. In base agli ottimi risultati ottenuti con questo trattamento, essi consigliarono l'uso dello stesso rimedio nella cura della pellagra umana. Le osservazioni di ELVEHJEM e collaboratori furono subito e largamente confermate da STREET e COWGILL <sup>(4)</sup> nonchè da SEBRELL e collaboratori <sup>(5)</sup>, tanto che il « Journal of American Medical Association », nell'articolo editoriale del 9 ottobre 1937, faceva suo il consiglio di ELVEHJEM di tentare la cura della pellagra nell'uomo con la somministrazione di acido nicotinico ed il « British Medical Journal », nell'editoriale del 15 gennaio 1938, consigliava nel trattamento delle manifestazioni pellagrose l'uso della trigonellina (la metilbetaina dell'acido n-metilnicotinico), alcaloide conosciuto già da una cinquantina d'anni (JOHNS <sup>(6)</sup>) come largamente presente nel regno vegetale e sopra-

---

<sup>(1)</sup> Ricerche eseguite nell'Istituto di Patologia generale della R. Università « Benito Mussolini » di Bari.

<sup>(2)</sup> Nell'Adunanza del 17 maggio 1940-XVIII.

<sup>(3)</sup> ELVEHJEM, MADDEM, STRONG e WOOLEY, « Journ. Amer. Chem. Soc. », 1937, vol. 59, 1767 e « Journ. biol. Chem. », 1938, vol. 123, 137.

<sup>(4)</sup> STREET e COWGILL, « Proc. Soc. exp. Biol. a. Med. », 1937, vol. 37, 547.

<sup>(5)</sup> SEBRELL, ONSTOTT, FRASER e DAFT-READ before the « Amer. Inst. of Nutrit. », 1938.

<sup>(6)</sup> JOHNS E., « Ber. Chem. Gesellsch. », 1885, vol. 18, 2518 e 1887, vol. 20, 2840.

tutto nei semi di *Trigonella foenum graecum*, di pisello, fagiolo, caffè, strofanto, canapa ecc. Pertanto, i primi risultati nella cura della pellagra umana non si fecero attendere e furono veramente quanto mai brillanti: così SPIES, COOPER e BLANKENHORN <sup>(7)</sup> comunicarono già nel novembre 1937 di aver trattato con successo un primo gruppo di quattro pellagrosi nei quali videro cedere le manifestazioni a carico delle mucose già dopo sole dodici ore dalla somministrazione di acido nicotinico; seguirono le osservazioni di FOUTS e collaboratori <sup>(8)</sup> di HARRIS <sup>(9)</sup> di SMITH <sup>(10)</sup>, altre di SPIES e collaboratori <sup>(11)</sup> nonché di numerosi altri studiosi sia in America che in Europa, confermantI ampiamente i primi brillanti risultati sull'azione terapeutica dell'acido nicotinico nella pellagra umana. Tra noi, meritano particolare menzione le ricerche di FRONTALI <sup>(12)</sup> perchè eseguite su adulti e su bambini pellagrosi, mantenuti a dieta pellagrogena (gradatamente completata con proteine di alto valore biologico e con altre vitamine come l'acido ascorbico, la carotina, la lattoflavina, l'aneurina) anche durante il trattamento con acido nicotinico: da esse è risultato che l'acido nicotinico, anche se aggiunto da solo a diete pellagrogene, ha un rapido effetto curativo non soltanto sulle manifestazioni mucose, bensì anche su quelle cutanee e nervose della pellagra nel bambino e nell'adulto. Infatti, nessun effetto sulle manifestazioni pellagrose si ebbe dalla somministrazione di acido ascorbico, di carotina, di aneurina e di lattoflavina che precedette la somministrazione di acido nicotinico; analogamente l'aneurina non dimostrò alcun effetto favorevole sul decorso delle manifestazioni spasmodiche osservate in un caso ed in più, in cinque casi in cui non fu somministrata lattoflavina, il risultato curativo del trattamento con acido nicotinico si verificò egualmente in pieno e non si poterono osservare sintomi residui o sopravvenienze morbose riferibili ad un'eventuale carenza di lattoflavina.

Analogamente, VISCO <sup>(13)</sup> in pellagrosi nei quali lasciava immutata l'alimentazione ed il tenore di vita, ha ottenuto già alla 2-3<sup>a</sup> iniezione

---

(7) SPIES, COOPER e BLANKENHORN, « Centr. Soc. f. Clin. Res. », novembre 1937.

(8) FOUTS, HELMER, LEPKOWSKY e JUKES, « Proc. Soc. Exp. Biol. Med. », 1937, vol. 37, 405.

(9) HARRIS, « Chem. a. Ind. », 1937, vol. 56, 1134.

(10) SMITH, RUFFIN, e SMITH, « Journ. Amer. Med. Assoc. », 1937, vol. 109, 2054.

(11) SPIES, COOPER, CLARK e BLANKENHORN, « Journ. Amer. Med. Assoc. », 1938, vol. 110, 622.

(12) FRONTALI, *Verhandl. der 50. Verein d. Ges. f. inn. Med.*, Wiesbaden, 1938; FRONTALI e FERRARI, « Minerva Medica », 11 agosto 1938; FRONTALI, « Arch. Ital. Medic. Sper. », 1938, vol. 2, 745.

(13) VISCO S., *Quaderni della Nutrizione*, 1938, vol. 5, 321.

endovenosa di acido nicotinico (200 mgr. *pro die*) la totale reintegrazione della mucosa orale, la scomparsa dell'enterite, dell'astenia e dell'anoressia, nonchè la risoluzione delle lesioni cutanee in fase eritematosa, e dopo dodici-quindici giorni, anche la guarigione dei vasti processi desquamativi cutanei delle estremità e del collo.

Pertanto, in base ai risultati di queste e di altre osservazioni, si può con sicurezza affermare che tanto la pellagra umana che la corrispondente sindrome canina (o *black-tongue*) sono curabili e guaribili mediante la somministrazione di acido nicotinico. A conclusioni analoghe, si è pervenuto anche in rapporto alla sindrome pellagrosimile dei giovani maiali: MARTIN A. e MARTIN C. <sup>(14)</sup> da una parte, e VISCO <sup>(15)</sup> dall'altra, hanno reso noto che essa migliora notevolmente in seguito al trattamento con acido nicotinico.

Perciò, per consiglio e sotto la guida del prof. SOLARINO, ci è sembrato non privo di interesse indagare quale fosse l'influenza dell'acido nicotinico sulla sindrome prodotta nella cavia mediante l'alimentazione maidica, allo scopo anche di accertare se esista identità patogenetica tra sindrome maidica sperimentale della cavia da una parte e pellagra umana e *black-tongue* canina dall'altra: un tale risultato, invero, consentirebbe di utilizzare la cavia, dal punto di vista sperimentale, per gli studi sulla pellagra al posto del cane, che presenta il quadro della *black-tongue* solo dopo vari mesi (assai dispendiosi, tra l'altro), di trattamento con dieta pellagrogena.

\* \* \*

Sono serviti al nostro scopo, due gruppi di cavie (ventotto animali complessivamente) d'ambo i sessi, tutte in ottime condizioni generali di nutrizione, provenienti dallo stesso allevamento, e presso a poco dello stesso peso. Esse furono alimentate tutte (dopo alcuni giorni di osservazione, nei quali furono tenute ad alimentazione mista, libera, in laboratorio) con la speciale dieta carenzata proposta da GOLDBERGER, WHEELER, ROGER e SEBRELL <sup>(16)</sup> per produrre i sintomi della *Blacktongue* nei cani, successivamente modificata da KOHEN ed ELVEHJEM <sup>(17)</sup> e già da entrambi noi utilizzata in ricerche precedentemente rese note sul comportamento

---

<sup>(14)</sup> A. MARTIN e C. MARTIN, Cit. da BISCEGLIE, v. in « Rassegna Medica », 1939, vol. 19, 5.

<sup>(15)</sup> S. VISCO, « La Ricerca Scientifica », 1938, serie II, vol. II, 623.

<sup>(16)</sup> GOLDBERGER, WHEELER, ROGER e SEBRELL, « U. S. Publ. Helth Reports », 1930, vol. 45, 273.

<sup>(17)</sup> KOHEN ed ELVEHJEM, « Journ. Natur. », 1936, vol. XI, 67; « Journ. biol. Chem. », 1937, vol. 118, 693.

del potere ossido-riduttivo degli organi (GIORGIO <sup>(18)</sup>) e del potere perossidasico dei leucociti (SOLIMINI <sup>(19)</sup>) di cavia sottoposte ad alimentazione maidica, in confronto a cavia ipoalimentate. Essa risulta così costituita: farina di mais 72 %, caseina purificata <sup>(20)</sup> 18 %, olio di semi di cotone 5 %, olio di fegato di merluzzo 2 %, carbonato di calcio 1 %, fosfato bibasico di calcio 1 %, cloruro sodico 1 %, ossido di ferro ( $\text{Fe}_2\text{O}_3$ ) 0,08 %. Si ebbe cura di prepararla sempre facendo cuocere a fuoco lento, in tegame doppio per due ore, la farina di mais, la caseina e la miscela salina con la quantità d'acqua necessaria per ottenere a cottura completa una polenta dura; gli oli venivano invece aggiunti dopo cottura e raffreddamento. Alla polenta di ogni cavia, inoltre, veniva aggiunto giornalmente 1 cc. di una soluzione 1 % in acqua distillata di acido  $\gamma$  ascorbico (CEBION, MERCK); si credette anche opportuno somministrare agli animali in esperimento, per via sottocutanea ed a giorni alterni, centosessanta  $\gamma$  *pro capite* di aneurina (BETAXIN BAYER), nonostante la scarsa sensibilità della cavia alla carenza di vitamina B<sub>1</sub>.

A sedici delle ventotto cavia sottoposte a questo trattamento (le altre dodici servirono da controllo) fu inoltre somministrato, e fin dal primo giorno di esperimento, acido nicotinico puro (MERCK) in soluzione acquosa al 4 ‰ per iniezione sottocutanea o *per os*: modalità di somministrazione e dosi risultano dall'annessa tabella. A quattro degli animali (nn. 25, 26, 27 e 28 della tabella) di quest'ultimo gruppo, fu anche somministrata per via ipodermica lattoflavina (BAYER) alla dose di sessanta  $\gamma$  ogni tre giorni.

La dieta venne sempre messa a disposizione dell'animale (insieme con acqua di fonte) in quantità superiore alla sua massima capacità di consumo giornaliero; alcuni degli animali (come avevamo già rilevato nelle precedenti ricerche (18 e 19) dimostrarono una certa ripugnanza, nei primi giorni di esperimento, verso il nuovo genere di alimentazione ma finirono con l'adattarsi sempre all'inconsueto regime, consumandone quantità pressochè eguali al fabbisogno giornaliero di cibo ordinario (crusca). Nonostante ciò, tutti gli animali presentarono una costante, graduale discesa del peso corporeo, che veniva regolarmente controllato ogni giorno, insieme con la temperatura cloacale: particolare attenzione fu sempre rivolta alla comparsa delle manifestazioni caratteristiche (perdita della vivacità, arruffamento o caduta del pelo, turbe gastro-intestinali,

(18) G. GIORGIO, « Arch. Ital. Medic. Sper. », 1939, vol. 4 529.

(19) O. SOLIMINI, « Arch. Ital. Medic. Sperim. », 1939, vol. 4, 523.

(20) La purificazione della caseina fu praticata mediante lavaggio continuo, per una settimana, in una soluzione di acido acetico al 10 % (che veniva giornalmente rinnovata) e, dopo lavaggio in acqua distillata ed asciuttamento, estrazione con alcool a 95° caldo, più volte rinnovato.

e nella fase finale dispnea, ipotermia, perdita del tono muscolare o paralisi flaccida delle estremità).

In alcuni esperimenti fu anche tenuto conto della quantità di cibo giornalmente consumata dall'animale.

Le osservazioni da noi eseguite sono riassunte nell'annessa tabella, nella quale si trovano esposti, rispettivamente, i dati relativi alle cavie sottoposte ad alimentazione maidica e trattate con acido nicotinic e quelli relativi alle cavie sottoposte solo ad alimentazione maidica.

In tutti i casi, come si rileva dal confronto tra i due gruppi di esperienze, l'esperimento decorse in modo presso a poco corrispondente non solo per ciò che concerne l'esito della prova che condusse costantemente a morte gli animali con la stessa sintomatologia (caduta del peso corporeo, turbe digerenti col quadro anatomico patologico della gastro-enterite emorragica, nefrite, dispnea, ipotermia intensa — fino a 23° C. — perdita del tono muscolare o paralisi flaccida delle estremità) ma pure riguardo al tempo di resistenza al trattamento maidico. Infatti, la morte delle sedici cavie sottoposte ad alimentazione maidica ed a somministrazione di acido nicotinic (*per os* o per via parenterale) è avvenuta in media dopo sei, sette giorni di esperimento anche nei casi in cui oltre dell'acido nicotinic fu praticata agli animali in esperimento anche la somministrazione di lattoflavina <sup>(21)</sup>; un valore presso a poco corrispondente (sette giorni) si è avuto per le altre dodici cavie sottoposte alla sola alimentazione maidica. Non fu rilevata alcuna differenza degna di nota nemmeno nella quantità giornaliera di cibo, in media, consumato dagli animali in esperimento: l'unica differenza sensibile tra gli animali dei due gruppi, appare quella relativa alla perdita percentuale di peso corporeo, che fu del 23 % in media negli animali trattati con acido nicotinic, contro un valore medio del 26,5 % per gli animali di controllo.

---

(21) Si credette opportuno eseguire questo tipo di esperimento, in rapporto alla questione recentemente prospettata da parte di diversi AA. (tra i quali SEBRELL, SPIES ed altri), che cioè la pellagra e le sindromi pellagroidi degli animali siano dovute non al solo *deficit* di acido nicotinic (o della sua amide) ma piuttosto a carenze vitaminiche multiple. Secondo R. W. VILTER, S. P. VILTER e SPIES <sup>(22)</sup>, anzi, l'azione curativa dell'acido nicotinic sulle manifestazioni pellagrose umane risulterebbe rafforzata dall'aggiunta di lattoflavina, in base alla seguente osservazione: alcuni pellagrosi tenuti a dieta pellagrogena, presentarono perdita di peso, anoressia e dermatiti varie ad onta della somministrazione quotidiana di 100-400 mgr. di acido nicotinic e di 10 mgr. di aneurina: l'aggiunta di lattoflavina bastò a far ritornare le forze e l'appetito degli ammalati ed a fare scomparire le manifestazioni cutanee.

TABELLA

*Cavie ad alimentazione maidica + acido nicotinico*

*Cavie ad alimentazione maidica*

| Numero<br>dell'animale<br>e sesso | Modalità<br>di<br>trattamento                                                                                  | Peso corporeo<br>iniziale<br>(g.) | Peso corporeo<br>finale<br>(g.) | Percentuale<br>di peso corporeo<br>perduto durante<br>l'esperimento | Durata in vita<br>dell'animale<br>(giorni) | Media<br>giornaliera<br>di alimento<br>consumato (g.) | Numero<br>dell'animale<br>e sesso | Peso corporeo<br>iniziale<br>(g.) | Peso corporeo<br>finale<br>(g.) | Percentuale<br>di peso corporeo<br>perduto durante<br>l'esperimento | Durata in vita<br>dell'animale<br>(giorni) | Media<br>giornaliera<br>di alimento<br>consumato (g.) |
|-----------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------|---------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|-------------------------------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------|---------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| 1 ♂                               | acido nicotinico<br>(16 mgr a gior-<br>ni alterni) per<br>iniezioni.                                           | 556                               | 471                             | 15                                                                  | 8                                          | —                                                     | 2 ♀                               | 550                               | 426                             | 23                                                                  | 4                                          | —                                                     |
| 3 ♀                               |                                                                                                                | 533                               | 388                             | 27                                                                  | 8                                          | —                                                     | 4 ♂                               | 617                               | 426                             | 30                                                                  | 11                                         | —                                                     |
| 5 ♂                               |                                                                                                                | 522                               | 354                             | 32                                                                  | 7                                          | —                                                     | 6 ♂                               | 534                               | 357                             | 33                                                                  | 12                                         | —                                                     |
| 7 ♀                               |                                                                                                                | 575                               | 375                             | 34                                                                  | 8                                          | —                                                     | 8 ♀                               | 614                               | 426                             | 30                                                                  | 10                                         | —                                                     |
| 9 ♂                               | acido nicotinico<br>(16 mgr pro die)<br>per os.                                                                | 377                               | 322                             | 11                                                                  | 11                                         | 71                                                    | 10 ♂                              | 420                               | 317                             | 24                                                                  | 10                                         | —                                                     |
| 11 ♀                              |                                                                                                                | 337                               | 250                             | 26                                                                  | 4                                          | 10                                                    | 12 ♀                              | 632                               | 424                             | 33                                                                  | 6                                          | —                                                     |
| 13 ♂                              |                                                                                                                | 372                               | 297                             | 22                                                                  | 10                                         | 75                                                    | 14 ♂                              | 325                               | 202                             | 38                                                                  | 7                                          | —                                                     |
| 15 ♂                              |                                                                                                                | 552                               | 496                             | 10                                                                  | 3                                          | 42                                                    | 16 ♀                              | 514                               | 315                             | 39                                                                  | 7                                          | —                                                     |
| 17 ♀                              | acido nicotinico<br>(16 mgr a giorni<br>alterni) per inie-<br>zioni.                                           | 505                               | 404                             | 20                                                                  | 7                                          | 58                                                    | 18 ♂                              | 359                               | 308                             | 14                                                                  | 5                                          | 43                                                    |
| 19 ♂                              |                                                                                                                | 597                               | 477                             | 10                                                                  | 5                                          | 51                                                    | 20 ♂                              | 437                               | 344                             | 21                                                                  | 12                                         | 68,5                                                  |
| 21 ♀                              |                                                                                                                | 402                               | 305                             | 24                                                                  | 6                                          | 19                                                    | 22 ♀                              | 302                               | 218                             | 27                                                                  | 3                                          | 36                                                    |
| 23 ♂                              |                                                                                                                | 532                               | 415                             | 22                                                                  | 6                                          | 29                                                    | 24 ♀                              | 368                               | 344                             | 6                                                                   | 2                                          | 36,5                                                  |
| 25 ♂                              | Acido nicotinico<br>(16 mgr a giorni<br>alterni) + lat-<br>toflavina (60 γ<br>ogni 3 giorni)<br>per iniezioni. | 519                               | 369                             | 29                                                                  | 7                                          | —                                                     |                                   |                                   |                                 |                                                                     |                                            |                                                       |
| 26 ♀                              |                                                                                                                | 617                               | 458                             | 25                                                                  | 5                                          | —                                                     |                                   |                                   |                                 |                                                                     |                                            |                                                       |
| 27 ♂                              |                                                                                                                | 487                               | 312                             | 36                                                                  | 7                                          | —                                                     |                                   |                                   |                                 |                                                                     |                                            |                                                       |
| 28 ♀                              |                                                                                                                | 511                               | 385                             | 25                                                                  | 5                                          | —                                                     |                                   |                                   |                                 |                                                                     |                                            |                                                       |
| Medie                             |                                                                                                                |                                   |                                 | 23                                                                  | 6,7                                        |                                                       |                                   |                                   |                                 | 26,5                                                                | 7,4                                        |                                                       |



Cosicchè, in sostanza, ad onta della somministrazione di acido nicotico o di acido nicotinico e lattoflavina, il quadro del maidismo sperimentale da noi provocato nella cavia mediante l'uso della speciale dieta carenzata di GOLDBERGER, WHEELER, ROGER e SEBRELL, decorse sempre in tutti i casi in condizioni esattamente corrispondenti a quelle degli animali non sottoposti a trattamento con acido nicotico.

#### CONCLUSIONI E CONSIDERAZIONI.

Dalle ricerche qui riferite, risulta chiaramente che la somministrazione di acido nicotinico (anche se associato a lattoflavina) non vale, nella cavia, a modificare il decorso della sindrome provocata in questo animale dall'alimentazione maidica esclusiva, pur integrata con proteine di alto valore biologico (come la caseina) e con l'aggiunta di sali e di altre vitamine come l'acido ascorbico, l'aneurina, le vitamine A e D. La sindrome maidica sperimentale della cavia, pertanto si differenzia nettamente dalla pellagra umana e dai quadri morbosi prodotti nel cane (*black-tongue*) e nel maiale mediante l'uso di diete pellagrogene.

Dati questi risultati, è lecito allora pensare che nel determinismo del quadro maidico sperimentale della cavia debbano ingranarsi altri fattori ed a noi sembra che meritino particolare rilievo, a tal riguardo, la possibilità della presenza nel mais di sostanze a funzione altamente tossica — almeno per la cavia — e quella della deficienza in esso di un altro principio (importantissimo per la vita di quest'animale), diverso dal fattore P. P., ma contenuto come questo negli estratti alcoolici di fegato di animali normali e di cavolo fresco, come risulta dalle ben note ricerche di RONDONI <sup>(23)</sup>. La prima ipotesi è suggerita più che dal tipo delle manifestazioni morbose, specialmente dalla brevità di tempo occorrente per la loro comparsa negli animali in esperimento: in base a quanto finora è noto sulle riserve vitaminiche degli organismi animali (AMANTEA e collaboratori <sup>(24)</sup> MARTINO <sup>(25)</sup> SOLARINO <sup>(26)</sup>), non riesce facile, infatti, ammet-

<sup>(22)</sup> VILTER R. W., VILTER S. P. e SPIES, « Journ. Amer. Medic. Assoc. », 1939, vol. 112, 420.

<sup>(23)</sup> RONDONI P., « Lo Sperimentale », 1915, vol. 69, 273.

<sup>(24)</sup> AMANTEA G., « Riv. di Biol. », 1922, vol. 4, 662; *I problemi della Nutrizione*, 1924, vol. I, « Boll. Soc. Ital. Biol. Sperim. », 1926, vol. I, 233 e 1937, vol. II, 195; Atti della Soc. Ital. per il Progr. delle Scienze », Riunione di Roma, 1932, « Rend. R. Accad. dei Lincei ». 1933, vol. 18, serie 6<sup>a</sup>; AMANTEA, ZAGAMI, BAGLIONI FIANI, ZANGHI, RAVASINI, « Rend. R. Accad. dei Lincei », 1934, vol. 19, serie 6<sup>a</sup>; ZANGHI G., « Boll. Soc. Ital. Biol. Sperim. », 1927, vol. 2, 206.

<sup>(25)</sup> MARTINO G., *Quaderni della Nutrizione*, 1934-35, vol. I, 413.

<sup>(26)</sup> SOLARINO G., *Quaderni della Nutrizione*, 1934-35, vol. I, 375, « Boll. Soc. Ital. Biol. Sperim. », 1935, vol. 10, 917.



tere che già al 2°-3° giorno di regime carenzato – come in qualcuno dei nostri esperimenti – possa instaurarsi e concludersi con la morte degli animali un quadro di puro *deficit* vitaminico. Ci sembra quindi che – almeno per il quadro da alimentazione maidica nella cavia – il problema dell'esistenza nel mais di sostanze tossiche, meriti ancora di essere indagato.

D'altra parte, in base alle più recenti indagini sulla vitamina anti-pellagrosa, tendenti ad identificarla con la trigonellina (la metilbetaina dell'acido n-metilnicotinico) piuttosto che con l'acido nicotinico o la sua amide (KÜHNAU <sup>(27)</sup>) non resta esclusa un'altra possibilità, e cioè quella che l'organismo della cavia sia incapace, a differenza di quello umano e di altri animali (cane, maiale), a produrre la metilazione dell'acido nicotinico somministrato.

Perciò, ci riserviamo di tornare con ulteriori osservazioni, sul problema della genesi del maidismo sperimentale nella cavia.

---

<sup>(27)</sup> KÜHNAU J., « Kongressber. d. XVI. Intern. Physiologen-Kongress », Zurich, 14-19 agosto 1938, vol. 2, 326.

**Biologia.** — *Nuove osservazioni sullo sviluppo delle gonadi e sul comportamento delle cellule germinative in una razza indifferenziata di « Rana agilis »* <sup>(1)</sup>. Nota di ENRICO VANNINI, presentata <sup>(2)</sup> da GIUSEPPE GOLA, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

In mie precedenti ricerche <sup>(3)</sup> seguii fino alla metamorfosi (emissione delle zampe anteriori e inizio del riassorbimento della coda) lo sviluppo delle gonadi in una razza di *Rana agilis* THOM. proveniente dagli immediati dintorni di Siena. Gli esemplari uccisi prima della metamorfosi, apparvero tutti femminili. Dei 30 esemplari uccisi durante la metamorfosi, 26 erano femmine tipiche con ovaie variamente sviluppate, 4 invece intersessuati con ovaie all'inizio della loro trasformazione in testicoli. Nessuno degli animali esaminati, si dimostrò di sesso maschile. Conclusi che la *R. agilis* dei dintorni di Siena appartiene (seguendo la nota nomenclatura di WITSCHI) ad una « razza indifferenziata », in cui l'inversione sessuale dei maschi genetici inizia in una piccola percentuale di casi all'epoca della metamorfosi. Era la prima volta che la *R. agilis* veniva studiata dal punto di vista del suo differenziamento sessuale.

Nel mio precedente lavoro rivolsi particolare attenzione al comportamento delle cellule germinative durante il fenomeno dell'inversione ssesuale. Secondo WITSCHI <sup>(4)</sup>, durante i processi di inversione sessuale delle rane, soltanto gli ovogoni primari dimostrerebbero la loro bipotenza sessuale, passando dalla parte ovarica della gonade (*cortex*) a quella testicolare di nuova formazione (*medulla*), ove assumono il valore di spermatogoni primari. Tutte le altre cellule germinative presenti nell'ovaia (ovogoni secondari ed ovociti di 1° ordine) degenererebbero durante la trasfor-

---

(1) Le presenti osservazioni verranno prossimamente esposte più dettagliatamente, con l'adeguato corredo di disegni e di fotografie.

(2) Nell'Adunanza del 17 maggio 1940-XVIII.

(3) E. VANNINI, *Sviluppo delle gonadi e intersessualità transitoria in « Rana agilis »* Thom. « Arch. Zool. Ital. », vol. XXV, pag. 41 (1938).

(4) E. WITSCHI, *Bestimmung und Vererbung des Geschlechts bei Tieren*. « Handb. der Vererb. », Bd. II, 1929 (vedi pagg. 101-102).

mazione di quest'ultima in testicolo. Tale opinione è quella seguita dalla generalità degli AA.

Recentemente GALGANO <sup>(1)</sup>, studiando alcuni esemplari intersessuati di *Rana esculenta* var. *ridibunda*, già metamorfosati da vari mesi e della probabile età di circa un anno <sup>(2)</sup>, ha trovato nelle loro gonadi, oltre ad elementi germinativi della serie femminile e di quella maschile, anche cellule che presentano caratteristiche morfologiche intermedie fra quelle degli ovociti e quelle degli spermatoцитi profasici. Più precisamente, si tratta di ovociti di 1° ordine che durante la profase maturativa hanno parzialmente risentito l'influenza mascolinizzante della *medulla* in corso di proliferazione. In base all'interessante reperto di GALGANO, si può ammettere, modificando in parte il concetto di WITSCHI, che il carattere di cellule sessualmente bipotenti (capaci cioè di evolvere tanto in senso femminile che maschile) non sia esclusivo degli ovogoni e spermatogoni primari (protogoni, secondo la nomenclatura di BECCARI), ma si estenda anche agli ovogoni e spermatogoni secondari (che GALGANO propone perciò di riunire sotto il nome generico di deutogoni), e, sebbene in forma meno completa, agli ovociti e spermatoцитi di 1° ordine profasici. Interpretando su questa base i reperti di SWINGLE <sup>(3)</sup>, si riconosce che questo A. ha sicuramente riscontrato cellule a sessualità intermedia del tipo di quelle di GALGANO, durante il ciclo maturativo del primo anno di vita larvale nei maschi genetici di alcune razze indifferenziate di *Rana catesbeiana* <sup>(4)</sup>.

In questi ultimi tempi GALGANO <sup>(5)</sup> ha nuovamente insistito sull'interpretazione delle cellule a sessualità intermedia da lui scoperte, inquadrandola nell'insieme delle nostre attuali conoscenze sui processi di determinazione e differenziamento sessuale, ed ha annunciato un esame par-

<sup>(1)</sup> M. GALGANO, *Cellule a sessualità intermedia nelle gonadi di alcuni giovani esemplari di « Rana esculenta »* L. « Arch. It. Anat. Embr. », vol. XXXVII, pag. 1, (1936).

<sup>(2)</sup> Gli animali furono raccolti nella sorgente calda di Tauorga (Tripolitania); l'A. non sa dire se si trattasse di una intersessualità genetica o provocata dall'alta temperatura dell'acqua.

<sup>(3)</sup> W. W. SWINGLE, *The germ cells of anurans. I. The male sexual cycle of « Rana catesbeiana » larvae.* « Journ. Exp. Zool. », vol. XXXII, pag. 235 (1921); IDEM, II. *An embryological study of sex differentiation in « Rana catesbeiana ».* « Journ. Morph. Physiol. », vol. XLI, pag. 441 (1926).

<sup>(4)</sup> È noto che questa rana americana ha un periodo larvale della durata di due anni. Nei maschi genetici delle razze indifferenziate, durante il primo anno di vita larvale, esiste una « progenode » (ovaia, spesso all'inizio della sua trasformazione in testicolo); nel secondo anno invece si forma un testicolo definitivo.

<sup>(5)</sup> M. GALGANO, *Nozione di differenziamento indotto del sesso nelle cellule germinali dell'adulto.* « Monit. Zool. It. », A. LI, pag. 1, (1940).

ticularmente dettagliato della variazione dei chiasmi nei maschi e negli intersessuati di *R. esculenta* <sup>(1)</sup>.

Nel mio precedente lavoro potei rilevare che, nelle gonadi intersessuate dell'epoca della metamorfosi, migrano dalla *cortex* ovarica alla *medulla* testicolare di nuova formazione, non solo gli ovogoni primari (protogoni), ma anche quelle cellule germinative riunite in gruppi isogeni, che, pure conservando l'aspetto citologico degli ovogoni secondari, a questo stadio di sviluppo hanno ormai per lo più assunto, in base a quello che sarebbe stato il loro destino in un'ovaia tipica, il significato di ovociti di 1° ordine ancora in riposo. Nessuno degli ovociti già impegnati nella prima profase maturativa, invece, abbandona la *cortex* per passare nella *medulla*. Tutto ciò confermava pienamente, in un materiale differente e in base ad un diverso criterio, il concetto già espresso da GALGANO della completa bipotenza sessuale degli ovogoni primari e secondari e degli ovociti di 1° ordine in riposo. Nei miei esemplari non trovai però nessuna di quelle cellule a sessualità intermedia descritte da GALGANO, che potessero confermare la parziale bipotenza sessuale degli ovociti profasici di 1° ordine.

Nel presente lavoro mi sono proposto di prolungare per qualche tempo oltre la metamorfosi lo studio degli esemplari senesi di *R. agilis*, allo scopo di chiarire meglio sia il tipo di differenziamento sessuale di questa razza, sia il comportamento ulteriore delle cellule germinative che, nei maschi genetici, passano dalla *cortex* nella *medulla* durante il periodo di intersessualità transitoria giovanile.

Alcune uova di *R. agilis*, raccolte negli immediati dintorni di Siena il 20 febbraio 1938, furono poste in un acquario dell'Istituto di Biologia e Zoologia generale di quella Città <sup>(2)</sup>, ove i girini che da esse si schiusero vennero allevati nelle medesime condizioni naturali di temperatura e di nutrizione descritte per il precedente allevamento. La metamorfosi fu raggiunta da tutti gli individui, anche questa volta, fra la metà di giugno e i primissimi giorni di luglio. 11 esemplari vennero uccisi verso la fine della metamorfosi (inizio del riassorbimento della coda), 29 vennero invece lasciati vivere oltre la fine della metamorfosi, e uccisi in tre tempi successivi (20 luglio; 2-5 agosto; 13-17 agosto).

Per l'esame istologico delle gonadi del materiale raccolto, ho seguito la medesima tecnica usata nel precedente allevamento.

(1) M. GALGANO, *La variazione dei chiasmi nei maschi e negli intersessuati di «Rana esculenta»* L. «Arch. It. Anat. Embr.» (in corso di pubblicazione).

(2) Ringrazio il prof. MARIO BENAZZI, per avere ospitato il mio allevamento nell'Istituto da Lui diretto.

All'epoca della metamorfosi, ho ritrovato condizioni perfettamente analoghe a quelle dell'allevamento precedente: degli 11 esemplari esaminati, nessuno è apparso di sesso maschile. 9 erano tipicamente femminili, con ovaie variamente sviluppate (confronta figg. 2, 3 e 4, tav. 3, del mio precedente lavoro). Gli altri 2 presentavano invece gonadi intersessuate, analoghe a quelle da me descritte, pure per l'epoca della metamorfosi, nel mio studio precedente (cfr. figg. 5, 6, 7 e 8, tav. 4, del mio lavoro citato). In esse, è distinguibile una parte corticale di aspetto nettamente ovarico, ricca di ovociti di 1° ordine in profase maturativa nessuno dei quali è ancora in degenerazione, e una parte midollare di aspetto testicolare. Una porzione di ciascuna di tali gonadi (in corrispondenza di ambedue le estremità oppure solo di quella anteriore) conserva un aspetto esclusivamente femminile. Come negli esemplari intersessuati del precedente allevamento, anche in questi nessuno degli ovociti profasici ha raggiunto ancora lo stadio della deutoplasmogenesi (2° periodo di accrescimento). Dal complesso delle mie presenti osservazioni, sembra confermato che fra le ovaie dell'epoca della metamorfosi, sono con maggior probabilità destinate alla trasformazione in testicolo (perchè evidentemente appartenenti a maschi genetici) quelle più arretrate nel loro sviluppo, in cui cioè un minor numero di ovociti profasici (o nessuno di essi) ha raggiunto l'epoca della deutoplasmogenesi (cfr. figg. 2 e 3, tav. 3, del mio precedente lavoro).

Dei 29 esemplari raccolti dopo la metamorfosi, 14 erano nettamente femminili, con ovaie piene di ovociti in avanzata deutoplasmogenesi. Gli altri 15 esemplari erano invece di sesso maschile; fra questi ultimi, 10 presentavano già testicoli tipici più o meno progrediti nel loro sviluppo, privi di qualsiasi traccia dello stato di intersessualità attraversato, mentre i rimanenti 5 esemplari avevano testicoli in cui erano tuttora nettamente evidenti residui più o meno estesi della pregressa condizione femminile (ammassi più o meno numerosi ed estesi di ovociti profasici di 1° ordine, in avanzata degenerazione).

Confermando e completando i risultati del mio precedente studio, posso pertanto affermare che la *Rana agilis* dei dintorni di Siena appartiene ad una « razza indifferenziata » nella quale l'inversione sessuale, iniziata in una piccola percentuale di individui all'epoca della metamorfosi, si completa subito dopo la fine di questa in tutti i maschi genetici.

Un accurato esame citologico dei due esemplari intersessuati dell'epoca della metamorfosi, ha confermato pienamente i risultati delle mie precedenti osservazioni. Anche qui, dalla parte ovarica della gonade (*cortex*) migrano nella parte testicolare (*medulla*), non soltanto gli ovogoni primari, che vi assumono il valore di spermatogoni primari, ma anche le cellule in riposo formanti gruppi isogeni: quest'ultime hanno l'aspetto morfologico degli ovogoni secondari, ma (almeno nel massimo numero

di casi) il valore di ovociti di 1° ordine in riposo, poichè sono quasi sempre riunite in cisti di 10-12 elementi (vedi il mio precedente lavoro). Esse, durante il loro passaggio verso la *medulla* (ove assumono il valore di spermatogoni secondari), perdono, evidentemente per cause meccaniche, la loro disposizione in gruppi isogeni, e, nella *medulla*, ciascuna di esse si mostra (al pari degli spermatogoni primari) circondata da un suo proprio involucri di cellule avvolgenti. Nella *medulla*, pertanto, in questo periodo, la distinzione fra spermatogoni primari e secondari non può più basarsi (come in condizioni normali) sulla loro disposizione isolata o in gruppi isogeni, ma soltanto sul loro aspetto citologico e sulla loro grandezza. Come ho detto nel mio precedente lavoro, gli spermatogoni primari (protogoni) presentano, rispetto a quelli secondari, un maggior volume del citoplasma e del nucleo, una maggiore irregolarità dei contorni del nucleo, un minor numero e una maggior grandezza dei nucleoli. La disposizione isolata degli spermatogoni secondari da poco migrati nella *medulla*, può forse avere in precedenza creato confusione, facendo ritenere che, nei processi di inversione sessuale delle rane, soltanto gli ovogoni primari fossero capaci di passare dalla *cortex* nella *medulla* e che quindi il carattere della bipotenza sessuale fosse esclusivo di questi elementi. In una delle due gonadi intersessuate dell'epoca della metamorfosi, alcune delle cellule germinative isolate in un proprio follicolo di cellule somatiche, contenute nella *medulla*, appaiono in cariocinesi. L'aspetto di tali immagini mitotiche conferma pienamente che si tratta di spermatogoni secondari (e non primari).

Come nelle gonadi intersessuate dell'epoca della metamorfosi studiate nel mio precedente lavoro, anche in quelle del presente allevamento nessuno dei numerosi ovociti profasici contenuti nella *cortex* ovarica, mostra la minima tendenza ad abbandonare il proprio gruppo isogeno ed a migrare nella *medulla*.

Seriando in base al grado di sviluppo raggiunto i testicoli degli esemplari uccisi dopo la metamorfosi, si riconosce che ben presto intervengono attivi processi mitotici degli spermatogoni secondari passati nella *medulla*, onde tutte queste cellule riacquistano ben presto una disposizione in gruppi isogeni sempre più voluminosi. Nei testicoli più sviluppati da me osservati (metà di agosto) le nuove cisti di spermatogoni secondari contengono al massimo 16-20 elementi. In casi assai più rari, anche qualche spermatogonio primario appare in mitosi; non è facile stabilire se da tali mitosi si originino nuovi spermatogoni primari isolati, o nidi di spermatogoni secondari.

Nei 5 testicoli che mostrano ancora evidenti segni della passata condizione femminile (e che possono considerarsi gonadi intersessuate al termine della loro inversione sessuale), non è più nettamente distinguibile, tranne talora in alcune limitate sezioni, una *cortex* ovarica circostante la



*medulla* testicolare. Alcune parti più o meno estese di queste gonadi, contengono però ovociti profasici (talora assai voluminosi) in vari gradi di degenerazione e di riassorbimento. La degenerazione è assai più rapida negli ovociti in 1° periodo di accrescimento (stadi sinaptici) che in quelli in 2° periodo di accrescimento (stadio della deutoplasmogenesi e della scomparsa dei filamenti cromatici). Tale fatto, già noto dalle osservazioni di WITSCH, penso si possa mettere in rapporto con la notevole grandezza di queste ultime cellule e con la loro ricchezza in sostanze di riserva. In nessun testicolo ho mai osservato fatti degenerativi a carico degli spermatogoni primari o secondari. Come appare evidente da alcune sezioni particolarmente interessanti, anche alcuni ovogoni primari e secondari o ovociti di 1° ordine in riposo che, durante il processo di inversione sessuale, anzichè migrare nella *medulla* erano rimasti nella *cortex* assieme agli ovociti profasici, non degenerano come questi ultimi, ma finiscono con l'essere inglobati dalla *medulla* che è in attiva proliferazione, assumendo rispettivamente il valore di spermatogoni primari e secondari.

In alcuni dei medesimi testicoli che presentano ancora evidenti segni della loro precedente condizione femminile, ho osservato qualche spermatogonio secondario che diversifica (talora in modo notevole) da quelli normali del suo stesso gruppo isogeno per un maggior volume sia del citoplasma che del nucleo. Escludo di aver potuto erroneamente interpretare come spermatogoni secondari ipertrofici, eventuali ovociti profasici all'inizio della deutoplasmogenesi. In casi più rari, un analogo aspetto ipertrofico, però assai meno pronunciato, è mostrato anche da qualche spermatogonio primario; nessuno dei quali, tuttavia, raggiunge il notevole volume degli ovogoni primari ipertrofici descritti da WITSCH<sup>(1)</sup> in certe ovaie larvali di *Rana sylvatica* in procinto di trasformarsi in testicoli per effetto dell'alta temperatura. È probabile che la descritta ipertrofia degli spermatogoni in testicoli mostranti ancora segni evidenti di intersessualità, sia l'espressione di un perturbamento delle cellule germinative, contemporaneamente sottoposte ad un influsso mascolinizzante di origine midollare e ad un influsso femminilizzante di origine corticale. In questo caso, gli spermatogoni ipertrofici sarebbero ravvicinabili alle cellule a sessualità intermedia descritte da GALGANO.

Risultati assai più interessanti ha dato l'esame citologico delle gonadi intersessuate di uno fra i due già descritti esemplari dell'epoca della meta-

---

(<sup>1</sup>) E. WITSCH, *Studies on sex differentiation and sex determination in Amphibians*. II. *Sex reversal in female tadpoles of « Rana sylvatica » following the application of high temperature*. « Journ. Exp. Zool. », vol. LII, pag. 267 (1929).



morfosi. Nella parte ovarica (corticale) di tali gonadi, ho osservato alcuni ovociti profasici che, pur senza mostrare nessun accenno alla scomparsa dei filamenti cromatici e alla deutoplasmogenesi, si presentano notevolmente ipertrofici. Non è sempre facile distinguere se queste cellule ipertrofiche siano in stadio di leptotene o di pachitene. Nel primo caso, è ammissibile che siano derivate direttamente dagli elementi ipertrofici in riposo del tipo precedentemente descritto (e ritrovato anche nella *cortex* di queste gonadi). Nel secondo caso, si potrebbe trattare di cellule a sessualità intermedia, in cui la caratteristica femminile sarebbe data dal notevole aumento di volume del citoplasma e del nucleo, quella maschile dall'assenza della deutoplasmogenesi e dalla persistenza dei filamenti cromatici. Pachiteni ipertrofici sessualmente intermedi, del tutto simili ai miei, sono stati descritti e raffigurati da GALGANO nel suo citato lavoro (1936).

Nelle stesse gonadi ho poi potuto riscontrare un certo numero di cellule, in cui sono anche più sicure e indiscutibili le caratteristiche di una sessualità intermedia. Si tratta di cellule in diacinesi le cui tetradi, derivate dai filamenti cromatici pachitениci, hanno come caratteristica femminile la mancanza della terminalizzazione dei chiasmi e come caratteristica maschile la notevole contrazione. Sebbene le cellule da me osservate siano poco numerose e presenti in un solo esemplare, il loro aspetto è così caratteristico e così corrispondente alle descrizioni, ai disegni e alle fotografie di GALGANO, che non può rimanere nessun dubbio sulla loro natura di elementi a sessualità intermedia.

Al pari degli ovociti profasici normali, anche queste cellule a sessualità intermedia non mostrano nessuna tendenza ad abbandonare la *cortex* per migrare nella *medulla*. In uno stesso gruppo isogeno possono esistere, accanto ad una o più cellule a sessualità intermedia, ovociti profasici normali.

Come conclusione generale dei miei reperti, posso affermare che, nella *Rana agilis*, durante il processo di inversione sessuale genetica giovanile, non solo gli ovogoni primari (protogoni), ma anche gli ovogoni secondari e gli ovociti di 1° ordine in riposo manifestano un carattere di completa bipotenza sessuale. Tutte queste cellule, passando dalla *cortex* ovarica alla *medulla* di nuova formazione, vi assumono il valore di elementi germinali testicolari (spermatogoni primari e secondari). Gli ovociti profasici di 1° ordine in primo periodo di accrescimento (stadi sinaptici) manifestano una parziale bipotenza sessuale, perchè possono, pur rimanendo localizzati nella *cortex*, risentire dell'azione mascolinizzante della *medulla* ed assumere aspetti di sessualità intermedia. La scomparsa dei filamenti cromatici e l'inizio della deutoplasmogenesi (2° periodo di accrescimento), sembrano accompagnarsi, negli ovociti di 1° ordine, alla perdita di ogni capacità evolutiva in senso maschile; infatti, sebbene gli ovociti in deutopla-

smogenesi possano rimanere più a lungo di quelli sinaptici inglobati nella *medulla* prima di degenerare, non mostrano mai nessuna tendenza ad assumere aspetti maschili.

Un così prolungato periodo di bipotenza sessuale delle cellule germinative, appare oggi dimostrato dalle ricerche di SWINGLE (qualora esattamente interpretate) per la *Rana catesbeiana*, da quelle di GALGANO per la *R. esculenta* e dalle mie per la *R. agilis*. È probabile che una revisione del comportamento delle cellule germinative durante i processi di inversione sessuale, porti alle stesse conclusioni anche per tutte le altre specie di rana. È da chiedersi se, e fino a qual punto, le medesime condizioni si verifichino anche negli altri Vertebrati, per nessuno dei quali è stata fino ad oggi segnalata la presenza di cellule germinative a sessualità intermedia. Negli invertebrati, il comportamento delle cellule germinative durante i processi di inversione sessuale può non diversificare fondamentalmente da quello descritto per le rane, come appare da note osservazioni di GOLDSCHMIDT sulla *Lymantria dispar*. È stato rilevato che una esatta conoscenza delle condizioni di potenzialità sessuale delle cellule germinative, e delle possibilità di comparsa di cellule a sessualità intermedia, potrà portare utili contributi a problemi ancora controversi, come quello della doppia spermatogenesi (tipica ed atipica) nei Prosobranchi.

In alcuni dei testicoli definitivi più sviluppati di esemplari di *R. agilis* raccolti alla metà di agosto, in qualche gruppo isogeno ove le cellule germinative sono per lo più in numero di 14–16–20, ho visto che alcune di queste ultime iniziano il processo della prima divisione maturativa. Per lo più tali cellule maturative sono poco numerose e non oltrepassano lo stadio del pachitene. In casi più rari, ho veduto anche qualche diplotene. In un esemplare (ove le cellule maturative erano particolarmente abbondanti ed alcune apparivano in degenerazione per picnosi), era pure presente qualche diacinesi e qualche rara metafase e anafase riduzionale. Nessuna di queste cellule in divisione eterotipica mostrava segni di sessualità intermedia: tutte erano tipicamente maschili (spermatoцитi di 1° ordine).

*Nei maschi più progrediti della metà di agosto si ha, dunque, la fase iniziale di un processo spermatogenetico giovanile (prespermatogenesi), che, non avendo ancora potuto disporre del materiale necessario, non so dire se, e fino a qual punto, progredisca nei mesi successivi.* Comunque, è probabile che i prodotti di questa spermatogenesi giovanile restino inutilizzati, tanto più che, negli esemplari da me studiati, i testicoli presentano, al massimo, un accenno assai rudimentale dei tubuli seminiferi e della *rete testis*.

Una simile spermatogenesi giovanile, più o meno completa, in esemplari da poco metamorfosati (1° anno di vita) è stata, fra gli altri, riscon-

trata da GALGANO <sup>(1)</sup> per la *Rana esculenta*, da CHRISTENSEN <sup>(2)</sup> per la *R. pipiens* e da CHENG <sup>(3)</sup> per la *R. cantabrigensis*. Invece nella *R. temporaria*, secondo WITSCHI <sup>(4)</sup> i primi tentativi di spermatogenesi si verificano solo nel 3° anno di vita. Nei maschi genetici di alcune razze indifferenziate di *R. catesbeiana*, secondo i reperti di SWINGLE (1921, 1926), nel primo anno di vita larvale abbiamo una «progonade» (ovaia all'inizio della sua trasformazione in testicolo) in cui maturano ovociti di 1° ordine normali e cellule a sessualità intermedia; nel secondo ed ultimo anno di vita larvale si forma invece un testicolo definitivo che presenta una normale attività spermatogenetica.

Non mi sembra improbabile che per la comparsa delle cellule a sessualità intermedia siano necessarie due condizioni: 1° la coesistenza nella gonade di un influsso femminilizzante di origine corticale (cortessina) e di uno mascolinizzante di origine midollare (medullarina); 2° l'esistenza nell'organismo di una condizione endocrina (forse dominata dalla ipofisi) tale da permettere la contemporanea maturazione delle cellule germinative maschili e di quelle femminili <sup>(5)</sup>. Tutte e due queste condizioni appaiono verificarsi per la «progonade» delle razze indifferenziate di *R. catesbeiana* studiate da SWINGLE, e per le gonadi intersessuate dei giovani esemplari di *R. esculenta* studiati da GALGANO: ciò spiegherebbe il reperto di numerose cellule a sessualità intermedia da parte di questi due AA. Per le gonadi intersessuate degli esemplari di *R. temporaria* dell'epoca della metamorfosi e dei primi due anni di vita (razze indifferenziate), si verifica invece soltanto la prima condizione, dato che, nei maschi, i primi tentativi di spermatogenesi, almeno nei casi studiati da WITSCHI, si effettuano soltanto nel 3° anno di vita: ciò può forse spiegare perchè, nei suoi estesi studi sulla sessualità della *R. temporaria*, WITSCHI non ha

---

(1) M. GALGANO, *Studi sul comportamento della cromatina nella spermatogenesi di «Rana esculenta»* L. - III. *L'attività spermatogenetica nel suo insieme*. «Arch. It. Anat. Embr.», vol. XXXV, pag. 1 (1935).

(2) K. CHRISTENSEN, *Sex differentiation and development of oviducts in «Rana pipiens»*. «Amer. Journ. Anat.», vol. 45, pag. 159 (1930).

(3) T. H. CHENG, *The germ cell history of «Rana cantabrigensis»* Baird. - II. *Sex differentiation and development*. «Zeitschr. Zellf. mikr. Anat.», Bd. XVI, pag. 542 (1932).

(4) E. WITSCHI, *Die Entwicklung der Keimzellen der «Rana temporaria»* L. *Erster Teil. Urkeimzellen und Spermatogenese*. «Zeitschr. f. Zell. u. Geweb.», Bd. I, pag. 523 (1924).

(5) È noto che normalmente le cellule germinative femminili entrano in maturazione in un periodo di sviluppo assai più precoce di quelle maschili. Nelle rane, già prima della metamorfosi, le ovaie appaiono sempre ricchissime di ovociti di 1° ordine in vari stadi della profase riduzionale.

mai osservato cellule germinative a sessualità intermedia. Un'analoga condizione sembra essere quella della *R. sylvatica*, di cui una razza differenziata studiata da WITSCHI <sup>(1)</sup> non ha mostrato nessun indizio di attività spermatogenetica durante tutto il primo anno di vita; anche in questo caso, nelle gonadi intersessuate ottenute allevando i girini a temperatura elevata, WITSCHI <sup>(2)</sup> non accenna alla presenza di cellule a sessualità intermedia.

Non appare strano (accettando questi concetti) il mio reperto di scarse cellule a sessualità intermedia in gonadi intersessuate di *R. agilis* dell'epoca della metamorfosi, dato che in questa specie, come si è veduto, i primi fatti spermatogenetici compaiono, almeno in un certo numero di individui, già un mese e mezzo circa dopo il passaggio allo stato adulto.

---

<sup>(1)</sup> E. WITSCHI, *Studies on sex differentiation and sex determination in Amphibians. I. Development and sexual differentiation of the gonads of « Rana sylvatica »*. « Journ. Exp. Zool. », vol. LII, pag. 235, (1929).

<sup>(2)</sup> E. WITSCHI, *St. II. Sex reversal in female tadpoles of « Rana sylvatica » following the application of high temperature*. Ibidem, vol. LII, pag. 267 (1929).

---



## INDICI





## INDICE PER AUTORI

---

### A

- ABETTI G., Altezza della cromosfera nel 1939 e andamento del ciclo solare, 693.
- AGENO M., AMALDI E., BOCCIARELLI D., CACCIAPUOTI N. B. e TRABACCHI G. C., Sulla scissione degli elementi pesanti, 525.
- — — Sulla scissione dell'uranio con neutroni veloci, 746.
- ALIBRANDI A., Nutrizione e sviluppo sessuale nel gallo. Comunicazione preliminare, 67.
- AMALDI E., BOCCIARELLI D. e TRABACCHI G. C., Misura della sezione d'urto elastico tra neutroni e protoni, 350.
- AMALDI E., vedi AGENO M.
- AMERIO L., Sull'inversione della trasformata di Laplace e su alcuni teoremi tauberiani, 485.
- ANTONIANI C. e CASTELLI T., Sulla specificità dell' $\alpha$  glucosidasi e su di un nuovo caso di « fermentazione diretta » del maltosio, 771.
- ANZI C., vedi FRERI M.
- ARCANGELI E. F., Sintesi del 2,3-dimetilnaftoindone - I, 55.
- ARMELLINI G., I problemi fondamentali della Cosmogonia e la legge di Newton, Nota V, 121.
- Osservazioni sopra l'ipotesi cosmogonica di Laplace, 199.
- I problemi fondamentali della Cosmogonia e la legge di Newton. Nota VI, 697.

- ARMELLINI CONTI G., Serie di osservazioni meridiane dei pianeti « Urano » e « Nettuno », 251.

### B

- BADESSI A., Posizione di Venere nel 25 marzo del 1300. Determinazione dell'ora in cui son sorti Venere ed il Sole il 25 marzo del 1300 nella Montagna del Purgatorio, 42.
- BAGLIONI S., Metodo per l'esame funzionale degli organi di senso dell'orecchio interno (labirinto acustico e non acustico), 677.
- BARONI A., Sulla costituzione delle solfoammidi e delle solfoanilidi, 46.
- Eteri triselenortoformici, 543.
- BETTI A., Spettro Raman degli esteri metilici degli acidi 2 e 3-piridincarbonici, 752.
- BIANCHI E., Sul problema della variazione delle latitudini, 114.
- BLANC A. C., Nuove manifestazioni di arte paleolitica superiore nella Grotta Romanelli in terra d'Otranto, 384.
- Industrie musteriane e paleolitiche superiori nelle dune fossili e nelle grotte litoranee del Capo Palinuro, 602.
- BLASCHKE W., Contributi alla geometria analitica degli spazi di Hermite, 224.
- BOCCIARELLI D., vedi AGENO M.
- Vedi AMALDI E.
- BOMPIANI E., Calotte a centri allineati di superficie algebriche, 93.

BRUNELLI G., Bonifica idrobiologica del litorale albanese. Comunicazione, 391.

— Moderni aspetti e orientamenti della citogenetica, 682.

BRUTTI N., vedi ORRÙ A.

## C

CACCIAPUOTI N. B., vedi AGENO M.

CALDIROLA P., Su alcune relazioni fra le proprietà geometriche di una  $V_n$  e la dinamica delle particelle, 19.

CALIGO D., Un criterio sufficiente di stabilità per le soluzioni dei sistemi di equazioni integrali lineari e sue applicazioni, 497.

CASTELLI T., vedi ANTONIANI C.

CENNAMO F., Variazioni del potere riflettente del Ni, al variare della temperatura, 174.

CHIARA L., Sulla determinazione della forma d'un pianeta, nota la gravità in superficie, 245.

CIMINO M., Orbita del Pianeta 1938 OB, 24.

— Determinazione della latitudine del R. Osservatorio Astronomico di Roma su Monte Mario, 32.

CIMMINO G., Equazione di Poisson e problema generalizzato di Dirichlet, 322.

CISOTTI U., Distribuzione degli sforzi e dei momenti interni nelle verghe rigide, 102.

— Stati di tensione sulle sezioni interne dei solidi rigidi, 193.

— Invarianti e eminvarianti lineari dei tensori, 337.

— Momenti d'inerzia di configurazione e loro intervento nella dinamica dei sistemi materiali, 656.

COLACEVICH A., Sul numero delle stelle con piccola velocità spaziale rispetto al Sole, 705.

CONTE-MAROTTA R., vedi ROSSI A.

## D

DESIO A., Diffusione della tormalina nei giacimenti auriferi del Beni Scian-

gul e dell'Uollega e suoi rapporti con i processi di mineralizzazione, 475.

## F

FABIANI R., Caratteristiche fisiche del tipico Latifondo Siciliano. Relazione, 633.

FINZI B., Principio variazionale nella meccanica dei continui, 412.

FLORENZANO G., vedi VERONA O.

FRACASTORO M. G., Lunghezze d'onda nello spettro della cromosfera nell'eclisse di Sole del 19 giugno 1936, 134.

FRERI M e ANZI C., Studi di spettrochimica nell'ultravioletto. — I. Osservazioni sulle bande di assorbimento degli acidi grassi a catena normale a 1,18 e 1,4  $\mu$ , 359.

## G

GIALANELLA L., Osservazioni e riduzioni di occultazioni di stelle per Luna a Roma (Monte Mario) nel 1938, 256.

— Nuove ricerche sull'«ammasso del Sole». — III. Gli indici di colore, 264.

GIORGIO G. e SOLIMINI O., Acido nicotinic e maldismo sperimentale della cavia, 782.

GIULIANO L., Su un notevole teorema di confronto e su un teorema di unicità per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie, 330.

GOIDANICH G., Una nuova, grave malattia dell'insalata in Italia: il marciume da «Sclerotinia minor», 70.

## K

KRAIL G., Una nuova teoria cosmogonica fondata sul problema degli  $N + 1$  corpi di dimensioni finite e indipendente da ogni specificazione sulla natura dei fenomeni dissipativi, 660.

— Un'importante precisazione analitica occorrente per una nuova teoria cosmogonica fondata sul problema degli  $N + 1$  corpi, 666.

## L

LANFRANCHI F., Azione del bromo sull'acido 2,4-dimetil-3-pirrolcarbonico, 547.

LAURO C., I minerali degli inclusi autigeni nel basalto di Conca de Janas (Orosei). — I. L'olivina e lo spinello cromifero, 186.

— I minerali degli inclusi autigeni nel basalto di Conca de Janas (Orosei). — II. I pirosseni, 290.

— Le differenziazioni lenticolari scure nei graniti dell'Ogliastra di Lanusei (Sardegna), 590.

LIPPI-BONCAMBI C., Su alcuni terreni gialli in provincia di Grosseto, 776.

LOCATELLI P., Sopra il teorema del minimo lavoro per corpi non perfettamente elastici, 10.

— Energie potenziali termodinamiche nell'equilibrio di continui quasielastici, 507.

## M

MAJORANA Q., Centrifugazione elettrostatica. Nota I, 342.

— Centrifugazione elettronica. Nota II, 438.

MANGERÓN D., L'applicazione del metodo di Picone, della trasformata di Laplace ad intervallo d'integrazione finito, alla teoria delle equazioni a derivate parziali d'ordine qualunque, 1.

MANGINI A., Ricerche sulle solfonamidi. Nota I, 452.

— Ricerche sulle solfonamidi. Nota II, 554.

MANZONI ANSIDEI R., Sullo spettro Raman di soluzioni concentrate dei perclorati di cationi bivalenti, 459.

— Spettro Raman di alcune aldeidi terpeniche, 558.

— Ricerche su chetoni pirrolici (1-metil-2,5-diacetilpirrolo, 1-metil-2-acetilpirrolo), 669.

MANZONI ANSIDEI R. e STORTO T., Contributi sperimentali al problema della chelazione. — IX. Ricerche ter-

mochimiche su alcune aldeidi metossibenzoiche, 465.

MATTIOLI G. D., Su di un principio variazionale centrale della dinamica, 418.

MILLOSEVICH F., Qualche prospettiva mineraria dell'Africa Orientale Italiana. Comunicazione, 81.

MINEO C., Forma d'un pianeta dedotta dai valori della gravità in superficie. Nota II, 109.

## N

NICOLINI T., Variazioni della latitudine connesse all'angolo orario lunare, 428.

— Prospettive della ipotesi nebulare di Laplace, 710.

## O

ORRÙ A., Azione dell'ammide nicotina sugli eritrociti e sui leucociti del sangue di animali normali, 74.

ORRÙ A. e BRUTTI N., Sulle relazioni osmotiche tra albume e tuorlo di uovo di gallina, 619.

## P

PELTRERA A., Ricerche sull'autosterilità di *Ciona intestinalis*, 630.

PENTIMALLI F., Prime ricerche sulla natura dell'agente della leucemia dei polli 212.

— Sulla natura dell'agente del sarcoma dei polli, 215.

— Linfosarcoma maligno trapiantabile del pollo, 395.

PERETTI L., Il berillo di C. Mondei presso Montescheno (Val d'Ossola), 63.

PICCARDI G. e TESI U., Ricerche sopra una particolare attivazione dei liquidi. — I. Determinazioni di costante dielettrica, 181.

PICONE M., Problemi riducibili d'integrazione delle equazioni lineari a derivate parziali, 642.

- PIRRONE F., Studio sulle ossichinoline.  
— IV. Derivati mercurati della 8-ossichinolina, 50.

## R

- RIGHINI G., Lo Spettro continuo della Corona solare, 716.  
ROLLA M. Contributi sperimentali alla conoscenza della struttura degli ioni  $\text{XO}_3^-$ . b) Spettri Raman di nitrati di ioni tri- e tetravalenti, 563.  
— Contributi sperimentali al problema della «chelazione». — XIII. Spettri Raman di soluzioni di aldeide salicilica, 756.  
ROSSI A. e CONTE-MAROTTA R., Anemia macrocitica ipercromica sperimentale e principio antianemico, 295.  
RUGGIERI G., Il Calabriano nell'Appennino romagnolo, 60.

## S

- SANERO E., Studi petrografici sul Massiccio del Monte Bianco. Il granito, 673.  
SCARAMELLI G., Sul potenziale di riduzione di alcuni chetoni pirrolici. — III. Dipirrilchetoni, 471.  
— Sul potenziale elettrochimico di riduzione delle aldeidi pirroliche. — III.  $\alpha$ - e  $\beta$ -aldeidi pirroliche carbonio sostituite, 575.  
— Contributi sperimentali al problema della «chelazione». — XIV. Sul potenziale polarografico di riduzione delle aldeidi ossi e metossi benzoiche, 764.  
— Contributi sperimentali al problema della «chelazione». — XV. Sul potenziale polarografico di riduzione di alcuni ossi-acetofenoni, 763.  
SCARPA O., Potenziali elettrochimici ed effetto Volta. — II. Sul calcolo numerico dei potenziali elettrochimici normali dei metalli, 127.  
— Potenziali elettrochimici ed effetto Volta. — III. Deduzione dei valori più probabili degli effetti Volta esterni

e dei potenziali elettrochimici reali, 204.

- SCARPA O., Potenziali elettrochimici ed effetto Volta. — IV. I potenziali assoluti degli elettrodi, 443.  
— Potenziali elettrochimici ed effetto Volta. — V. Le tensioni di soluzioni dei metalli, 537.  
SERGI S., I più antichi uomini d'Italia secondo le recenti scoperte. Relazione, 299.  
SIGNORINI R., Sulla tettonica dell'Appennino romagnolo, 370.  
SILVESTRI F., Descrizione preliminare di una specie nuova di *Mengenilla* (*M. spinulosa*, *Insecta*, *Strepsiptera*) della Sicilia e notizie sul suo ciclo e sul particolare modo di fecondazione, 614.  
SOLAINI L., Sulla determinazione speditiva delle quote dei fotogrammi nadirali, 275.  
SOLIMINI O., vedi GIORGIO G.  
STORTO T., vedi MANZONI ANSIDEI R.

## T

- TESEI U., vedi PICCARDI G.  
TOLOTTI C., Applicazione di un nuovo metodo di M. Piccone all'integrazione delle equazioni dell'elasticità in un parallelepipedo rettangolo, 514.  
TOSCANO L., Sul prodotto di due polinomi di Laguerre e di Hermite, 405.  
TRABACCHI G. C., vedi AGENO M.  
— Vedi AMALDI E.  
TRIA E., Cristallizzazione della catalasi del fegato, 279.  
— Studi sulla catalasi del sangue. — I. Preparazione dell'enzima, 285.  
— Studi su una proteina cristallizzabile presente nella milza e nel fegato, 579.

## V

- VANNINI E., Nuove osservazioni sullo sviluppo delle gonadi e sul comportamento delle cellule germinative in

- una razza indifferenziata di « *Rana agilis* », 790.
- VERONA O. e FLORENZANO G., Influenza esercitata da un principio ipoglicemico isolato dai Lieviti sopra la fermentazione alcolica, 481.
- VIAPO M., Fotometria della corona interna nell'eclisse di Sole del 19 giugno 1936, 158.
- VILLA M., Sulle superficie quasi-asintotiche della  $V_4^6$  di  $S_8$  che rappresenta le coppie di punti di due piani, 228.
- VINASSA DE REGNY P., Lasilic e giovanile nei vegetali fossili e viventi, 477.
- VIOLA T., Sulla stabilità degli integrali delle equazioni differenziali lineari, omogenee e a coefficienti costanti, 238.
-

## INDICE PER MATERIE

### A

**Antropologia.** — Nuove manifestazioni di arte paleolitica superiore nella Grotta Romanelli in terra d'Otranto. A. C. BLANC, 384.

— Industrie musteriane e paleolitiche superiori nelle dune fossili e nelle grotte litoranee del Capo Palinuro. A. C. BLANC, 602.

— I più antichi uomini d'Italia secondo le recenti scoperte. Relazione. S. SERGI, 299.

**Astronomia.** — Altezza della cromosfera nel 1939 e andamento del ciclo solare. G. ABETTI, 693.

— I problemi fondamentali della Cosmogonia e la legge di Newton. Nota V. G. ARMELLINI, 121.

— Osservazioni sopra l'ipotesi cosmogonica di Laplace. G. ARMELLINI, 199.

— I problemi fondamentali della Cosmogonia e la legge di Newton. Nota VI. G. ARMELLINI, 697.

— Serie di osservazioni meridiane dei pianeti « Urano » e « Nettuno ». G. ARMELLINI CONTI, 251.

— Posizione di Venere nel 25 marzo del 1300. Determinazione dell'ora in cui son sorti Venere ed il Sole il 25 marzo del 1300 nella Montagna del Purgatorio. A. BADESSI, 42.

— Sul problema della variazione delle latitudini. E. BIANCHI, 114.

— Orbita del Pianeta 1938 OB. M. CIMINO, 24.

**Astronomia.** — Determinazione della latitudine del R. Osservatorio Astronomico di Roma su Monte Mario. M. CIMINO, 32.

— Sul numero delle stelle con piccola velocità spaziale rispetto al Sole. A. COLACEVICH, 705.

— Lunghezze d'onda nello spettro della cromosfera nell'eclisse di Sole del 19 giugno 1936. M. G. FRACASTORO, 134.

— Osservazioni e riduzioni di occultazioni di stelle per Luna a Roma (Monte Mario) nel 1938. L. GIALANELLA, 256.

— Nuove ricerche sull'ammasso del Sole. — III. Gli indici di colore. L. GIALANELLA, 264.

— Variazioni della latitudine connesse all'angolo orario lunare. T. NICOLINI, 428.

— Prospettive della ipotesi nebulare di Laplace. T. NICOLINI, 710.

— Lo Spettro continuo della Corona solare. G. RIGHINI, 716.

— Fotometria della corona interna nell'eclisse di sole del 19 giugno 1936. M. VIARO, 158.

### B

**Biologia.** — Bonifica idrobiologica dell'itale albanese. Comunicazione. G. BRUNELLI, 391.

— Moderni aspetti e orientamenti della citogenetica. G. BRUNELLI, 682.

**Biologia.** — Sulle relazioni osmotiche tra albume e tuorlo di uovo di gallina. A. ORRÙ e N. BRUTTI, 619.

— Nuove osservazioni sullo sviluppo delle gonadi e sul comportamento delle cellule germinative in una razza indifferenziata di «*Rana agilis*». E. VANNINI, 790.

**Botanica.** — Una nuova, grave malattia dell'insalata in Italia: il marciume da «*Sclerotinia minor*». G. GOIDANICH, 70.

— Influenza esercitata da un principio ipoglicemico isolato dai Lieviti sopra la fermentazione alcoolica O. VERONA e G. FLORENZANO, 481.

## C

**Chimica.** — Nutrizione e sviluppo sessuale nel gallo. Comunicazione preliminare. A. ALIBRANDI, 67.

— Sintesi del 2,3-dimetilnaftoindone — I. E. F. ARCANGELI, 55.

— Sulla costituzione delle solfoammidi e delle solfoanilidi. A. BARONI, 46.

— Eteri triselenortoformici. A. BARONI, 543.

— Spettro Raman degli eteri metilici degli acidi 2 e 3-piridincarbonici. A. BETTI, 752.

— Studi di spettrochimica nell'ultra-rosso. — I. Osservazioni sulle bande di assorbimento degli acidi grassi a catena normale a 1,18 e 1,4 $\mu$ . M. FRERI e C. ANZI, 359.

— Azione del bromo sull'acido 2,4-dimetil-3-pirrolcarbonico. F. LANFRANCHI, 547.

— Ricerche sulle solfonamidi. Nota I. A. MANGINI, 452.

— Ricerche sulle solfonamidi. Nota II. A. MANGINI, 554.

— Sullo spettro Raman di soluzioni concentrate dei perclorati di cationi bivalenti. R. MANZONI ANSIDEI, 459.

— Spettro Raman di alcune aldeidi terpeniche. R. MANZONI ANSIDEI, 558.

— Ricerche su chetoni pirrolici (1-metil-2,5 diacetilpirrolo, 1-metil-2-acetilpirrolo). R. MANZONI ANSIDEI, 669.

**Chimica.** — Contributi sperimentali al problema della chelazione. — IX. Ricerche termochimiche su alcune aldeidi metossibenzoiche. R. MANZONI ANSIDEI e T. STORTO, 465.

— Ricerche sopra una particolare attivazione dei liquidi. — I. Determinazioni di costante dielettrica. G. PICCARDI e U. TESEI, 181.

— Studio sulle ossichinoline. — IV. Derivati mercurati della 8-ossichinolina. F. PIRRONI, 50.

— Contributi sperimentali alla conoscenza della struttura degli ioni  $XO_3^-$ . b) Spettri Raman di nitrati di ioni tri- e tetraivalenti. M. ROLLA, 563.

— Contributi sperimentali al problema della «chelazione». — XIII. Spettri Raman di soluzioni di aldeidi salicilici. M. ROLLA, 756.

— Sul potenziale di riduzione di alcuni chetoni pirrolici. — III. Dipirrilchetoni. G. SCARAMELLI, 471.

— Sul potenziale elettrochimico di riduzione delle aldeidi pirroliche. — III.  $\alpha$ - e  $\beta$ -aldeidi pirroliche carboetossati sostituite. G. SCARAMELLI, 575.

— Contributi sperimentali al problema della «chelazione». — XIV. Sul potenziale polarografico di riduzione delle aldeidi ossi e metossi benzoiche. G. SCARAMELLI, 764.

— Contributi sperimentali al problema della «chelazione». — XV. Sul potenziale polarografico di riduzione di alcuni ossi-acetofenoni. G. SCARAMELLI, 768.

— Cristallizzazione della catalasi del fegato. E. TRIA, 279.

— Studi sulla catalasi del sangue. — I. Preparazione dell'enzima. E. TRIA, 285.

— Studi su una proteina cristallizzabile presente nella milza e nel fegato. E. TRIA, 579.

**Chimica Biologica.** — Sulla specificità dell' $\alpha$  glucosidasi e su di un nuovo caso di «fermentazione diretta» del maltosio. C. ANTONIANI e T. CASTELLI, 771.



## E

- Elettrochimica.** — Potenziali elettrochimici ed effetto Volta. — II. Sul calcolo numerico dei potenziali elettrochimici normali dei metalli. O. SCARPA, 127.
- Potenziali elettrochimici ed effetto Volta. — III. Deduzione dei valori più probabili degli effetti Volta esterni e dei potenziali elettrochimici reali. O. SCARPA, 204.
- Potenziali elettrochimici ed effetto Volta. — IV. I potenziali assoluti degli elettrodi. O. SCARPA, 443.
- Potenziali elettrochimici ed effetto Volta. — V. Le tensioni di soluzioni dei metalli. O. SCARPA, 537.

## F

- Fisica.** — Sulla scissione degli elementi pesanti. M. AGENO, E. AMALDI, D. BOCCIARELLI, N. B. CACCIAPUOTI e G. C. TRABACCHI, 525.
- Sulla scissione dell'uranio con neutroni veloci. M. AGENO, E. AMALDI, D. BOCCIARELLI e G. C. TRABACCHI, 746.
- Misura della sezione d'urto elastico tra neutroni e protoni. E. AMALDI, D. BOCCIARELLI e G. C. TRABACCHI, 350.
- Variazioni del potere riflettente del Ni, al variare della temperatura. F. CENNAMO, 174.
- Centrifugazione elettronica. Nota I. Q. MAJORANA, 342.
- Centrifugazione elettronica. Nota II. Q. MAJORANA, 438.
- Fisiologia.** — Metodo per l'esame funzionale degli organi di senso dell'orecchio interno (labirinto acustico e non acustico). S. BAGLIONI, 677.
- Azione dell'ammide nicotinic sugli eritrociti e sui leucociti del sangue di animali normali. A. ORRÙ, 74.

## G

- Geodesia.** — Sulla determinazione speditiva delle quote dei fotogrammi nadirali. L. SOLAINI, 275.

**Geologia.** — Caratteristiche fisiche del tipico Latifondo Siciliano. Relazione. R. FABIANI, 633.

- Su alcuni terreni gialli in provincia di Grosseto. C. LIPPI-BONCAMBI, 776.
- Il Calabrianò nell'Appennino romagnolo. G. RUGGIERI, 60.
- Sulla tettonica dell'Appennino Romagnolo. R. SIGNORINI, 370.
- La silice giovanile nei vegetali fossili e viventi. P. VINASSA DE REGNY, 477.

## M

- Matematica.** — Sull'inversione della trasformata di Laplace e su alcuni teoremi tauberiani. L. AMERIO, 485.
- Contributi alla geometria analitica degli spazi di Hermite. W. BLASCHKE, 224.
- Calotte a centri allineati di superficie algebriche. E. BOMPIANI, 93.
- Un criterio sufficiente di stabilità per le soluzioni dei sistemi di equazioni integrali lineari e sue applicazioni. D. CALIGO, 497.
- Equazione di Poisson e problema generalizzato di Dirichlet. G. CIMMINO, 322.
- Invarianti e eminvarianti lineari dei tensori. U. CISOTTI, 337.
- Su un notevole teorema di confronto e su un teorema di unicità per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie. L. GIULIANO, 330.
- L'applicazione del metodo di Picone, della trasformata di Laplace ad intervallo d'integrazione finito, alla teoria delle equazioni derivate parziali d'ordine qualunque. D. MANGERON, 1.
- Problemi riducibili d'integrazione delle equazioni lineari a derivate parziali. M. PICONE, 642.
- Sul prodotto di due polinomi di Laguerre e di Hermite. L. TOSCANO, 405.
- Sulle superficie quasi-asintotiche della  $V^6$  di  $S_8$  che rappresenta le

- coppie di punti di due piani. M. VILLA 228.
- Matematica.** — Sulla stabilità degli integrali delle equazioni differenziali lineari, omogenee e a coefficienti costanti. T. VIOLA, 238.
- Meccanica.** — Su alcune relazioni fra le proprietà geometriche di una  $V_n$  e la dinamica delle particelle. P. CALDIROLA, 19.
- Sulla determinazione della forma d'un pianeta, nota la gravità in superficie. L. CHIARA, 245.
- Distribuzione degli sforzi e dei momenti interni nelle verghe. U. CISOTTI 102.
- Stati di tensione sulle sezioni interne dei solidi rigidi. U. CISOTTI, 193.
- Momenti d'inerzia di configurazione e loro intervento nella dinamica dei sistemi materiali. U. CISOTTI, 656.
- Principio variazionale nella meccanica dei continui. B. FINZI, 412.
- Una nuova teoria cosmogonica fondata sul problema degli  $N + 1$  corpi di dimensioni finite e indipendente da ogni specificazione sulla natura dei fenomeni dissipativi. G. KRALL, 660.
- Un'importante precisazione analitica occorrente per una nuova teoria cosmogonica fondata sul problema degli  $N + 1$  corpi. G. KRALL, 666.
- Sopra il teorema del minimo lavoro per corpi non perfettamente elastici. P. LOCATELLI, 10.
- Energie potenziali termodinamiche nell'equilibrio di continui quasielastici. P. LOCATELLI, 507.
- Su di un principio variazionale centrale della dinamica. G. D. MATTIOLI, 418.
- Forma d'un pianeta dedotta dai valori della gravità in superficie. Nota II. C. MINEO, 109.
- Applicazione di un nuovo metodo di M. Picone all'integrazione delle equazioni dell'elasticità in un parallelepipedo rettangolo. C. TOLOTTI, 514.
- Mineralogia.** — Diffusione della tormalina nei giacimenti auriferi del Beni Sciangul e dell'Uollega e suoi rapporti con i processi di mineralizzazione. A. DESIO, 475.
- I minerali degli inclusi autigeni nel basalto di Conca de Janas (Orosei). — I. L'olivina e lo spinello cromifero C. LAURO, 186.
- I minerali degli inclusi autigeni nel basalto di conca de Janas (Orosei). — II. I pirosseni. C. LAURO, 290.
- Qualche prospettiva mineraria dell'Africa Orientale Italiana. Comunicazione. F. MILLOSEVICH, 81.
- Il berillo di C. Mondei presso Montescheno (Val d'Ossola). L. PERETTI, 63.
- P**
- Patologia.** — Acido nicotinico e maldismo sperimentale della cavia. G. GIORGIO e O. SOLIMINI, 782.
- Prime ricerche sulla natura dell'agente della leucemia dei polli. F. PENTIMALLI, 212.
- Sulla natura dell'agente del sarcoma dei polli. F. PENTIMALLI, 215.
- Linfosarcoma maligno trapiantabile del pollo. F. PENTIMALLI, 395.
- Anemia macrocitica ipercromica sperimentale e principio antianemico. A. ROSSI e R. CONTE-MAROTTA, 295.
- Petrografia.** — Le differenziazioni lenticolari scure nei graniti dell'Ogliastra di Lanusei (Sardegna). C. LAURO, 590.
- Studi petrografici sul Massiccio del Monte Bianco. Il granito. E. SANERO, 673.
- Z**
- Zoologia.** — Ricerche sull'autosterilità di *Ciona intestinalis*. A. PELTRERA, 630.
- Descrizione preliminare di una specie nuova di *Mengenilla* (*M. spinulosa*, *Insecta*, *Strepsiptera*) della Sicilia e notizie sul suo ciclo e sul particolare modo di fecondazione. F. SILVESTRI, 614.

# INDICE DEL VOLUME

## FASCICOLO 1-5.

FERIE ACCADEMICHE 1939-XVII.

### NOTE PRESENTATE DA ACCADEMICI E DA AGGREGATI

|                                                                                                                                                                                                                                   |        |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| D. MANGERON. - L'applicazione del metodo di Picone, della trasformata di Laplace ad intervallo d'integrazione finito, alla teoria delle equazioni a derivate parziali d'ordine qualunque (pres. dall'Aggregato <i>M. Picone</i> ) | Pag. 1 |
| P. LOCATELLI. - Sopra il teorema del minimo lavoro per corpi non perfettamente elastici (pres. dall'Accademico <i>C. Somigliana</i> )                                                                                             | 10     |
| P. CALDIROLA. - Su alcune relazioni fra le proprietà geometriche di una $V_1$ e la dinamica delle particelle (pres. dall'Aggregato <i>U. Cisotti</i> )                                                                            | 19     |
| M. CIMINO. - Orbita del Pianeta 1938 O B (pres. dall'Aggregato <i>G. Armellini</i> )                                                                                                                                              | 24     |
| ID. - Determinazione della latitudine del R. Osservatorio Astronomico di Roma su Monte Mario (pres. dall'Aggregato <i>G. Armellini</i> )                                                                                          | 32     |
| A. BADESSI. - Posizione di Venere nel 25 marzo del 1300. Determinazione dell'ora in cui sono sorti Venere ed il Sole il 25 marzo del 1300 nella Montagna del Purgatorio (pres. dall'Aggregato <i>G. Armellini</i> )               | 42     |
| A. BARONI. - Sulla costituzione delle solfoammidi e delle solfoanilidi (pres. dall'Aggregato <i>G. Bargellini</i> )                                                                                                               | 46     |
| F. PIRRONE. - Studio sulle ossichinoline. - IV. Derivati mercurati della 8-ossichinolina (pres. dall'Aggregato <i>G. Bargellini</i> )                                                                                             | 50     |
| E. F. ARCANGELI. - Sintesi del 2, 3-dimetilnaftoindone - I (pres. dall'Aggregato <i>G. Bargellini</i> )                                                                                                                           | 55     |
| G. RUGGIERI. - Il Calabriano nell'Appennino romagnolo (pres. dall'Aggregato <i>M. Gortani</i> )                                                                                                                                   | 60     |
| L. PERETTI. - Il berillo di C. Mondei presso Montescheno (Val d'Ossola) (pres. dall'Aggregato <i>F. Sacco</i> )                                                                                                                   | 63     |
| A. ALIBRANDI. - Nutrizione e sviluppo sessuale nel gallo. Comunicazione preliminare (pres. dall'Aggregato <i>C. Ciaccio</i> )                                                                                                     | 67     |
| G. GORDANICH. - Una nuova, grave malattia dell'insalata in Italia: il marciume da « Sclerotinia minor » Jagg. (pres. dall'Aggregato <i>L. Petri</i> )                                                                             | 70     |
| A. ORRÌ. - Azione dell'ammido nicotinica sugli eritrociti e sui leucociti del sangue di animali (pres. dall'Aggregato <i>S. Visco</i> )                                                                                           | 74     |

## FASCICOLO 6.

ADUNANZA DEL 18 NOVEMBRE 1939-XVIII.

## COMUNICAZIONI

|                                                                                          |         |
|------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| F. MILLOSEVICH. - Qualche prospettiva mineraria dell'Africa Orientale Italiana . . . . . | Pag. 81 |
|------------------------------------------------------------------------------------------|---------|

## NOTE DI ACCADEMICI

## E DI AGGREGATI ALLA R. ACCADEMIA D'ITALIA

|                                                                                                                                               |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| E. BOMPIANI. - Calotte a centri allineati di superficie algebriche . . .                                                                      | 93  |
| U. CISOTTI. - Distribuzione degli sforzi e dei momenti interni nelle verghe rigide . . . . .                                                  | 102 |
| C. MINEO. - Forma d'un pianeta dedotta dai valori della gravità in superficie. Nota II . . . . .                                              | 109 |
| E. BIANCHI. - Sul problema della variazione delle latitudini . . . .                                                                          | 114 |
| G. ARMELLINI. - I problemi fondamentali della Cosmogonia e la legge di Newton. Nota V . . . . .                                               | 121 |
| O. SCARPA. - Potenziali elettrochimici ed effetto Volta - Sul calcolo numerico dei potenziali elettrochimici normali dei metalli. Nota II . . | 127 |

## NOTE PRESENTATE DA ACCADEMICI

## E DA AGGREGATI ALLA R. ACCADEMIA D'ITALIA

|                                                                                                                                                                   |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| M. G. FRACASTORO. - Lunghezze d'onda nello spettro della cromosfera nell'eclisse di Sole del 19 giugno 1936 (pres. da G. ABETTI) . . . .                          | 134 |
| M. VIARO. - Fotometria della corona interna nell'eclisse di Sole del 19 giugno 1936 (pres. da G. ABETTI) . . . . .                                                | 158 |
| F. CENNAMO. - Variazioni del potere riflettente del Ni. al variare della temperatura (pres. da A. CARRELLI) . . . . .                                             | 174 |
| G. PICCARDI e U. TESEI. - Ricerche sopra una particolare attivazione dei liquidi. I. Determinazioni di costante dielettrica. Nota I (pres. da L. ROLLA) . . . . . | 181 |
| C. LAURO. - I minerali degli inclusi autigeni nel basalto di Conca de Janas (Orosei) (pres. da F. MILLOSEVICH) . . . . .                                          | 186 |

## FASCICOLO 7.

ADUNANZA DEL 16 DICEMBRE 1939-XVIII.

## NOTE DI ACCADEMICI

## E DI AGGREGATI ALLA R. ACCADEMIA D'ITALIA

|                                                                               |     |
|-------------------------------------------------------------------------------|-----|
| U. CISOTTI. - Stati di tensione sulle sezioni interne dei solidi rigidi . . . | 193 |
| G. ARMELLINI. - Osservazioni sopra l'ipotesi cosmogonica di Laplace . .       | 199 |

|                                                                                                                                                                                   |          |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| O. SCARPA. — Potenziali elettrochimici ed effetto Volta. Nota III: Deduzione dei valori più probabili degli effetti Volta esterni e dei potenziali elettrochimici reali . . . . . | Pag. 204 |
| F. PENTIMALLI. — Prime ricerche sulla natura dell'agente della leucemia dei polli. . . . .                                                                                        | 212      |
| Id. — Sulla natura dell'agente del sarcoma dei polli . . . . .                                                                                                                    | 215      |

#### NOTE PRESENTATE DA ACCADEMICI E DA AGGREGATI ALLA R. ACCADEMIA D'ITALIA

|                                                                                                                                                                |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| W. BLASCHKE. — Contributi alla geometria analitica degli spazi di Hermite (pres. da <i>E. Bompiani</i> ) . . . . .                                             | 224 |
| M. VILLA. — Sulle superficie quasi-asintotiche della $V_4^3$ di $S_3$ che rappresenta le coppie di punti di due piani (pres. da <i>E. Bompiani</i> ) . . . . . | 228 |
| T. VIOLA. — Sulla stabilità degli integrali delle equazioni differenziali lineari, omogenee e a coefficienti costanti (pres. da <i>M. Picone</i> ) . . . . .   | 238 |
| L. CHIARA. — Sulla determinazione della forma d'un pianeta, nota la gravità in superficie (pres. da <i>C. Mineo</i> ) . . . . .                                | 245 |
| G. ARMELLINI CONTI. — Serie di osservazioni meridiane dei pianeti « Urano » e « Nettuno » (pres. da <i>G. Armellini</i> ) . . . . .                            | 251 |
| L. GIALANELLA. — Osservazioni e riduzioni di occultazioni di stelle per Luna a Roma (Monte Mario) nel 1938 (pres. da <i>G. Armellini</i> ) . . . . .           | 256 |
| Id. — Nuove ricerche sull'« ammasso del Sole ». III. — Gli indici di colore (pres. da <i>G. Armellini</i> ) . . . . .                                          | 264 |
| L. SOLAINI. — Sulla determinazione speditiva delle quote da fotogrammi nadirali (pres. da <i>G. Cassinis</i> ) . . . . .                                       | 275 |
| E. TRIA. — Cristallizzazione della catalasi del fegato (pres. da <i>S. Visco</i> ) . . . . .                                                                   | 279 |
| Id. — Studi sulla catalasi del sangue. — Nota I: Preparazione dell'enzima (pres. da <i>S. Visco</i> ) . . . . .                                                | 285 |
| C. LAURO. — I minerali degli inclusi autigeni nel basalto di conca de Janas (Orosei). II. — I pirosseni (pres. da <i>S. E. F. Millosevich</i> ) . . . . .      | 290 |
| A. ROSSI e R. CONTE-MAROTTA. — Anemia macrocitica ipercromica sperimentale e principio antianemico (pres. da <i>G. Quagliariello</i> ) . . . . .               | 295 |

#### FASCICOLO 8.

ADUNANZA DEL 19 GENNAIO 1940—XVIII.

#### RELAZIONI

|                                                                                |     |
|--------------------------------------------------------------------------------|-----|
| S. SERGI. — I più antichi uomini d'Italia secondo le recenti scoperte. . . . . | 299 |
|--------------------------------------------------------------------------------|-----|

#### NOTE E COMUNICAZIONI

|                                                                                                                                                       |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| G. CIMMINO. — Equazione di Poisson e problema generalizzato di Dirichlet (pres. da <i>M. Picone</i> , Aggregato alla R. Accademia d'Italia) . . . . . | 322 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|

|                                                                                                                                                                                                                                                    |          |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| L. GIULIANO. — Su un notevole teorema di confronto e su un teorema di unicità per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie (pres. da <i>L. Tonelli</i> , Aggregato alla R. Accademia d'Italia) . . . . .                                     | Pag. 330 |
| U. CISOTTI. — Invarianti e eminvarianti lineari dei tensori . . . . .                                                                                                                                                                              | 337      |
| Q. MAJORANA. — Centrifugazione elettronica . . . . .                                                                                                                                                                                               | 342      |
| E. AMALDI, D. BOCCIARELLI e G. C. TRABACCHI. — Misura della sezione d'urto elastico tra neutroni e protoni (pres. da <i>G. C. Trabacchi</i> , Aggregato alla R. Accademia d'Italia) . . . . .                                                      | 350      |
| M. FRERI e C. ANZI. — Studi di spettrochimica nell'ultravioletto. — I. Osservazioni sulle bande di assorbimento degli acidi grassi a catena normale a 1,18 e 1,4 $\mu$ (pres. da <i>G. Bruni</i> , Aggregato alla R. Accademia d'Italia) . . . . . | 359      |
| R. SIGNORINI. — Sulla tettonica dell'Appennino Romagnolo (pres. da <i>G. Checchia Rispoli</i> , Aggregato alla R. Accademia d'Italia) . . . . .                                                                                                    | 370      |
| A. C. BLANC. — Nuove manifestazioni di arte paleolitica superiore nella Grotta Romanelli in terra d'Otranto (pres. da <i>S. Sergi</i> , Aggregato alla R. Accademia d'Italia). . . . .                                                             | 384      |
| G. BRUNELLI. — Bonifica idrobiologica del litorale albanese . . . . .                                                                                                                                                                              | 391      |
| F. PENTIMALLI. — Linfosarcoma maligno trapiantabile del pollo . . . . .                                                                                                                                                                            | 395      |

## FASCICOLO 9.

ADUNANZA DEL 16 FEBBRAIO 1940—XVIII.

## NOTE E COMUNICAZIONI

|                                                                                                                                                                                                               |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| L. TOSCANO. — Sul prodotto di due polinomi di Laguerre e di Hermite (pres. dall'Accademico <i>G. Giorgi</i> ) . . . . .                                                                                       | 405 |
| B. FINZI. — Principio variazionale nella meccanica dei continui (pres. dall'Accademico <i>O. Somigliana</i> ). . . . .                                                                                        | 412 |
| G. D. MATTIOLI. — Su di un principio variazionale centrale della dinamica (pres. da <i>U. Cisotti</i> , Aggregato alla R. Accademia d'Italia). . . . .                                                        | 418 |
| T. NICOLINI. — Variazioni della latitudine connesse all'angolo orario lunare (pres. da <i>L. Carnera</i> , Aggregato alla R. Accademia d'Italia). . . . .                                                     | 428 |
| Q. MAIORANA. — Centrifugazione elettronica. Nota II. . . . .                                                                                                                                                  | 438 |
| O. SCARPA. — Potenziali elettrochimici ed effetto Volta. — IV. I potenziali assoluti degli elettrodi . . . . .                                                                                                | 443 |
| A. MANGINI. — Ricerche sulle solfonamidi. Nota I (pres. da <i>G. Bargellini</i> , Aggregato alla R. Accademia d'Italia). . . . .                                                                              | 452 |
| R. MANZONI ANSIDEI. — Sullo spettro Raman di soluzioni concentrate dei perclorati di cationi bivalenti (pres. dall'Accademico <i>G. B. Bonino</i> ) . . . . .                                                 | 459 |
| R. MANZONI ANSIDEI e T. STORTO. — Contributi sperimentali al problema della chelazione. — IX. Ricerche termochimiche su alcune aldeidi metossibenzoiche (pres. dall'Accademico <i>G. B. Bonino</i> ). . . . . | 465 |
| G. SCARAMELLI. — Sul potenziale di riduzione di alcuni chetoni pirrolici. — III. Dipirrilchetoni (pres. dall'Accademico <i>G. B. Bonino</i> ) . . . . .                                                       | 471 |



|                                                                                                                                                                                                          |          |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| A. DESIO. - Diffusione della tormalina nei giacimenti auriferi del Beni Sciangul e dell'Uollega e suoi rapporti con i processi di mineralizzazione (pres. dall'Accademico <i>G. Dainelli</i> ) . . . . . | Pag. 475 |
| P. VINASSA DE REGNY. - La silice giovanile nei vegetali fossili e viventi . . . . .                                                                                                                      | 477      |
| O. VERONA e G. FLORENZANO. - Influenza esercitata da un principio ipoglicemico isolato dai Lieviti sopra la fermentazione alcoolica (pres. dall'Accademico <i>B. Longo</i> ) . . . . .                   | 481      |

## FASCICOLO 10.

ADUNANZA DEL 21 MARZO 1940-XVIII.

## NOTE E COMUNICAZIONI

|                                                                                                                                                                                                                                  |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| I. AMERIO. - Sull'inversione della trasformata di Laplace e su alcuni teoremi tauberiani (pres. da <i>M. Picone</i> , Aggregato alla R. Accademia d'Italia). . . . .                                                             | 485 |
| D. CALIGO. - Un criterio sufficiente di stabilità per le soluzioni dei sistemi di equazioni integrali lineari e sue applicazioni (pres. da <i>M. Picone</i> , Aggregato alla R. Accademia d'Italia) . . . . .                    | 497 |
| P. LOCATELLI. - Energie potenziali termodinamiche nell'equilibrio di continui quasielastici (pres. da <i>U. Cisotti</i> , Aggregato alla R. Accademia d'Italia) . . . . .                                                        | 507 |
| C. TOLOTTI. - Applicazione di un nuovo metodo di <i>M. Picone</i> all'integrazione delle equazioni dell'elasticità in un parallelepipedo rettangolo (pres. da <i>M. Picone</i> , Aggregato alla R. Accademia d'Italia) . . . . . | 514 |
| M. AGENO, E. AMALDI, D. BOCCIARELLI, N. B. CACCIAPUOTI e G. C. TRABACCHI. - Sulla scissione degli elementi pesanti (pres. da <i>G. C. Trabacchi</i> , Aggregato alla R. Accademia d'Italia) . . . . .                            | 525 |
| O. SCARPA. - Potenziali elettrochimici ed effetto Volta. - V. Le tensioni di soluzioni dei metalli . . . . .                                                                                                                     | 537 |
| A. BARONI. - Eteri triscelenortoformici (pres. da <i>G. Bargellini</i> , Aggregato alla R. Accademia d'Italia) . . . . .                                                                                                         | 543 |
| F. LANFRANCHI. - Azione del bromo sull'acido 2,4-dimetil-3-pirrolcarbonico (pres. da <i>S. Visco</i> , Aggregato alla R. Accademia d'Italia) . . . . .                                                                           | 547 |
| A. MANGINI. - Ricerche sulle solfonamidi. Nota II (pres. da <i>G. Bargellini</i> , Aggregato alla R. Accademia d'Italia) . . . . .                                                                                               | 554 |
| R. MANZONI ANSIDEI. - Spettro Raman di alcune aldeidi terpeniche (pres. dall'Accademico <i>G. B. Bonino</i> ) . . . . .                                                                                                          | 558 |
| M. ROLLA. - Contributi sperimentali alla conoscenza della struttura degli ioni $XO_3$ . b) Spettri Raman di nitrati di ioni tri- e tetravalenti (pres. dall'Accademico <i>G. B. Bonino</i> ) . . . . .                           | 563 |
| G. SCARAMELLI. - Sul potenziale elettrochimico di riduzione delle aldeidi pirroliche. - III. $\alpha$ - e $\beta$ -aldeidi pirroliche carboetossi sostituite (pres. dall'Accademico <i>G. B. Bonino</i> ) . . . . .              | 575 |



|                                                                                                                                                                                                                                        |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| E. TRIA. — Studi su una proteina cristallizzabile presente nella milza e nel fegato (pres. da S. Visco, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) Pag.                                                                                     | 579 |
| C. LAURO. — Le differenziazioni lenticolari scure nei graniti dell'Ogliastra di Lanusei (Sardegna) (pres. da S. E. F. Millosevich) . . . . .                                                                                           | 590 |
| A. C. BLANC. — Industrie musteriane e paleolitiche superiori nelle dune fossili e nelle grotte litoranee del Capo Palinuro (pres. da S. Sergi, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) . . . . .                                         | 602 |
| F. SILVESTRI. — Descrizione preliminare di una specie nuova di <i>Mengenilla</i> ( <i>M. spinulosa</i> , <i>Insecta</i> , <i>Strepsiptera</i> ) della Sicilia e notizie sul suo ciclo e sul particolare modo di fecondazione . . . . . | 614 |
| A. ORRÙ e N. BRUTTI. — Sulle relazioni osmotiche tra albume e tuorlo di uovo di gallina (pres. da S. Visco, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) .                                                                                    | 619 |
| A. PELTRERA. — Ricerche sull'autosterilità di <i>Ciona intestinalis</i> (pres. da A. Ghigi, Aggregato alla R. Accademia d'Italia). . . . .                                                                                             | 630 |

## FASCICOLO 11.

ADUNANZA DEL 12 APRILE 1940-XVIII.

## RELAZIONI

|                                                                            |     |
|----------------------------------------------------------------------------|-----|
| R. FABIANI. — Caratteristiche fisiche del tipico Latifondo Siciliano . . . | 633 |
|----------------------------------------------------------------------------|-----|

## NOTE E COMUNICAZIONI

|                                                                                                                                                                                                                      |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| M. PICONE. — Problemi riducibili d'integrazione delle equazioni lineari a derivate parziali . . . . .                                                                                                                | 642 |
| U. CISOTTI. — Momenti d'inerzia di configurazione e loro intervento nella dinamica dei sistemi materiali . . . . .                                                                                                   | 656 |
| G. KRALL. — Una nuova teoria cosmogonica fondata sul problema degli $N + 1$ corpi di dimensioni finite e indipendente da ogni specificazione sulla natura dei fenomeni dissipativi (pres. dall'Accademico F. Severi) | 660 |
| ID. — Un'importante precisazione analitica occorrente per una nuova teoria cosmogonica fondata sul problema degli $N + 1$ corpi (pres. dall'Accademico F. Severi) . . . . .                                          | 666 |
| R. MANZONI ANSIDEI. — Ricerche su chetoni pirrolici (1-metil-2.5-diacetilpirrolo, 1-metil-2-acetilpirrolo) (pres. dall'Accademico G. B. Bonino)                                                                      | 669 |
| E. SANERO. — Studi petrografici sul Massiccio del Monte Bianco. Il granito (pres. da S. E. F. Millosevich) . . . . .                                                                                                 | 673 |
| S. BAGLIONI. — Metodo per l'esame funzionale degli organi di senso dell'orecchio interno (labirinto acustico e non acustico) . . . . .                                                                               | 677 |
| G. BRUNELLI. — Moderni aspetti e orientamenti della citogenetica . . . .                                                                                                                                             | 682 |

## FASCICOLO 12.

ADUNANZA DEL 17 MAGGIO 1940-XVIII.

## NOTE E COMUNICAZIONI

|                                                                                                                                                                                                                               |          |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| G. ABETTI. — Altezza della cromosfera nel 1939 e andamento del ciclo solare. . . . .                                                                                                                                          | Pag. 693 |
| G. ARMELLINI. — I problemi fondamentali della Cosmogonia e la legge di Newton. Nota VI. . . . .                                                                                                                               | 697      |
| A. COLACEVICH. — Sul numero delle stelle con piccola velocità spaziale rispetto al Sole (pres. da G. ABETTI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) . . . . .                                                                  | 705      |
| T. NICOLINI. — Prospettive della ipotesi nebulare di Laplace (pres. da L. CARNERA, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) . . . . .                                                                                            | 710      |
| G. RIGHINI. — Lo Spettro continuo della Corona solare (pres. da G. ABETTI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) . . . . .                                                                                                    | 716      |
| M. AGENO, E. AMALDI, D. BOCCIARELLI e G. C. TRABACCHI. — Sulla scissione dell'uranio con neutroni veloci (pres. da G. C. TRABACCHI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) . . . . .                                           | 746      |
| A. BETTI. — Spettro Raman degli eteri metilici degli acidi 2 e 3-piridincarbonici (pres. dall'Accademico G. B. BONINO). . . . .                                                                                               | 752      |
| M. ROLLA. — Contributi sperimentali al problema della «chelazione». — XIII. Spettri Raman di soluzioni di aldeide salicilica (pres. dall'Accademico G. B. BONINO). . . . .                                                    | 756      |
| G. SCARAMELLI. — Contributi sperimentali al problema della «chelazione». — XIV. Sul potenziale polarografico di riduzione delle aldeidi ossi e metossi benzoiche (pres. dall'Accademico G. B. BONINO) . . . . .               | 764      |
| Id. — Contributi sperimentali al problema della «chelazione». — XV. Sul potenziale polarografico di riduzione di alcuni ossi-acetofenoni (pres. dall'Accademico G. B. BONINO) . . . . .                                       | 768      |
| C. ANTONIANI e T. CASTELLI. — Sulla specificità dell' $\alpha$ glucosidasi e su di un nuovo caso di « fermentazione diretta » del maltosio (pres. da A. MENNOZZI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia). . . . .              | 771      |
| C. LIPPI-BONCAMBI. — Su alcuni terreni gialli in provincia di Grosseto (pres. dall'Accademico F. GIORDANI) . . . . .                                                                                                          | 776      |
| G. GIORGIO e O. SOLIMINI. — Acido nicotinico e maidismo sperimentale della cavia (pres. da C. CIACCIO, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) . . . . .                                                                        | 782      |
| E. VANNINI. — Nuove osservazioni sullo sviluppo delle gonadi e sul comportamento delle cellule germinative in una razza indifferenziata di « Rana agilis » (pres. da G. GOLA, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) . . . . . | 790      |

|                              |     |
|------------------------------|-----|
| INDICE PER AUTORI . . . . .  | 803 |
| INDICE PER MATERIE . . . . . | 808 |
| INDICE DEL VOLUME. . . . .   | 812 |



# DATE DUE

UTC REC'D JUN 29 2013

GAYLORD

PRINTED IN U.S.A.



3 8198 304 934 88

UNIVERSITY OF ILLINOIS AT CHICAGO

